ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 6115

Е.П. Солодовникова, А.Н. Тавхелидзе,
О.А. Хрусталев

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ Н.Н. БОГОЛЮБОВА В ТЕОРИИ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ. II.

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1971

P2 - 6115

Е.П. Солодовникова, А.Н. Тавхелидзе,
О.А. Хрусталев

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ Н.Н. БОГОЛЮБОВА В ТЕОРИИ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ. II.

Направлено в журнал "Теоретическая
и математическая физика"

1. Введение

В основе современных методов теории сильной связи лежит очевидный физический факт: в первом приближении, когда можно пренебречь энергией свободного бозонного поля по сравнению с энергией взаимодействия, бозоны не могут рассматриваться как реальные частицы, способные переносить те или иные квантовые числа. В этом приближении бозонное поле сводится к некоторому классическому полю, играющему роль эффективного потенциала для частицы. Потенциал этот заведомо не мал, поэтому основное состояние системы с сильным взаимодействием значительно отличается от состояний невзаимодействующей системы, но коль скоро это основное состояние будет найдено, поправки, связанные с квантовой природой бозонов можно рассматривать как малое возмущение. В связи с тем, что при определении стационарного состояния системы нельзя воспользоваться теорией возмущений, задача правильного выбора волновой функции основного состояния в теории сильной связи приобретает первостепенное значение, причем речь идет не столько о технических трудностях, сколько о принципиальных вопросах, на которые обычно в теории сильной связи внимание не обращается. Поскольку в первом приближении квантовое бозонное поле заменяется классическим и играет роль внешнего поля, естественно искать волновую функцию основного состояния в виде произведения функций, зависящих от переменных частицы и поля порознь. Это наилучшим образом согласуется с представлением о частице в потенциальной яме. Однако обычно используемое прямолинейное разбиение волновой функции на соответствующие произведения и последующее толкование эффективного внешнего поля как усредненного по такому состоянию квантованного поля приходит в противоречие с требованием выполнения законов сохранения, обусловленных симметрией гамильтониана системы. Выполнение нужных законов сохранения можно гарантировать только в том случае, если стационарные волновые функции системы будут осуществлять представление группы симметрии гамильтониана. Волновые же функции вышеописанного вида такими свойствами обладать не могут. Задача учета сохранения в теории сильной связи была принципиально решена в работе Н.Н. Боголюбова /1/. Метод Н.Н.Боголюбова заключается в каноническом преобразовании переменных, в результате которого среди новых переменных появляются параметры группы симметрии гамильтониана. В силу инвариантности исходного гамильтониана в новом гамильтониане эти переменные оказываются циклическими, и выбор волновой функции с правильными трансформационными свойствами становится простой задачей. Вопрос о разделении переменных после этого уже не связан с трансформационными свойствами гамильтониана. В /1/ было показано, что такое каноническое преобразование позволяет найти основное состояние системы и построить итерационное решение задачи о собственных векторах состояния системы. Таким образом, преобразование Н.Н. Боголюбова является эффективным, и, насколько нам известно, единственным последовательным методом исследования систем с сильным взаимодействием.

В работах /1-4/ этот метод применялся к изучению нерелятивистских и релятивистских трансляционно-инвариантных одночастичных систем с адиабатическим и сильным взаимодействием. В настоящей работе преобразование Н.Н.Боголюбова применяется к исследованию задачи о сильном взаимодействии частицы с бозонным полем, инвариантном относительно достаточно общей непрерывной группы преобразований.

2. Некоторые свойства групп Ли

Поскольку в дальнейшем параметры группы симметрии гамильтониана окажутся независимыми переменными, целесообразно напомнить основные результаты теории групп Ли, изложив отдельно факты, касающиеся свойств собственно групп Ли соответствующих групп преобразований /5/.

Пусть r - параметрическая непрерывная группа G с элементами $g(a^1, a^2, \ldots, a^r) \equiv g(a)$ определяется законом умножения:

$$\text{если} \quad g(a)\, g(b) = g(c), \quad \text{то } c^a = \phi^a(a;b), \quad a = 1, \ldots, r. \tag{1}$$

Единице группы соответствуют значения параметров $a^a = 0$, параметры обратного $g(a)$ элемента будут обозначаться символом a^{-1}.

Пусть $g(c) = g(a)\, g(b)$ и $g(c') = g(a)\, g(b')$, тогда

$$\phi(c^{-1}, c') = \phi(b^{-1}, b'), \tag{2}$$

если же $g(c) == g(a)\, g(b)$, а $g(c') == g(a')\, g(b)$, то

$$\phi(c', c^{-1}) = \phi(a', a^{-1}). \tag{3}$$

Если рассматривать бесконечно малые изменения параметров, то соотношения (2) и (3) сводятся к дифференциальным уравнениям. Именно из соотношения (2) следует, что

$$\frac{\partial c^a}{\partial b^\beta} = A^a_\gamma(c)\ B^\gamma_\beta(b), \tag{4}$$

и из (3) вытекает уравнение

$$\frac{\partial c^a}{\partial a^\beta} = \bar{A}^a_\gamma(c)\ \bar{B}^\gamma_\beta(a). \tag{5}$$

Матричные функции параметров в уравнениях (4) и (5) определяются соотношениями

$$A^a_\beta(a) = \left(\frac{\partial\phi^a(a,b)}{\partial b^\beta}\right)_{b=0} \qquad B^a_\beta(b) = \left(\frac{\partial\phi^a(a,b)}{\partial b^\beta}\right)^{-1}_{a=b} \tag{6}$$

$$\bar{A}^a_\beta(b) = \left(\frac{\partial\phi^a(a,b)}{\partial a^\beta}\right)_{a=0} \qquad \bar{B}^a_\beta(a) = \left(-\frac{\partial\phi^a(a,b)}{\partial a^\beta}\right)^{-1}_{b=a}. \tag{7}$$

При нулевых значениях соответствующих аргументов все эти матрицы сводятся к единичным. Поскольку при $a = 0$ или $b = 0$ выполняются тождества $c = b$ или $c = a$, то из уравнений (4) и (5) следует, что пары матриц A, B и $\bar{A}$, $\bar{B}$ взаимно обратны. Условие полной интегрируемости уравнений (4) приводит к тождествам

$$A^\sigma_\nu(c)\ A^\gamma_{\tau,\sigma}(c) - A^\sigma_\tau(c)\ A^\gamma_{\nu,\sigma}(c) = c^\rho_{\nu\tau}\ A^\gamma_\rho(c), \quad f_{,\nu}(a) \equiv \frac{\partial f(a)}{\partial a^\nu}, \tag{8}$$

где величины

$$c^\rho_{\nu\tau} = [\,\mathcal{B}^\rho_{a,\beta}(b) - \mathcal{B}^\rho_{\beta,a}(b)\,]\ A^a_\nu(b)\ A^\beta_\tau(b) \tag{9}$$

должны быть постоянными. Условие полной интегрируемости уравнений (5) приводит к аналогичным выражениям для надчеркнутых величин.

Кроме того, условие совместности уравнений (4) и (5) требует, чтобы тождества

$$\frac{\partial}{\partial b^{a}}\left(\frac{\partial c^{\gamma}}{\partial a^{\beta}}\right) = \frac{\partial}{\partial a^{\beta}}\left(\frac{\partial c^{\gamma}}{\partial b^{a}}\right) \tag{10}$$

были следствием уравнений (4) и (5). Это условие приводит к соотношению

$$\bar{A}^{\gamma}_{\rho,\sigma}(a)\, A^{\sigma}_{\lambda}(a) - A^{\gamma}_{\lambda,\sigma}(a)\, \bar{A}^{\sigma}_{\rho} = 0\,, \tag{11}$$

из которого следует, в частности, что

$$\bar{c}^{a}_{\beta\gamma} = -c^{a}_{\beta\gamma}\,. \tag{12}$$

Определим дифференциальные операторы

$$L_{a} = A^{\beta}_{a}(a)\frac{\partial}{\partial a^{\beta}}\,, \tag{13}$$

$$\bar{L}_{a} = \bar{A}^{\beta}_{a}(a)\frac{\partial}{\partial a^{\beta}}\,. \tag{14}$$

Из соотношений (8) следует, что эти операторы удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[L_{a}, L_{\beta}] = c^{\gamma}_{a\beta} L_{\gamma}\,, \tag{15}$$

$$[\bar{L}_{a}, \bar{L}_{\beta}] = \bar{c}^{\gamma}_{a\beta} \bar{L}_{\gamma}\,. \tag{16}$$

Чтобы установить связь между операторами L_a и $\bar{L}_a$, определим матрицу ρ, связывающую матрицы B и $\bar{B}$:

$$\bar{B}^{a}_{\beta}(a) = \rho^{a}_{\nu}(a)\, B^{\nu}_{\beta}(a)\,. \tag{17}$$

Эта матрица удовлетворяет уравнениям

$$L_a \rho^{\gamma}_{\beta}(a) = c^{\nu}_{a\beta}\, \rho^{\gamma}_{\nu}(a), \qquad (18)$$

а при нулевых значениях аргументов сводится к единичной. Легко показать, что операторы L_a и $\bar{L}_a$ связаны соотношением

$$\bar{L}_a = \rho^{-1\sigma}_{a} L_{\sigma} \qquad (19)$$

и в силу уравнений (18) операторы L_a и $\bar{L}_a$ коммутируют

$$[L_a, \bar{L}_{\beta}] = 0. \qquad (20)$$

С группой Ли G можно связать две группы преобразований переменных x^i, $i = 1,2,\ldots,n$. Пусть

$$x'^i = T_a x^i = f^i(x; a), \qquad (21)$$

где функции f^i удовлетворяют необходимым условиям группы /5/. В частности, должно выполняться соотношение

$$T_b T_a x^i = T_{\phi(a,b)} x^i. \qquad (22)$$

Из этого условия вытекают дифференциальные уравнения группы преобразований. Если определить r n - мерных векторов

$$\xi^i_a(x) = \left(\frac{\partial f^i(x;a)}{\partial a^a} \right)_{a=0}, \qquad (23)$$

то этим уравнениям можно придать вид

$$\frac{\partial x'^i}{\partial a a} = \xi^i_{\beta}(x')\, B^{\beta}_{a}(a). \qquad (24)$$

Условие полной интегрируемости этих уравнений приводит к соотношениям

$$\xi_a^\ell(x)\ \xi^i_{\beta,\ell}(x) - \xi^\ell_\beta(x)\ \xi^i_{a,\ell}(x) = c^\gamma_{a\beta}\ \xi^i_\gamma(x),\quad f_{,i} \equiv \frac{\partial f}{\partial x^i}\ , \qquad (25)$$

из которых следует, что дифференциальные операторы

$$X_a = \xi^i_a(x)\ \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad (26)$$

удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[X_a, X_\beta] = c^\gamma_{a\beta}\ X_\gamma\ . \qquad (27)$$

Поскольку в силу условий группы уравнения (21) при любых a однозначно разрешимы относительно x^i :

$$x^i = \bar f^i(x';\ a)\ , \qquad (28)$$

можно определить группу преобразований $\bar T_a$:

$$x'^i = \bar f^i(x, a) = \bar T_a\ x^i \qquad (29)$$

с законом умножения

$$\bar T_a\ \bar T_b = \bar T_{\phi(a,b)}\ . \qquad (30)$$

Определив соответствующие векторы $\bar\xi^i_a(x)$, получим дифференциальные уравнения группы $\bar T_a$ (группы обратных преобразований):

$$\frac{\partial x'^i}{\partial a^a} = \xi^i_\beta(x')\ \bar B^\beta_a(a)\ . \qquad (31)$$

Таким образом, для группы обратных преобразований $\bar T_a$ справедливы все соотношения, верные для группы преобразований T_a , только соответствующие величины надо надчеркнуть. При бесконечно малых преобразованиях (21)

$$\delta x^i = \xi^i_a (x)\, \delta a^a \quad , \tag{32}$$

поэтому изменение произвольной функции $F(x)$ при бесконечно малом преобразовании (21) равно

$$\delta F(x) = F(x+\delta x) - F(x) = \delta\, a^a\, \xi^i_a(x) \frac{\partial F(x)}{\partial x^i} = \delta\, a^a\, X_a\, F(\overset{\lambda}{x}). \tag{33}$$

Если использовать преобразование (21) x^i как функции $n+r$ переменных λ^i и a^a :

$$x^i = f^i(\lambda; a)\ , \tag{34}$$

то уравнение группы (24) даст нам приращение x^i при бесконечно малом изменении a и фиксированных λ . Изменение функции $F(x)$ при таком изменении аргументов равно

$$\delta F(x) = X_\beta F(x)\, B^\beta_a(a)\, \delta a^a\ . \tag{35}$$

Таким образом, если определить x^i с помощью соотношения (34), то операторы x_a сводятся к операторам L_a :

$$L_a F\, [f(\lambda, a)] = X_a F(x). \tag{36}$$

3. Представления группы G и законы сохранения

Переменные x^i будут в дальнейшем координатами частицы, а группа симметрии гамильтониана будет определяться группой преобразований T_a . Чтобы описать поле, следует рассмотреть линейные представления этой группы. Будем предполагать, что существует полная система функций $\phi_f(x)$ (индекс f может быть и непрерывным) ортонормированная с весом $w(x)$, таким, что элемент объема $w(x)\, dx$

инвариантен относительно преобразований T_a. Определим унитарные матрицы

$$D_{f'f}(a) = \int dx\, w(x)\, \phi^*_{f'}(T\ x)\, \phi_f(x). \tag{37}$$

Эти матрицы реализуют линейное представление группы T_a :

$$D(b)\, D(a) = D\,[\phi(a, b)] \tag{28}$$

и удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$L_\alpha\, D(a) = -J_\alpha\, D(a), \tag{39}$$

где матрицы J_α определяются соотношением

$$J_\alpha = -\left(-\frac{\partial D(a)}{\partial a^\alpha}\right)_{a=0} \tag{40}$$

и удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[J_\alpha, J_\beta] = c^\gamma_{\alpha\beta}\, J_\gamma. \tag{41}$$

Вопрос о разложении представления (37) на неприводимые пока обсуждаться не будет. В силу определения (37)

$$\phi_f(T_a\, x) = \sum_{f'} \phi_{f'}(x)\, D^{-1}_{f'f}(a), \tag{42}$$

поэтому

$$X_\alpha\, \phi_f(x) = \sum_{f'} \phi_{f'}(x)\, J_{\alpha f' f}, \tag{43}$$

т.е. элементы матриц J_α являются матричными элементами оператора X_α. Разложение квантованного скалярного поля $\phi(x)$ по системе функций $\phi_f(x)$ приводит к операторам b_f, b^+_f, удовлетворяющим каноническим перестановочным соотношениям

$$[b_f, b^+_{f'}] = \delta_{ff'}. \tag{44}$$

Преобразование переменных x^i (21) порождает преобразование операторов поля

$$b_f \to \sum_{f'} D_{ff'}(a) b_{f'} \quad , \qquad b^+_f \to \sum_{f'} b^+_{f'} D^+_{f'f}(a) \; . \tag{45}$$

Роль операторов X_α в этом случае играют операторы

$$\hat{X}_\alpha = \sum_{ff'} b^+_f J_{\alpha ff'} b_{f'} \; , \tag{46}$$

удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$[\hat{X}_\alpha , \hat{X}_\beta] = c^\gamma_{\alpha\beta} \hat{X}_\gamma \; \tag{47}$$

и

$$[\hat{X}_\alpha , b_f] = -J_{\alpha ff'} b_{f'} \; , \qquad [\hat{X}_\alpha , b^+_f] = b^+_{f'} J_{\alpha f'f} \; . \tag{48}$$

Если гамильтониан системы H инвариантен относительно преобразования

$$x^i \to T_\alpha x^i = f^i(x,a) \; , \tag{49}$$

$$b_f \to D_{ff'}(a) b_{f'} \; , \qquad b^+_f \to b^+_{f'} D^+_{f'f}(a) \; , \tag{50}$$

то он коммутирует с оператором

$$Z_\alpha = X_\alpha + \hat{X}_\alpha \; , \tag{51}$$

который естественно назвать оператором полного обобщенного импульса. Таким образом инвариантность гамильтониана системы относительно преобразований (49), (50) приводит к сохранению полного обобщенного импульса системы. Оператор Z_α удовлетворяет перестановочным соотношениям

$$[\, Z_\alpha \,, Z_\beta \,] = c^{\gamma}_{\alpha\beta} \; Z_\gamma \,, \tag{52}$$

$$[\, Z_a \,, b_f \,] = - J_{a f f'} \; b_{f'} \,, \qquad [\, Z_a \,, b^+_f \,] = b^+_{f'} \; J_{a f' f} \,, \tag{53}$$

$$[\, Z_a \,, x^i \,] = \xi^i_a (x). \tag{54}$$

Инвариантность гамильтониана относительно преобразований (49), (50) означает, что рассматривается скалярная частица. В случае частицы с внутренними степенями свободы преобразования (49), (50) вызывают преобразование гамильтониана

$$H \to D^{(\ell)} (a^{-1}) \, H \, D^{(\ell)} (a) \,. \tag{55}$$

где $D^{(\ell)}(a)$ – некоторая неприводимая составляющая представления (37), причём матрицы $D^{(\ell)}(a)$ действуют на внутренние переменные частицы. В этом случае преобразования (49), (50) дополняются преобразованием волновой функции системы

$$\Psi \to D^{(\ell)}(a) \, \Psi \,. \tag{56}$$

а сохраняющимся обобщенным импульсом системы становится величина

$$Z_a = X_a + \hat{X}_a + J^{(\ell)}_a \,. \tag{57}$$

также удовлетворяющая перестановочным соотношениям типа (52)-(54).

4. Преобразование Н.Н. Боголюбова

Сопоставляя перестановочные соотношения операторов обобщенного импульса(52)-(54) с результатом действия операторов L_a , X_a , можно понять характер канонического преобразования, обеспечивающего выполнение законов сохранения. Прежде чем перейти к этому преобразованию, удобно преобразовать сначала операторы b_f , b_f^+ . Заметим, что среди индексов f , нумерующих функции $\phi_f(x)$, найдется индекс, который будет обозначаться f^* со свойством

$$\phi_{f^*}(x) = \phi_f^*(x) . \tag{58}$$

Из операторов b_f и $b_{f^*}^+$ и эрмитово сопряженных им можно составить операторы, удовлетворяющие перестановочным соотношениям для координаты и импульса, т.е. разложить поле $\phi(x)$ по комплексным координатам. Поскольку в случае сильного взаимодействия операторы b_f и b_f^+ в первом приближении сводятся к большим по абсолютной величине c - числам, удобно совершить такое преобразование /1-4/ :

$$q_f = \frac{b_f + b_{f^*}^+}{\tilde{g}\sqrt{2}} , \qquad p_f = \tilde{g}\,\frac{b_f^+ - b_{f^*}}{i\sqrt{2}} , \tag{59}$$

где $\tilde{g}$ - большой параметр, пропорциональный постоянной связи. Оператор p_f в этом представлении сводится к производной по q_f . После этого по аналогии с соответствующим преобразованием, рассмотренным в /1/, перейдем от переменных x^i , q_f к новым переменным λ^i , a^a , Q_f по формулам

$$x^i = f^i(\lambda ; a) , \tag{60}$$

$$q_f = D_{ff'}(a)\,[\,U_{f'} + \epsilon Q_{f'}\,]\ , \tag{61}$$

где ϵ – некоторый малый параметр. Функции f^i в этом преобразовании – это функции, реализующие группу преобразований T_a (21), а матрицы $D(a)$ – ее линейное представление (37). Относительно переменных a^α будем предполагать, что они являются функциями переменных поля q_f, но не зависят от x^i. Поскольку преобразования (60),(61) вносят r новых переменных, которые будут рассматриваться как независимые, переменные Q_f следует связать r дополнительными условиями. Выясним сначала смысл преобразования (60), (61). Поскольку коммутатор величин x^i и q_f с оператором L_α сводится к производной, то из дифференциального уравнения группы T_a (24) следует, что

$$[\,L_\alpha\ , x^i\,] = \xi^i_\alpha(x)\ , \tag{62}$$

а из уравнения для матриц, реализующих представление группы (39) -

$$[\,L_\alpha\,, q_f\,] = -J_{\alpha f f'}\,q_{f'}\ . \tag{63}$$

Сравнивая эти формулы с соотношениями (53), (54), убеждаемся, что в новом представлении для переменных системы операторы L_α обладают теми же перестановочными соотношениями с переменными системы, что и оператор Z_α. Кроме того, перестановочные соотношения для операторов L_α (15) совпадают с аналогичными перестановочными соотношениями для операторов Z_α (52). Таким образом, операторы L_α претендуют теперь на роль операторов обобщенного импульса. Чтобы убедиться в справедливости такого предположения, следует найти перестановочные соотношения L_α с операторами p_f в новом представлении.

Оператор p_f в новом представлении равен

$$-i\frac{\partial}{\partial q_f} = -\sum_\ell \frac{\partial Q_\ell}{\partial q_f}\frac{\partial}{\partial Q_\ell'} - i\frac{\partial a^a}{\partial q_f}\frac{\partial}{\partial a^a} - i\frac{\partial \lambda^i}{\partial q_f}\frac{\partial}{\partial \lambda^i}. \qquad (64)$$

Чтобы найти все производные в правой части (64), рассмотрим сначала свойства переменных Q_f. Как уже упоминалось, на Q_f следует наложить r дополнительных условий. Сформулируем их как линейные условия

$$\Sigma N_{af} Q_f = 0 , \qquad (65)$$

где N_{af} r – строчная матрица ранга r. В этом случае всегда можно найти r – столбцовую матрицу M_{fa} со свойством

$$\sum_f N_{af} M_{f\beta} = \delta_{a\beta} \qquad (66)$$

и построить проекционную матрицу

$$A_{ff'} = \delta_{ff'} - \sum_a M_{fa} N_{af'} , \qquad (67)$$

удовлетворяющую соотношениям

$$\sum_\ell A_{f\ell} A_{\ell f'} = A_{ff'} , \qquad (68)$$

$$\sum_f N_{af} A_{ff'} = 0, \qquad \sum_{f'} A_{ff'} M_{f'a} = 0 . \qquad (69)$$

Таким образом, переменные Q_f можно представить в виде

$$Q_f = \Sigma A_{f\ell} Z_\ell , \qquad (70)$$

где Z_ℓ – некоторые независимые переменные. Используя эти свойства Q_ℓ, производные этих переменных по q_f можно представить в виде

$$\frac{\partial Q_\ell}{\partial q_f} = \frac{1}{\epsilon}\sum_s A_{\ell s} D^{-1}_{sf}(a) + \frac{1}{\epsilon}\Sigma A_{\ell s}\frac{\partial D^{-1}_{sf'}(a)}{\partial q_f} q_{f'} . \qquad (71)$$

Используя дифференциальное уравнение для матриц представления, легко получить соотношение

$$\frac{\partial D^{-1}_{sf'}}{\partial q_f} = (D^{-1}(a)\, J_\beta\, D(a))_{s\ell}\, D^{-1}_{\ell f'}(a)\, B^\beta_a(a) \frac{\partial a^a}{\partial q_f}\,. \tag{72}$$

Матрица

$$\tilde{J}_\beta(a) = D^{-1}(a)\, J_\beta\, D(a) \tag{73}$$

должна линейно выражаться через матрицы J_γ :

$$\tilde{J}_\beta(a) = T^\gamma_\beta(a)\, J_\gamma\,. \tag{74}$$

С другой стороны, в силу дифференциальных уравнений (39) она удовлетворяет уравнениям

$$L_a\, \tilde{J}_\beta(a) = c^\gamma_{a\beta}\, \tilde{J}_\gamma(a)\,. \tag{75}$$

Таким образом, коэффициенты $T^\gamma_\beta(a)$ должны удовлетворять уравнениям

$$L_a\, T^\gamma_\beta(a) = c^\sigma_{a\beta}\, T^\gamma_\sigma(a)\,, \tag{76}$$

а при нулевых значениях сводиться к символам Кронекера. Сравнивая уравнения (76) с уравнениями (18), находим, что

$$T^\gamma_\beta(a) = \rho^\gamma_\beta(a)\,, \tag{77}$$

где $\rho^\gamma_\beta(a)$ – матрица, определяемая соотношением (17). Используя соотношение (74), равенство (72) можно записать в виде

$$\frac{\partial D^{-1}_{sf'}}{\partial q_f} = J_{\gamma s\ell}\, D^{-1}_{\ell f'}\, \bar{B}^\gamma_a(a)\, \frac{\partial a^a}{\partial q_f}\,. \tag{78}$$

Выбирая матрицу M_{fa} в виде

$$M_{fa} = \sum_{f'} J_{aff'} u_{f'} , \tag{79}$$

что всегда возможно, поскольку важен лишь ранг матрицы M_{fa}, приведем выражение для производной (71) к виду

$$\frac{\partial Q_\ell}{\partial q_f} = \frac{1}{\epsilon} \sum_s A_{\ell s} D^{-1}_{sf}(a) + \sum A_{\ell s} J_{\gamma s f'} Q_{f'} \bar{B}^{\gamma}_{a}(a) \frac{\partial a^a}{\partial q_\ell} . \tag{80}$$

Чтобы найти производные параметров группы a^a по переменным q_f, запишем дополнительные условия (65), в виде

$$\sum_{f'} N_{af'} (D^{-1}_{f'\ell} q_\ell - u_{f'}) = 0 \tag{81}$$

и продифференцируем эти соотношения по q_f. Эта операция позволяет получить уравнения для $\dfrac{\partial a^a}{\partial q_f}$:

$$\sum N_{af'} D^{-1}_{f'f} + \frac{\partial a^\beta}{\partial q_f} \bar{B}^a_\beta(a) + \epsilon \sum N_{af'} J_{\gamma f'\ell} Q_\ell \frac{\partial a^\beta}{\partial q_f} \bar{B}^\gamma_\beta(a) = 0 . \tag{82}$$

После подстановки

$$\frac{\partial a^\beta}{\partial q_f} \bar{B}^a_\beta(a) = \tilde{N}^a_{f'} D^{-1}_{f'f}(a) \tag{83}$$

уравнение (82) сводится к уравнению, не содержащему переменных a^a :

$$N_{af} + \tilde{N}^a_f + \epsilon \sum N_{af'} J_{\gamma f'\ell} Q_\ell \tilde{N}^\gamma_f = 0 . \tag{84}$$

Поскольку уравнение (84) содержит малый параметр ϵ, оно может быть эффективно решено методом последовательных приближений. Из соотношения (83) следует, что

$$\frac{\partial a^a}{\partial q_f} = \bar{A}^a_\beta(a) \tilde{N}^\beta_{f'} D^{-1}_{f'f}(a) . \tag{85}$$

Чтобы найти оператор p_f в новом представлении, остается вычислить производные переменных λ^i по q_f. В силу соотношений (60) переменные λ^i можно представить в виде

$$\lambda^i = \bar{f}^i(x;\, a)\,, \tag{86}$$

где функции $\bar{f}^i$ реализуют группу обратных преобразований $\bar{T}_a$. Используя дифференциальные уравнения группы обратных преобразований (31) и соотношения (85), получаем

$$\frac{\partial \lambda^i}{\partial q_f} = \frac{\partial \bar{f}^i(x,a)}{\partial a^\alpha}\;\frac{\partial a^\alpha}{\partial q_f} = \bar{\xi}^i_\beta(\lambda)\,\tilde{N}^\beta_{f'}\,D^{-1}_{f'f}(a)\,. \tag{87}$$

Определяя импульсы, соответствующие переменным Q_f в виде

$$P_f = -i\sum_{f'} A_{f'f}\,\frac{\partial}{\partial Q_{f'}}\,, \tag{88}$$

получим следующее выражение для оператора импульса P_f:

$$p_f = -i\,\frac{\partial}{\partial q_f} = D^{-1}_{f'f}(a)\,[\frac{1}{\epsilon}P_{f'} + \tilde{N}^\gamma_{f'}\,(Q_\ell\, J'_{\gamma\ell\ell'}\,P_{\ell'} - i\bar{L}_\gamma - i\bar{\xi}^i_\gamma(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda^i})]\,, \tag{89}$$

где J'_γ – матрица, транспонированная к J_γ.

Переменные a входят в квадратные скобки выражения (89) в виде операторов $\bar{L}_a$, коммутирующих с операторами L_a. Поэтому коммутатор операторов L_a и p_f сводится к действию оператора L_a на матрицу $D^{-1}(a)$. В силу дифференциальных уравнений для $D(a)$ (39) коммутатор операторов L_a и операторов p_f в новом представлении совпадает с коммутатором операторов p_f и Z_a, определяемым соотношением (53).

Таким образом, в случае взаимодействия скалярной частицы с полем, т.е. в случае инвариантности гамильтониана системы относительно преобразований (60), (61) оператор полного обобщенного импульса системы Z_a сводится после преобразований (60), (61) к оператору L_a.

В силу инвариантности гамильтониана системы относительно группы преобразований T_a (49), (50) матрицы $D(a)$ выпадают из гамильтониана и переменные a^α входят в преобразованный гамильтониан лишь в комбинации $\bar{L}_a$. Используя соотношения (19), (39), (73) и (76), легко показать, что

$$\bar{L}_a D(a) = -D(a) J_a \,, \tag{90}$$

поэтому, представляя волновую функцию системы в виде

$$\Psi(a, \lambda, Q) = D(a)\, \Phi(\lambda, Q), \tag{91}$$

можно устранить из гамильтониана переменные a^α. В результате подстановки (91) получается уравнение для функции $\Phi(\lambda, Q)$, зависящей от переменных, безразличных к преобразованиям группы T_a. Вопрос о разделении переменных частицы и поля после этого никак не связан с вопросом симметрии гамильтониана.

Рассмотрим случай частицы с внутренними степенями свободы, когда преобразование (60), (61) приводит к преобразованию гамильтониана (55). После преобразования (60), (61) оператор обобщенного импульса Z_a (57) сводится к оператору

$$Z_a = L_a + J_a^{(\ell)}, \tag{92}$$

где $J_a^{(\ell)}$ – генератор некоторой неприводимой части представления (37). В силу дифференциальных уравнения (39) справедливо соотношение

$$D^{(\ell)}(a^{-1})\, L_a D^{(\ell)}(a) = L_a - D^{(\ell)}(a^{-1})\, J_a^{(\ell)} D^{(\ell)}(a) \,, \tag{93}$$

поэтому дополнительным каноническим преобразованием, порождаемым преобразованием волновой функции системы, действуюшим на внутренние переменные частицы σ :

$$\Psi(a,\lambda,Q,\sigma) = D^{(\ell)}_{\sigma\sigma'}(a)\,\Phi(a,\lambda,\sigma',Q)\,, \tag{94}$$

оператор полного обобщенного импульса системы Z_a сводится к оператору L_a . Комплексные координаты поля q_f инвариантны относительно преобразования (94), а оператор импульса P_f переходит под действием этого преобразования в оператор

$$p_f = D^{-1}_{f'f}(a)\,\{\frac{1}{\epsilon}P_{f'} + \tilde{N}^{\gamma}_{f'}(Q_\ell J'_{\gamma\ell\ell'}P_{\ell'} + iJ^{(\ell)}_{\gamma} - i\bar{\xi}^{i}_{\gamma}\frac{\partial}{\partial\lambda^{i}})\}\,. \tag{95}$$

Совместные преобразования (60), (61), (94) не изменяют перестановочных соотношений x^i, q_f , p_f с операторами L_a , совпадающих с коммутаторами этих величин с операторами Z_a (52-54). Кроме того, перестановочные соотношения операторов

$$D^{(\ell)-1}(a)\,J^{(\ell)}_a\,D^{(\ell)}(a) \tag{96}$$

и операторов L_a в силу уравнений (75) совпадают с перестановочными соотношениями операторов Z_a и $J^{(\ell)}_a$. Таким образом, оператор после преобразования (60), (61), (94) L_a действительно становится оператором полного обобщенного импульса. После применения этого преобразования подстановка в качестве волновой функции выражения (91) снова устраняет из гамильтониана переменные a^γ .

Волновая функция системы вида (91) реализует представление группы G , то же самое справедливо и в случае частицы с внутренними степенями свободы. Совместное применение преобразований (91) и (94) также сводит волновую функцию системы к суперпозиции неприводимых представлений группы G . Чтобы убедиться в этом, надо разложить тензорное произведение представлений на неприводимые, чего мы делать не будем.

5. Заключение

Выше было показано, что применение преобразования Н.Н. Боголюбова позволяет выделить из переменных системы переменные, связанные с группой симметрии системы, и обеспечивает выполнение требуемых законов сохранения. Остановимся на физическом смысле этого преобразования, постаравшись показать прежде всего его физическую наглядность. Преобразование (60) можно толковать как разбиение координат частицы на две части. Переменные λ^i описывают движение частицы внутри потенциальной ямы, создаваемой полем, а переменные a^a – движение потенциальной ямы. Напомним одну особенность такого разбиения, особо подчеркнутую еще в /1/: если при анализе инвариантности гамильтониана системы относительно преобразований (49), (50) речь идет о фиксированных, внешних для системы параметрах, то в случае преобразований (60), (61) эти параметры рассматриваются как переменные системы. Если перейти в гайзенберговское представление и рассмотреть операторы, зависящие от времени, $a^a(t)$, то можно убедиться, что уравнения движения для этих операторов таковы, что их интегралы ни в коей мере не совпадают с геодезическими линиями группы G, если последняя рассматривается как риманово пространство /3/. Таким образом, движение потенциальной ямы не является равномерным движением в смысле группы G. Преобразование Н.Н. Боголюбова приводит к точному учету законов сохранения, что выражается, в частности, зависимостью операторов $a^a(t)$ от времени: в силу обмена квантовыми числами между частицей и полем движение частицы в поле не может быть равномерным. Остановимся на преобразовании операторов поля (61). Это преобразование выделяет из операторов поля c – числовую часть, которая после предварительного преобразования (59) имеет нулевой порядок по малому параметру ϵ. После выделения из переменных поля зависимости от переменных a^a приходим к переменным Q_l, которые так же, как и переменные λ^i безразличны к преобразованиям группы. Эти новые переменные вводятся с малым параметром, что соответствует наглядному представлению о природе сильного взаимодействия. Основной эффект этого взаимодействия заключается в приготовлении потенциальной ямы для частицы, т.е. выделении из операторов поля некоторой усредненной части u_l. Каков смысл дополнительных условий (65)? Поскольку взаимодействие частицы с полем состоит в излучении и поглощении квантов поля, стационарное состояние не может быть состоянием с определенным числом бозонов. Простейшая наглядная картина стационарного состояния такой системы – частица, окруженная некоррелированным облаком виртуальных скалярных квантов, т.е. состояние частица + когерентное состояние скалярного поля /3/. Переход к когерентному представлению соответствует выделению из операторов рождения и уничтожения c-чисел. Однако такой выбор стационарного состояния соответствует предположению о том, что излучение и поглощение скалярных квантов не изменяет состояния частицы, т.е. частица движется равномерно в смысле группы G. Преобразование (61) с дополнительным условием (65) позволяет совместить наглядную картину виртуального облака с требованием точного выполнения законов сохранения: из операторов поля выделяется классическая часть, порождающая потенциальную яму, а виртуальное облако скалярных квантов деформируется так, что эта яма может перемещаться в соответствии с законами сохранения и динамики взаимодействия. Введение в преобразования (59), (61) больших и малых параметров, выражающихся через постоянную связи и характерную частоту поля /1,2/, приводит к возможности разделения переменных λ^i и Q_l в первом приближении. Одновременно это преобразование сохраняет присущее сильному взаимодействию свойство: в гамильтониане системы наибольший порядок по постоянной связи имеют слагаемые, линейные по переменным поля Q_f. Условие регулярности волновой функции требует тождественного обращения в нуль этих слагаемых, что позволяет найти числа u_f и определить в первом приближении основное состояние частицы в поле /1/. Дальнейшее уточнение волновых функций и энергий стационарных состояний можно получить итерациями по малому параметру /1/.

Заметим, что формулы (83), (84), определяющие производные переменных a^a по переменным поля q_f, показывают, как можно сузить группу преобразований G на некоторую ее подгруппу. В этом случае производные соответствующих параметров равны нулю, т.е. равны нулю и соответствующие коэффициенты $\tilde{N}^a_f$. Разрешая уравнения (84) относительно N_{af}, найдем, что соответствующие N_{af} также равны нулю. В этом случае автоматически уменьшается число дополнительных условий (65), налагаемых на переменные Q_f. Следует также указать, что характер дополнительных условий в силу возможности представления операторов Q_f в виде проекции независимых переменных Z_f (70) зависит также и от вида матрицы M_{fa}, определяющей проекционную матрицу $A_{ff'}$. В силу выбора M_{fa} в виде суперпозиции коэффициентов (79) дополнительные условия для Q_f определяются в конечном итоге свойствами гамильтониана взаимодействия. Таким образом, причиной деформации облака виртуальных квантов действительно является взаимодействие частицы с полем. Это обстоятельство показывает, что иногда удобно модифицировать преобразование переменных поля (61).

В гамильтонианах типа гамильтонианов с фиксированным источником взаимодействие обычно содержит лишь некоторые операторы b_f, b^+_f, связанные с определенным неприводимым представлением группы

C . В этом случае основное состояние системы таково, что коэффициенты u_f , не связанные с этим представлением, равны нулю, т.е. дополнительные условия налагаются лишь на те операторы, которые действительно участвуют во взаимодействии. В этом случае удобно выделить из переменных q_f такие независимые переменные, чтобы записать гамильтониан взаимодействия только в терминах последних. Преобразование такого рода рассматривалось в 1950 г. в работе Б.М. Степанова при описании взаимодействия заряженного скалярного поля с фиксированным источником. Использованный автором метод более прост, чем традиционные методы решения подобных задач /6,7/.

Применение описанного здесь преобразования к более сложным группам, чем группа трансляций , изучавшаяся в работах /1-4/, будет изложено в последующих статьях.

Авторы выражают глубокую признательность Н.Н. Боголюбову за постоянный интерес и многочисленные обсуждения затронутых здесь вопросов. Весьма плодотворными были дискуссии с А.А. Логуновым, Б.А. Арбузовым, В.Д. Кукиным, М.А. Марковым, Р.М. Мурадяном, В.А. Матвеевым, Л.Д. Соловьевым, Д.В. Ширковым.

Авторы приносят им свою благодарность.

Литература

1. Н.Н. Боголюбов. Украинский математический журнал 2, 3 (1950), см. также Избранные труды, т. 2, Киев (1970).
2. С.В. Тябликов. ЖЭТФ, 21, 377 (1956).
3. Е.П. Солодовникова, А.Н. Тавхелидзе, О.А. Хрусталев. ТМФ, 8, 256, (1971).
4. Е. П. Солодовникова, А.Н. Тавхелидзе, О.А. Хрусталев. Препринт ОИЯИ, Е2-5976 (1971).
5. Л.П. Эйзенхарт. Непрерывные группы преобразований, Москва, ИЛ, Москва, ИЛ, 1947.

6. G. Wentzel. Helv.Phys.Acta, 13, 269 (1940).
7. W. Pauli, S.M. Dancoff. Phys.Rev., 62, 85 (1942).

Рукопись поступила в издательский отдел
15 ноября 1971 года.