ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна



Р2 - 6109

Н.А.Черников, Н.С.Шавохина

# ПРИНЦИПЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ СПИНОРНОГО ПОЛЯ В РИМАНОВЫХ МИРАХ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1971

Р2 - 6109

Н.А.Черников, Н.С.Шавохина

# ПРИНЦИПЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ СПИНОРНОГО ПОЛЯ В РИМАНОВЫХ МИРАХ

*Направлено в* ***Annales de l'Institut Henri Poincaré,***

Задача квантования полей в римановых мирах была поставлена и в основном решена в работе [1] на примере скалярного поля. Здесь эта задача уточняется и решается в значительно более сложном случае спинорного поля. В настоящей работе мы широко пользуемся результатами В.А.Фока, который первым сформулировал уравнение Дирака в римановых мирах [2].

## §I. Уравнение Дирака в форме Картана

Следуя Э.Картану [3], мы будем записывать уравнение Дирака в виде

$$\left( i\hbar \sum_{\nu=0}^{3} H^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} + mc H^{4} \right) \psi = 0, \tag{I}$$

где $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ – декартовы координаты в мире Минковского, $m$ – масса электрона-позитрона, $c$ – скорость света, $\hbar$ – постоянная Планка. Матрицы $H$ равны

$$H^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H^4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Чтобы перейти к оригинальной форме уравнений Дирака, надо сделать следующую подстановку компонент спинора:

$$\psi_1 = \frac{\psi_2' - \psi_4'}{\sqrt{2}}, \quad \psi_2 = \frac{\psi_1' - \psi_3'}{\sqrt{2}}, \quad \psi_3 = \frac{\psi_1' + \psi_3'}{\sqrt{2}}, \quad \psi_4 = \frac{-\psi_2' - \psi_4'}{\sqrt{2}}.$$

Матрицы $H$ порождают алгебру Клиффорда, поскольку

$$H^a H^b + H^b H^a = 2\eta^{ab}, \tag{3}$$

где $\eta^{ab} = 0$ при $a \neq b$, $\eta^{11} = \eta^{22} = \eta^{33} = \eta^{44} = -\eta^{00} = 1.$

С помощью тензора $\eta^{ab}$ и обратного тензора $\eta_{ab} = \eta^{ab}$ мы будем поднимать и опускать индексы. Например, $H_a = \eta_{ab} H^b$, $H^a = \eta^{ab} H_b$.

Индексы, принимающие значения от 0 до 4, мы будем и дальше обозначать буквами латинского алфавита, а индексы, принимающие значения от 0 до 3 – буквами греческого алфавита. Знак суммы по повторяющимся индексам будем опускать, подразумевая, что суммирование ведется в пределах, указываемых самим сортом индексов, например:

$$\sum_{\nu=0}^{3} H^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} = H^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \quad \sum_{b=0}^{4} \eta_{ab} H^b = \eta_{ab} H^b.$$

Смысл тензоров $\eta_{\alpha\beta}$ и $\eta_{ab}$ очевиден: $\eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$ – метрическая форма четырехмерного, а $\eta_{ab}\, dx^a dx^b$ – метрическая форма пятимерного мира Пуанкаре-Минковского. Полагая $\Psi = \psi\, e^{-\frac{imc}{\hbar} x_4}$, можем записать уравнение (I) в виде:

$$H^{a}\frac{\partial}{\partial x^{a}}\Psi=0. \tag{4}$$

Наряду с (3), для матриц $H$ имеем

$$H_0 H_1 H_2 H_3 H_4 = i\ . \tag{5}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{5!}\varepsilon_{abcpq}H^{a}H^{b}H^{c}H^{p}H^{q}=-i\ ,\quad \frac{1}{4!}\varepsilon_{abcpq}H^{b}H^{c}H^{p}H^{q}=-iH_{a}\,,$$

$$\frac{1}{3!}\varepsilon_{abcpq}H^{c}H^{p}H^{q}=i[H_{a}H_{b}],\quad \frac{1}{2!}\varepsilon_{abcpq}H^{p}H^{q}=i[H_{a}H_{b}H_{c}] \tag{6}$$

$$\varepsilon_{abcpq}H^{q}=-i[H_{a}H_{b}H_{c}H_{p}],\quad \varepsilon_{abcpq}=-i[H_{a}H_{b}H_{c}H_{p}H_{q}],$$

где квадратные скобки означают альтернированное произведение матриц, $\varepsilon_{abcpq}$ — полностью антисимметричный тензор, $\varepsilon_{01234}=1$. В частности,

$$\frac{1}{4!}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}H^{\alpha}H^{\beta}H^{\mu}H^{\nu}=-iH_{4}\,,$$

$$\frac{1}{3!}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}H^{\beta}H^{\mu}H^{\nu}=iH_{4}H_{\alpha}\,,\quad \frac{1}{2!}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}H^{\mu}H^{\nu}=iH_{4}[H_{\alpha}H_{\beta}], \tag{7}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}H^{\nu}=-iH_{4}[H_{\alpha}H_{\beta}H_{\mu}],\quad \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}=-iH_{4}[H_{\alpha}H_{\beta}H_{\mu}H_{\nu}],$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ — полностью антисимметричный тензор, $\varepsilon_{0123}=1$.

## §2. Ортогональный репер в римановом мире

Риманов мир характеризуется метрической формой $ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$, где $g_{\alpha\beta}$ – произвольные функции координат $x^\alpha$. С помощью некоторых линейных дифференциальных форм

$$f^\alpha = f^\alpha_\beta\, dx^\beta \tag{8}$$

метрическую форму можно привести к диагональному виду $ds^2 = \eta_{\alpha\beta} f^\alpha f^\beta$. Разрешая уравнение (8) относительно $dx^\alpha$, имеем

$$dx^\alpha = \tilde{f}^\alpha_\beta f^\beta, \tag{9}$$

где $f^\alpha_\gamma \tilde{f}^\gamma_\beta = \delta^\alpha_\beta$ и, следовательно, $\tilde{f}^\alpha_\gamma f^\gamma_\beta = \delta^\alpha_\beta$. Дуальный к $f^\alpha$ базис состоит из векторных полей

$$e_\alpha = \tilde{f}^\beta_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta}. \tag{10}$$

Имеем также

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = f^\beta_\alpha e_\beta. \tag{11}$$

Любое векторное поле можно задать как в координатном базисе $\frac{\partial}{\partial x}$, так и в базисе $e$ : $A^\alpha e_\alpha = a^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, откуда $A^\alpha = a^\beta f^\alpha_\beta$, $a^\alpha = A^\beta \tilde{f}^\alpha_\beta$. Ковекторное поле ( линейная форма) аналогично задается как в координатном базисе $dx$, так и в базисе $f$ : $A_\alpha f^\alpha = a_\alpha dx^\alpha$, откуда $A_\alpha = a_\beta \tilde{f}^\beta_\alpha$, $a_\alpha = A_\beta f^\beta_\alpha$.

Ковариантный дифференциал векторного поля равен

$$\mathcal{D} A^{\alpha} = dA^{\alpha} + \omega^{\alpha}_{\mu} A^{\mu}, \tag{12}$$

а ковариантный дифференциал ковекторного поля равен

$$\mathcal{D} A_{\alpha} = dA_{\alpha} - \omega^{\mu}_{\alpha} A_{\mu}, \tag{13}$$

где $\omega^{\alpha}_{\mu}$ – линейные дифференциальные формы, равные $\omega^{\alpha}_{\mu} = \omega^{\alpha}_{\beta\mu} f^{\beta}$. Коэффициенты $\omega^{\alpha}_{\beta\mu}$ этих форм называются коэффициентами связности. Отсюда получаются ковариантные производные

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\beta} A^{\alpha} &= e_{\beta} A^{\alpha} + \omega^{\alpha}_{\beta\mu} A^{\mu}, \\ \mathcal{D}_{\beta} A_{\alpha} &= e_{\beta} A_{\alpha} - \omega^{\mu}_{\beta\alpha} A_{\mu}, \end{aligned} \tag{14}$$

что позволяет написать ковариантную производную любого тензора. Например, для тензоров с компонентами $A^{\alpha\beta}$, $A^{\alpha}_{\beta}$ и $A_{\alpha\beta}$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\gamma} A^{\alpha\beta} &= e_{\gamma} A^{\alpha\beta} + \omega^{\alpha}_{\gamma\mu} A^{\mu\beta} + \omega^{\beta}_{\gamma\mu} A^{\alpha\mu}, \\ \mathcal{D}_{\gamma} A^{\alpha}_{\beta} &= e_{\gamma} A^{\alpha}_{\beta} + \omega^{\alpha}_{\gamma\mu} A^{\mu}_{\beta} - \omega^{\mu}_{\gamma\beta} A^{\alpha}_{\mu}, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\mathcal{D}_{\gamma} A_{\alpha\beta} = e_{\gamma} A_{\alpha\beta} - \omega^{\mu}_{\gamma\alpha} A_{\mu\beta} - \omega^{\mu}_{\gamma\beta} A_{\alpha\mu}.$$

Из последней формулы получается важное следствие

$$\mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}_\beta A_\gamma - \mathcal{D}_\beta \mathcal{D}_\alpha A_\gamma = R^{\nu}_{\gamma,\alpha\beta} A_\nu , \tag{16}$$

где

$$R^{\nu}_{\gamma,\alpha\beta} = e_\beta \omega^{\nu}_{\alpha\gamma} - e_\alpha \omega^{\nu}_{\beta\gamma} + c^{\mu}_{\alpha\beta}\omega^{\nu}_{\mu\gamma} + \omega^{\mu}_{\alpha\gamma}\omega^{\nu}_{\beta\mu} - \omega^{\mu}_{\beta\gamma}\omega^{\nu}_{\alpha\mu} - \tag{17}$$

— компоненты тензора Римана-Кристоффеля в базисе $e, f$.

Коэффициенты связности находятся из двух условий. Первое из них - отсутствие кручения. Для скалярной функции $\varphi$ это означает $\mathcal{D}_\alpha e_\beta \varphi = \mathcal{D}_\beta e_\alpha \varphi$. Отсюда следует уравнение для коэффициентов связности

$$\omega^{\gamma}_{\alpha\beta} - \omega^{\gamma}_{\beta\alpha} = c^{\gamma}_{\alpha\beta} , \tag{18}$$

где коэффициенты $c^{\gamma}_{\alpha\beta}$ определяются операцией Ли

$$e_\alpha e_\beta - e_\beta e_\alpha = c^{\gamma}_{\alpha\beta} e_\gamma \tag{19}$$

и, следовательно, равны

$$c^{\gamma}_{\alpha\beta} = \tilde{f}^{\mu}_{\alpha} \tilde{f}^{\nu}_{\beta} \left( \frac{\partial f^{\gamma}_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial f^{\gamma}_{\nu}}{\partial x^{\mu}} \right) = \tilde{f}^{\mu}_{\alpha} e_\beta f^{\gamma}_{\mu} - \tilde{f}^{\mu}_{\beta} e_\alpha f^{\gamma}_{\mu} . \tag{20}$$

Второе условие, определяющее коэффициенты связности - сохранение метрического тензора при параллельном переносе. Это значит, что равна нулю ковариантная производная $\mathcal{D}_\alpha \eta_{\beta\gamma}$. Так как $e_\alpha \eta_{\beta\gamma} = 0$, то, согласно (15), получаем еще одно уравнение для коэффициентов связности, а именно:

$$\omega^{\mu}_{\alpha\beta} \eta_{\mu\gamma} + \omega^{\mu}_{\alpha\gamma} \eta_{\beta\mu} = 0 . \tag{21}$$

Обозначая

$$\omega_{\nu\beta\alpha} = \eta_{\nu\mu}\,\omega^{\mu}_{\alpha\beta} \;, \qquad c_{\alpha\beta\mu} = c^{\gamma}_{\alpha\beta}\,\eta_{\gamma\mu} \;, \tag{22}$$

из (I8) и (2I) получаем

$$\omega_{\nu\beta\alpha} - \omega_{\nu\alpha\beta} = c_{\alpha\beta\nu} \;, \qquad \omega_{\nu\beta\alpha} + \omega_{\beta\nu\alpha} = 0 \,. \tag{23}$$

Подставляя (23) в тождество

$$\omega_{\nu\beta\alpha} = \frac{1}{2}\,(\omega_{\nu\beta\alpha} + \omega_{\beta\nu\alpha}) + \frac{1}{2}\,(\omega_{\alpha\nu\beta} + \omega_{\nu\alpha\beta}) - \frac{1}{2}(\omega_{\alpha\beta\nu} + \omega_{\beta\alpha\nu})$$
$$+ \frac{1}{2}\,(\omega_{\alpha\beta\nu} - \omega_{\alpha\nu\beta}) + \frac{1}{2}\,(\omega_{\nu\beta\alpha} - \omega_{\nu\alpha\beta}) - \frac{1}{2}(\omega_{\beta\nu\alpha} - \omega_{\beta\alpha\nu}),$$

находим

$$\omega_{\nu\beta\alpha} = \frac{1}{2}\,(c_{\nu\beta\alpha} + c_{\alpha\beta\nu} - c_{\alpha\nu\beta}) \,. \tag{24}$$

Подобно метрическому тензору, матрицы $H$ при параллельном переносе не меняются. Это значит, что их ковариантные производные равны нулю. Для матрицы $A = A_\alpha H^\alpha$ имеем

$$\mathcal{D}A = dA + \omega^{\alpha}_{\mu}\, A^{\mu} H_{\alpha} = dA + \Omega A - A\Omega, \tag{25}$$

где

$$\Omega = \frac{1}{4}\; \omega_{\alpha\mu\nu}\, f^{\nu} H^{\alpha} H^{\mu} \,. \tag{26}$$

Так как для матрицы $A$ ( с точностью до бесконечно малых высшего порядка)

$$\mathcal{D}A - dA + A = (1 + \Omega)\, A\, (1 + \Omega)^{-1},$$

то для спинора должно быть

$$\mathcal{D}\psi - d\psi + \psi = (1+\Omega)\psi \ .$$

Следовательно, ковариантный дифференциал спинора равен

$$\mathcal{D}\psi = d\psi + \frac{1}{4}\,\omega_{\alpha\mu\nu}\,f^{\nu} H^{\alpha} H^{\mu}\psi, \tag{27}$$

а ковариантная производная спинора равна

$$\mathcal{D}_{\nu}\psi = e_{\nu}\psi + \frac{1}{4}\,\omega_{\alpha\mu\nu}\,H^{\alpha}H^{\mu}\psi . \tag{28}$$

Ковариантная производная дираковски-сопряженного спинора $\bar{\psi} = \psi^{*} H_{0}$ равна

$$\mathcal{D}_{\nu}\bar{\psi} = e_{\nu}\bar{\psi} - \bar{\psi}\,\frac{1}{4}\,\omega_{\alpha\mu\nu}\,H^{\alpha}H^{\mu}. \tag{29}$$

Встречаются объекты, имеющие и спинорный и тензорный характер. Правила (I4), (28) и (29) позволяют находить их ковариантные производные. Например, спинорный и векторный характер имеет ковариантная производная спинора. Вторая ковариантная спинора равна

$$\mathcal{D}_{\gamma}\mathcal{D}_{\nu}\psi = e_{\gamma}\,\mathcal{D}_{\nu}\psi + \frac{1}{4}\,\omega_{\alpha\mu\gamma}\,H^{\alpha}H^{\mu}\mathcal{D}_{\nu}\psi - \omega^{\mu}_{\gamma\nu}\,\mathcal{D}_{\mu}\psi . \tag{30}$$

Как и для вектора, альтернированная вторая ковариантная спинора не содержит его производных и выражается через тензор Римана-Кристоффеля:

$$\mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}_\beta \Psi - \mathcal{D}_\beta \mathcal{D}_\alpha \Psi = \frac{1}{4} H^\mu H^\nu R_{\mu\nu,\alpha\beta} \Psi , \qquad (31)$$

где

$$R_{\mu\nu,\alpha\beta} = \eta_{\nu\sigma} R^{\sigma}_{\mu,\alpha\beta} . \qquad (32)$$

Для доказательства формулы (31) надо воспользоваться соотношением

$$\frac{1}{2} \left\{ [H^\alpha H^\beta][H^\mu H^\nu] - [H^\mu H^\nu][H^\alpha H^\beta] \right\} =$$
$$= \eta^{\mu\beta} [H^\alpha H^\nu] - \eta^{\alpha\mu} [H^\beta H^\nu] + \eta^{\nu\beta} [H^\mu H^\alpha] - \eta^{\nu\alpha} [H^\mu H^\beta] . \qquad (33)$$

## 3. Уравнение Дирака в римановом мире

Уравнение Дирака в римановом мире получается из (I) заменой $\frac{\partial \psi}{\partial x^\nu}$ на $\mathcal{D}_\nu \psi$:

$$H^\nu \mathcal{D}_\nu \psi = \frac{imc}{\hbar} H^4 \psi . \qquad (34)$$

Как и в плоском случае, это уравнение можно записать в сопряженном виде

$$\mathcal{D}_\nu \bar{\psi} H^\nu = - \frac{imc}{\hbar} \bar{\psi} H^4 . \qquad (35)$$

Так называемое квадрирование уравнения Дирака достигается следующим приемом. Имеем

$$\left( H^{\alpha} \mathcal{D}_{\alpha} - \frac{imc}{\hbar} H^{4} \right)\left( H^{\beta} \mathcal{D}_{\beta} - \frac{imc}{\hbar} H^{4} \right) = H^{\alpha} H^{\beta} \mathcal{D}_{\alpha} \mathcal{D}_{\beta} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}$$

и, далее,

$$H^{\alpha} H^{\beta} \mathcal{D}_{\alpha} \mathcal{D}_{\beta} = H^{\alpha} H^{\beta} \; \frac{\mathcal{D}_{\alpha} \mathcal{D}_{\beta} + \mathcal{D}_{\beta} \mathcal{D}_{\alpha}}{2} + H^{\alpha} H^{\beta} \; \frac{\mathcal{D}_{\alpha} \mathcal{D}_{\beta} - \mathcal{D}_{\beta} \mathcal{D}_{\alpha}}{2}.$$

Первое слагаемое в последнем выражении равно

$$H^{\alpha} H^{\beta} \; \frac{\mathcal{D}_{\alpha} \mathcal{D}_{\beta} + \mathcal{D}_{\beta} \mathcal{D}_{\alpha}}{2} = \frac{H^{\alpha} H^{\beta} + H^{\beta} H^{\alpha}}{2} \; \frac{\mathcal{D}_{\alpha} \mathcal{D}_{\beta} + \mathcal{D}_{\beta} \mathcal{D}_{\alpha}}{2} = \eta^{\alpha\beta} \mathcal{D}_{\alpha} \mathcal{D}_{\beta}.$$

Второе слагаемое, согласно (3I), равно

$$H^{\alpha} H^{\beta} \; \frac{\mathcal{D}_{\alpha} \mathcal{D}_{\beta} - \mathcal{D}_{\beta} \mathcal{D}_{\alpha}}{2} = \frac{1}{8} \; H^{\alpha} H^{\beta} H^{\mu} H^{\nu} R_{\mu\nu,\alpha\beta} \; .$$

Так как

$$H^{\alpha} H^{\beta} H^{\mu} = [ H^{\alpha} H^{\beta} H^{\mu} ] + \eta^{\beta\mu} H^{\alpha} + \eta^{\beta\alpha} H^{\mu} - \eta^{\alpha\mu} H^{\beta} \tag{36}$$

и так как альтернация тензора Римана-Кристоффеля по трем значкам дает нуль, то

$$H^{\alpha} H^{\beta} \; \frac{\mathcal{D}_{\alpha} \mathcal{D}_{\beta} - \mathcal{D}_{\beta} \mathcal{D}_{\alpha}}{2} = \frac{1}{4} \, H^{\alpha} H^{\nu} \eta^{\beta\mu} R_{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{4} \, H^{\alpha} H^{\nu} R_{\nu\alpha} = \frac{1}{4} R.$$

Тем самым мы получили квадрированное уравнение Дирака

$$\left( \eta^{\alpha\beta} \mathcal{D}_{\alpha} \mathcal{D}_{\beta} + \frac{1}{4} R - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0 \, . \tag{37}$$

В общем случае эта система уравнений второго порядка отнюдь не распадается на четыре отдельных уравнения для каждой компоненты спинора.

Уравнение Дирака заметно упрощается в случае ортогональных координат ( если таковые имеются), когда можно построить базис Ламэ, т.е. положить $f_\beta^{\ \alpha} = h^\alpha \delta_\beta^{\ \alpha}$. прибегая к формуле (36), получаем

$$\frac{1}{4}\omega_{\alpha\mu\nu} H^\nu H^\alpha H^\mu = \frac{1}{4}\omega_{[\alpha\mu\nu]} H^\nu H^\alpha H^\mu + \frac{1}{2}\eta^{\alpha\nu}\omega_{\alpha\mu\nu} H^\mu .$$

Так как

$$\omega_{[\alpha\mu\nu]} = \frac{1}{2} C_{[\alpha\mu\nu]} , \qquad \eta^{\alpha\nu}\omega_{\alpha\mu\nu} = C^{\ \alpha}_{\alpha\mu} ,$$

а в базисе Ламэ

$$C^{\ \gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{h^\alpha h^\beta}\left[\delta_\alpha^{\ \gamma}\frac{\partial h^\gamma}{\partial x^\beta} - \delta_\beta^{\ \gamma}\frac{\partial h^\gamma}{\partial x^\alpha}\right]$$

и, следовательно,

$$C_{[\alpha\mu\nu]} = 0 , \qquad \frac{1}{2} C^{\ \alpha}_{\alpha\mu} = \frac{1}{\sqrt{h h^\mu}} \frac{\partial}{\partial x^\mu}\sqrt{\frac{h}{h^\mu}} ,$$

где $h = h^0 h^1 h^2 h^3$ , то в базисе Ламэ

$$\frac{1}{4}\omega_{\alpha\mu\nu} H^\nu H^\alpha H^\mu = \sum_{\mu=0}^{3} \frac{H^\mu}{\sqrt{h h^\mu}} \frac{\partial}{\partial x^\mu}\sqrt{\frac{h}{h^\mu}} .$$

В базисе Ламэ уравнение (34) записывается,таким образом, в виде

$$\sum_{\mu=0}^{3} \frac{H^\mu}{\sqrt{h h^\mu}} \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{\frac{h}{h^\mu}}\,\psi\right) = \frac{imc}{\hbar} H^4 \psi , \qquad (38)$$

а уравнение (35) - в виде

$$\sum_{\mu=0}^{3} \frac{1}{\sqrt{h h^\mu}} \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{\frac{h}{h^\mu}}\,\bar\psi\right) H^\mu = -\frac{imc}{\hbar}\bar\psi H^4 . \qquad (39)$$

## 4. Антикоммутатор спинорного поля

Стремясь сохранить основные понятия квантовой теории поля, мы будем рассматривать только такие римановы миры, которые допускают пространственно-подобные гиперповерхности, разделяющие мир на две части. Одна из отделяющихся частей мира может служить образом прошедшего, другая - образом будущего, сама же разделяющая мир гиперповерхность - образом настоящего. Такие гиперповерхности мы будем называть полными. Будем предполагать, что решение уравнения Дирака во всем пространственно-временном мире однозначно задается значениями спинорного поля на полной гиперповерхности. На самой же гиперповерхности спинорное поле может быть задано произвольно.

Рассмотрим теперь систему уравнений, состоящую из уравнения Дирака и сопряженного с ним уравнения

$$H^{\nu}\mathcal{D}_{\nu}u = \frac{imc}{\hbar}H^{4}u\,, \qquad \mathcal{D}_{\nu}\bar{v}H^{\nu} = -\frac{imc}{\hbar}\bar{v}H^{4}. \tag{40}$$

Пусть $u, \bar{v}$ — решение этой системы. Дивергенция вектора $S^{\nu} = -\bar{v}H^{\nu}u$, равная $\mathcal{D}_{\nu}S^{\nu} = -\mathcal{D}_{\nu}\bar{v}H^{\nu}u - \bar{v}H^{\nu}\mathcal{D}_{\nu}u$, в силу (40) исчезает. Отсюда следует, что все интегралы

$$\int\limits_{\Sigma} S_{\mu}\,d\sigma^{\mu} = \int\limits_{\Sigma} \begin{vmatrix} q_1^0 & q_1^1 & q_1^2 & q_1^3 \\ q_2^0 & q_2^1 & q_2^2 & q_2^3 \\ q_3^0 & q_3^1 & q_3^2 & q_3^3 \\ S^0 & S^1 & S^2 & S^3 \end{vmatrix} \tag{41}$$

по полным гиперповерхностям равняются друг другу. В интеграле (41) $q_1^\alpha, q_2^\alpha, q_3^\alpha$ — векторы элементарных смещений по гиперповерхности $\Sigma$. Если, например, гиперповерхность задана уравнениями $x^\alpha = T^\alpha(q^1, q^2, q^3)$, то $q_1^\alpha = f_\mu^\alpha \frac{\partial T^\mu}{\partial q^1} dq^1, \ldots$. Иными словами, интеграл (41) равен интегралу от внешней формы [4]

$$\int\limits_\Sigma S_\mu d\sigma^\mu = \int\limits_\Sigma \frac{1}{3!} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\mu} S^\mu f^\alpha \wedge f^\beta \wedge f^\gamma. \tag{42}$$

Согласно (7) интегрируемая здесь форма равна

$$\frac{1}{3!} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\mu} S^\mu f^\alpha \wedge f^\beta \wedge f^\gamma = \frac{i}{3!} \bar{v} H_4 H_\alpha H_\beta H_\gamma u\, f^\alpha \wedge f^\beta \wedge f^\gamma = \frac{i}{3!} \bar{v} H_4\, F \wedge F \wedge F u, \tag{43}$$

где $F = H_\alpha f^\alpha$. Таким образом, интеграл (41) можно записать в виде

$$\int\limits_\Sigma S_\mu d\sigma^\mu = i \int\limits_\Sigma \bar{v} H_4 [Q_1 Q_2 Q_3] u, \tag{44}$$

где $Q_1 = H_\alpha q_1^\alpha$, $Q_2 = H_\alpha q_2^\alpha$, $Q_3 = H_\alpha q_3^\alpha$.

Этот интеграл задает скалярный квадрат в пространстве решений системы уравнений (40).

Спинорное поле квантуется согласно статистике Ферми. Иными словами, требуется, чтобы пара спинорных полей $\psi, \bar{\psi}$ порождала (бесконечномерную) алгебру Клиффорда. Генераторы алгебры $\psi, \bar{\psi}$ на полной гиперповерхности $\Sigma$ линейно независимы.

Рассмотрим следующие векторы из линейной оболочки генераторов алгебры

$$U = i\int_{\Sigma} \bar{\varphi}\, H_4 [Q_1 Q_2 Q_3]\, u \;, \qquad V^{*} = i\int_{\Sigma} \bar{v}\, H_4 [Q_1 Q_2 Q_3]\, \psi . \tag{45}$$

Интегралы (45) так же, как и интеграл (44), не зависят от выбора полной гиперповерхности, поскольку $u, \bar{\varphi}$ и $\psi, \bar{v}$ удовлетворяют системе уравнений (40). Сумма $U + V^{*}$ есть общий элемент оболочки. Подчеркнем, что спинорные поля $u, \bar{v}$ продолжают считаться неквантованными. Полагая

$$(U + V^{*})^2 = i\int_{\Sigma} \bar{v}\, H_4 [Q_1 Q_2 Q_3]\, u \,, \tag{46}$$

мы вводим симметричное скалярное произведение в оболочке генераторов, что и является точным выражением принципа квантования по статистике Ферми.

Так как пары $u, 0$ и $0, \bar{v}$ удовлетворяют системе уравнений (40), то из (46) следует, что

$$U^2 = 0 \;, \qquad V^{*2} = 0, \tag{47}$$

и что, следовательно, антикоммутатор $\{U\, V^{+}\}$ равен

$$\{U\, V^{*}\} = U V^{*} + V^{*} U = i\int_{\Sigma} \bar{v}\, H_4 [Q_1 Q_2 Q_3]\, u \,. \tag{48}$$

Подставляя в (48) выражение (45) для $V^*$, ввиду произвольности $\bar{v}$ на $\Sigma$ получаем, что на $\Sigma$

$$\{\psi(x)\, U\} = u(x)\,. \tag{49}$$

Подставляя же выражение (45) для $U$, получаем, что на $\Sigma$

$$\{V^*\bar{\psi}(x)\} = \bar{v}(x)\,. \tag{50}$$

Так как пара $\psi, \bar{\psi}$ подчиняется системе (40), то и пара $\{\psi U\}, \{V^*\bar{\psi}\}$ подчиняется системе (40). По этой же системе уравнений подчиняется и пара $u, \bar{v}$. Поскольку на $\Sigma$ последние две пары совпадают, то в силу предполагаемой единственности решения задачи Коши для (40) равенства (49) и (50) оказываются справедливыми не только на $\Sigma$, но и во всем пространственно-временном мире. Подобным образом из (47) выводится, что для любой пространственно-временной точки $x$ справедливы равенства

$$\{\psi(x)\, V^*\} = 0\,, \qquad \{U\,\bar{\psi}(x)\} = 0\,. \tag{51}$$

Ввиду произвольности $u, \bar{v}$ на $\Sigma$ из (51) получаем для любой точки $y$, лежащей на $\Sigma$,

$$\{\psi_p(x)\,\psi_q(y)\} = 0\,, \qquad \{\bar{\psi}_q(y), \bar{\psi}_p(x)\} = 0\,, \tag{52}$$

где $p$ и $q$ – номера компонент спиноров $\psi$ и $\bar{\psi}$. В силу единственности решения задачи Коши для (40) равенства (52) оказываются справедливыми и для любой мировой точки $y$.

Обозначим $\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\}$ матрицу с компонентами $\{\psi_p(x)\bar{\psi}_q(y)\}$. Она удовлетворяет следующему алгебраическому условию

$$\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\}H^0 = H_0\,\{\psi(y)\bar{\psi}(x)\}^+, \tag{53}$$

где знаком "+" обозначено эрмитовское сопряжение матрицы. Из (45) и (48) следует, что если через две (разные) мировые точки $x$ и $y$ можно провести полную гиперповерхность, то $\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\}=0$. Записав равенства (49) и (50) в развернутом виде

$$u(x) = i\int_\Sigma \{\psi(x)\bar{\psi}(y)\}H_4[Q_1Q_2Q_3]u(y) \tag{54}$$

$$\bar{v}(x) = i\int_\Sigma \bar{v}(y)\,H_4[Q_1Q_2Q_3]\{\psi(y)\bar{\psi}(x)\},$$

замечаем, что антикоммутатор $\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\}$ дает решение задачи Коши для системы уравнений (40). Поскольку и сам антикоммутатор $\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\}$ удовлетворяет этой системе, то, согласно (54), имеем

$$\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\} = i\int_\Sigma \{\psi(x)\bar{\psi}(z)\}H_4[Q_1Q_2Q_3]\{\psi(z)\bar{\psi}(y)\}. \tag{55}$$

Пусть теперь для некоторой полной гиперповерхности $\Sigma$ и для системы (40) каким-либо методом решена задача Коши:

$$u(x) = i\int_{\Sigma} \bar{S}(x,y)\, H_4[Q_1 Q_2 Q_3]\, u(y),$$
$$\bar{v}(x) = i\int_{\Sigma} \bar{v}(y)\, H_4[Q_1 Q_2 Q_3]\, S(y,x). \tag{56}$$

Сравнивая (56) с (54), замечаем, что $\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\} = \bar{S}(x,y)$, $\{\psi(y)\bar{\psi}(x)\} = S(y,x)$ на прямом произведении $M \times \Sigma$, где $M$ – весь пространственно-временной мир. В соответствии с (53) функции $\bar{S}$ и $S$ связаны условием $\bar{S}(x,y)H^{0} = H_{0}S^{+}(y,x)$.

Согласно (55), находим

$$\{\psi(x)\psi(y)\} = i\int_{\Sigma} \bar{S}(x,z)\, H_4[Q_1 Q_2 Q_3]\, S(z,y) \tag{57}$$

на $M \times M$.

Заметим, что если пара $(u,\bar{v})$ является решением системы (40), то и пара $(u,\bar{v})^{*} = (v,\bar{u})$ тоже является решением системы (40). Решение назовем действительным, если $(u,\bar{v})^{*} = (u,\bar{v})$, т.е. $u = v$. Элемент $U + U^{*}$ оболочки генераторов, соответствующий действительному решению, называется действительным или эрмитовским.

## 5. Коммутатор скалярного поля

Интересно сравнить спинорный случай со скалярным. Вероятно, что требование единственности решения задачи Коши для системы уравнений (40) совпадает с требованием единственности решения задачи Коши для скалярного уравнения

$$\eta^{\alpha\beta}\mathcal{D}_\alpha\mathcal{D}_\beta\phi+\frac{R}{6}\phi=\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\phi, \tag{58}$$

рассмотренного в работе /1/. Пусть $u, v$ – два решения этого уравнения. Тогда дивергенция вектора $S_\mu=(u\mathcal{D}_\mu v-v\mathcal{D}_\mu u)$ равняется нулю, и отсюда следует, что все интегралы (42) по полным гиперповерхностям равняются друг другу. Их общее значение задает антисимметричное скалярное произведение в пространстве решений уравнения (58). Скалярное поле $\phi$ квантуется согласно статистике Бозе. Это означает, что значения поля $\phi$ на полной гиперповерхности $\Sigma$ и значения его нормальной к $\Sigma$ производной рассматриваются как генераторы алгебры, являющейся бесконечномерным аналогом алгебры квантовой механики. Общий элемент линейной оболочки генераторов имеет следующий вид

$$U=\int_\Sigma(u\phi_\mu-\phi u_\mu)d\sigma^\mu, \tag{59}$$

где $\phi_\mu=\mathcal{D}_\mu\phi$, $u_\mu=\mathcal{D}_\mu u$. Интеграл (59) не зависит от выбора полной гиперповерхности, поскольку $u$ и $\phi$ удовлетворяют уравнению (58). Скалярное поле $u$ продолжает считаться неквантованным. Полагая для любых двух элементов $U, V$ типа (59)

$$\langle UV\rangle=UV-VU=i\hbar\int_\Sigma(uv_\mu-vu_\mu)d\sigma^\mu, \tag{60}$$

мы вводим антисимметричное скалярное произведение в оболочке генераторов, что и является точным выражением принципа квантования по статистике Бозе.

Если подставить в (60) выражение типа (59) для $V$, то нетрудно заметить следующее. Поскольку функции $v$ и $v_{(n)} = v_\alpha n^\alpha$, где $n^\alpha$ – нормаль к $\Sigma$, могут принимать на $\Sigma$ произвольные значения, то получаем, что на $\Sigma$

$$< \phi(x)\, U > = i\hbar\, u(x), \qquad < \phi_{(n)}(x)\, U > = i\hbar\, u_{(n)}(x).$$

Но вместе с $\phi(x)$ коммутатор $<\phi(x)\, U>$ подчиняется уравнению (59), тому же, что и $u(x)$. Из единственности решения задачи Коши для уравнения (58) следует, что

$$< \phi(x)\, U > = i\hbar\, u(x) \tag{61}$$

для любой мировой точки $x$. Записав это равенство в развернутом виде

$$u(x) = \int\limits_\Sigma [\, \Delta(x,y)\, u_\mu(y) - \Delta_\mu(x,y)\, u(y)] d\sigma^\mu, \tag{62}$$

замечаем, что коммутатор

$$\Delta(x,y) = \frac{i}{\hbar} < \phi(x)\, \phi(y) > = - \Delta(y,x) \tag{63}$$

дает решение задачи Коши для уравнения (58). $\Delta_\mu(x,y)$ означает ковариантную производную от $\Delta(x,y)$ по второму аргументу. Поскольку и сам коммутатор $\Delta(x,y)$ удовлетворяет уравнению (58), согласно (62) имеем

$$\Delta(x,y) = \int\limits_{\Sigma} \left[ \Delta_{\mu}(y,z)\,\Delta(z,x) - \Delta_{\mu}(x,z)\,\Delta(z,y) \right] d\sigma^{\mu} \quad (64)$$

Пусть теперь для некоторой полной гиперповерхности $\Sigma$ и уравнения (58) каким-либо методом решена задача Коши

$$u(x) = \int\limits_{\Sigma} \left[ T(x,y)\,u_{\mu}(y) - T_{\mu}(x,y)\,u(y) \right] d\sigma^{\mu}. \quad (65)$$

Сравнивая (65) с (62), замечаем, что $\Delta(x,y) = T(x,y)$, $\Delta_{\mu}(x,y)n^{\mu} = T_{\mu}(x,y)n^{\mu}$ на $M \times \Sigma$.

Согласно (64) и (63), находим

$$\frac{i}{\hbar}\langle \phi(x)\phi(y) \rangle = \int\limits_{\Sigma} \left[ T_{\mu}(x,z)\,T(y,z) - T_{\mu}(y,z)\,T(x,z) \right] d\sigma^{\mu} \quad (66)$$

на $M \times M$. Условие эрмитовости в рассматриваемом сейчас случае действительного поля $\phi$ формулируется предельно просто: элемент типа (59) называется действительным или эрмитовским, если $u$ – действительное решение уравнения (58).

В случае комплексного скалярного поля $\varphi$ надо рассматривать систему уравнений

$$\eta^{\alpha\beta}\mathcal{D}_{\alpha}\mathcal{D}_{\beta}u + \frac{R}{6}u = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 u, \qquad \eta^{\alpha\beta}\mathcal{D}_{\alpha}\mathcal{D}_{\beta}v^{*} + \frac{R}{6}v^{*} = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 v^{*} \quad (67)$$

и пару $(\varphi, \varphi^{*})$ подчинять этой системе. Общий элемент оболочки генераторов имеет вид $U + V^{*}$, где

$$U = \int\limits_{\Sigma} (u\varphi^{*}_{\mu} - \varphi^{*}u_{\mu})\,d\sigma^{\mu}, \qquad V^{*} = \int\limits_{\Sigma} (v^{*}\varphi_{\mu} - \varphi v^{*}_{\mu})\,d\sigma^{\mu}. \quad (68)$$

Антисимметричное скалярное произведение в оболочке вводится условием

$$< U_1+V_1^*, U_2+V_2^* > = i\hbar \int_\Sigma (u_1 v_{2\mu}^* - v_2^* u_{1\mu} - u_2 v_{1\mu}^* + v_1^* u_{2\mu}) d\sigma^\mu . \tag{69}$$

Отсюда следует, что

$$< U_1 U_2 > = 0 , \quad < V_1^* V_2^* > = 0 \tag{70}$$

и что

$$< U V^* > = i\hbar \int_\Sigma (u v_\mu^* - v^* u_\mu) d\sigma^\mu . \tag{71}$$

Из (70) находим

$$< \varphi(x)\, \varphi(y) > = 0 , \quad < \varphi^*(x)\, \varphi^*(y) > = 0 . \tag{72}$$

Из (71) находим

$$< \varphi(x)\, U > = i\hbar\, u(x) , \quad < \varphi^*(x)\, V^* > = i\hbar\, v^*(x) \tag{73}$$

Расписывая последние два равенства в развернутом виде, получаем решение задачи Коши для системы (67). Но так как эта система является дважды повторенным уравнением (58), то из сравнения с (62) заключаем

$$\frac{i}{\hbar} < \varphi(x)\, \varphi^*(y) > = \frac{i}{\hbar} < \varphi^*(x)\, \varphi(y) > = \frac{i}{\hbar} < \phi(x)\, \phi(y) > = \Delta(x,y). \tag{74}$$

Очевидно, что если пара $(u, v^*)$ удовлетворяет системе (67), то и пара $(u, v^*)^* = (v, u^*)$ удовлетворяет этой же системе. Решение системы (67) назовем действительным, если $(u, v^*)^* = (u, v^*)$, т.е. $u = v$. Элемент $U + U^*$ оболочки генераторов, соответствующий действительному решению, называется действительным или эрмитовским.

## 6. Вектор тока и оператор заряда

Комплексное поле приспособлено для описания заряженных частиц. В скалярном случае вектор тока определяется выражением (71) и равняется

$$J_\mu = \frac{ie}{\hbar}\,(\varphi^*\varphi_\mu - \varphi_\mu^*\,\varphi)\,. \tag{75}$$

Для действительного поля $\phi^* = \phi$, и вектор тока исчезает. В спинорном случае вектор тока определяется выражением (46) и равняется

$$J_\mu = e\,\bar\psi\, H_\mu\, \psi\,. \tag{76}$$

Оператор заряда в обоих случаях задается интегралом

$$\hat e = \int_\Sigma J_\mu\, d\sigma^\mu \tag{77}$$

по полной гиперповерхности $\Sigma$ и не зависит от выбора $\Sigma$, поскольку $\mathcal{D}_\mu J^\mu = 0$. В спинорном случае интеграл (77) можно преобразовать к виду

$$\hat e = -ie\int_\Sigma \bar\psi\, H_4\,[Q_1 Q_2 Q_3]\,\psi\,. \tag{78}$$

В формулах (76) и (78) $e$ - электрический заряд позитрона, в формуле (75) $e$ - электрический заряд мезона.

## 7. Оператор момента импульса

Векторное поле Киллинга $K^\alpha$ удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{D}_\mu K_\nu + \mathcal{D}_\nu K_\mu = 0\,. \tag{79}$$

В силу тождества (16) имеем $\mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}_\mu K_\nu - \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\alpha K_\nu = R^{\beta}_{\nu,\alpha\mu} K_\beta$, а дифференцируя уравнение Киллинга, находим $\mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}_\mu K_\nu + \mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}_\nu K_\mu = 0$. Отсюда в результате приема, который применялся к паре уравнений (23), получается следствие

$$\mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}_\mu K_\nu = \frac{1}{2}\left(R^{\beta}_{\alpha,\nu\mu} + R^{\beta}_{\nu,\alpha\mu} - R^{\beta}_{\mu,\alpha\nu}\right) K_\beta = R^{\beta}_{\alpha,\nu\mu} K_\beta . \tag{80}$$

Уравнение (79) имеет нетривиальное решение в том и только в том случае, когда в пространственно-временном мире действует изометрическая группа. Поэтому выполняется равенство $f^{\alpha'}_{\beta'}(x') = f^{\alpha}_{\beta}(x)$, где штрихом отмечен результат операции из этой группы. Для бесконечно малого преобразования $x^{\alpha'} = x^{\alpha} + K^{\mu} f^{\alpha}_{\mu} \cdot t$ это означает $K^{\mu} e_\mu f^{\alpha}_{\beta} = 0$. Рассмотрим соответствующее преобразование репера

$$f^{\alpha'} = f^{\alpha'}_{\beta'}(x') dx^{\beta'} = f^{\alpha}_{\beta}\left[dx^{\beta} + dK^{\mu} \tilde{f}^{\beta}_{\mu}\, t + K^{\mu} d\tilde{f}^{\beta}_{\mu}\, t\right].$$

Так как $c^{\alpha}_{\mu\nu} = \tilde{f}^{\beta}_{\mu} e_\nu f^{\alpha}_{\beta} - \tilde{f}^{\beta}_{\nu} e_\mu f^{\alpha}_{\beta}$, то $K^{\mu} c^{\alpha}_{\mu\nu} = K^{\mu} \tilde{f}^{\beta}_{\mu} e_\nu f^{\alpha}_{\beta}$. Но $f^{\alpha}_{\beta} d\tilde{f}^{\beta}_{\mu} = -\tilde{f}^{\beta}_{\mu} df^{\alpha}_{\beta}$. Следовательно,

$$f^{\alpha'} = f^{\alpha} + dK^{\alpha} t - K^{\mu} c^{\alpha}_{\mu\nu} f^{\nu} = f^{\alpha} + (\mathcal{D}_\nu K^{\alpha} - K^{\mu} \omega^{\alpha}_{\mu\nu}) f^{\nu} t .$$

Таким образом, репер испытывает бесконечно малое вращение, задаваемое антисимметричной матрицей $\mathcal{D}_\nu K_\alpha + K^{\mu} \omega_{\nu\alpha\mu}$. Отсюда следует , что приращение спинорного поля при рассматриваемом бесконечно малом преобразовании равняется

$$\psi'(x') - \psi(x) = t\left[K^{\mu} e_\mu + \frac{1}{4} K^{\mu} \omega_{\nu\alpha\mu} H^{\nu} H^{\alpha} + \frac{1}{4}(\mathcal{D}_\nu K_\alpha) H^{\nu} H^{\alpha}\right]\psi .$$

$$= t\,[K^\mu \mathcal{D}_\mu + \tfrac{1}{4}(\mathcal{D}_\alpha K_\beta) H^\alpha H^\beta]\psi.$$

Каждому полю Киллинга $K^\alpha$ отвечает оператор момента импульса спинорного поля, равный

$$\hat{K} = -i\hbar\,[K^\mu \mathcal{D}_\mu + \tfrac{1}{4}(\mathcal{D}_\alpha K_\beta) H^\alpha H^\beta]. \qquad (81)$$

Докажем, что он коммутирует с оператором $H^\nu \mathcal{D}_\nu - \frac{imc}{\hbar} H^4$. Очевидно, что $\hat{K} H^4 = H^4 \hat{K}$, так что надо доказать лишь равенство $\hat{K} H^\nu \mathcal{D}_\nu = H^\nu \mathcal{D}_\nu \hat{K}$. Имеем

$$\frac{i}{\hbar}[H^\nu \mathcal{D}_\nu \hat{K} - \hat{K} H^\nu \mathcal{D}_\nu] = K^\mu H^\nu (\mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu - \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu) +$$

$$+ \tfrac{1}{4}(\mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\alpha K_\beta) H^\nu H^\alpha H^\beta + (\mathcal{D}_\nu K^\mu) H^\nu \mathcal{D}_\mu + \tfrac{1}{4}(\mathcal{D}_\alpha K_\beta)(H^\nu H^\alpha H^\beta - H^\alpha H^\beta H^\nu)\mathcal{D}_\nu$$

Так как

$$H^\nu H^\alpha H^\beta - H^\alpha H^\beta H^\nu = 2\eta^{\alpha\nu} H^\beta - 2\eta^{\beta\nu} H^\alpha,$$

то

$$(\mathcal{D}_\nu K^\mu) H^\nu \mathcal{D}_\mu + \tfrac{1}{4}(\mathcal{D}_\alpha K_\beta)(H^\nu H^\alpha H^\beta - H^\alpha H^\beta H^\nu)\mathcal{D}_\nu = 0.$$

Учитывая далее (31), находим

$$\frac{i}{\hbar}[H^\nu \mathcal{D}_\nu \hat{K} - \hat{K} H^\nu \mathcal{D}_\nu] = \tfrac{1}{4}\{K^\mu R_{\alpha\beta,\nu\mu} + (\mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\alpha K_\beta)\} H^\nu H^\alpha H^\beta.$$

Согласно (80), сумма в фигурных скобках равняется нулю. Таким образом, наше утверждение доказано. Из него вытекает важное следствие: если $\dot{\psi}$ удовлетворяет уравнению Дирака (34), то и $\hat{K}\psi$ удовлетворяет тому же уравнению. Любому оператору $\hat{K}$, обладающему этим свойством, соответствует вторично квантованный оператор

$$\hat{\mathfrak{K}} = i\int\limits_{\Sigma} \bar{\psi} H_4 [Q_1 Q_2 Q_3] \hat{K} \psi , \tag{82}$$

не зависящий от $\Sigma$.

## 8. Тензор энергии-импульса

Компоненты тензора энергии-импульса в произвольном ортогональном репере имеют точно такой же вид, как и в плоском пространстве-времени в декартовых координатах:

$$T_{\mu\nu} = \frac{i\hbar}{4}\left[\bar{\psi} H_\mu \psi_\nu - \bar{\psi}_\nu H_\mu \psi + \bar{\psi} H_\nu \psi_\mu - \bar{\psi}_\mu H_\nu \psi\right], \tag{83}$$

где $\psi_\mu = \mathcal{D}_\mu \psi$, $\bar{\psi}_\mu = \mathcal{D}_\mu \bar{\psi}$.

Докажем, что обе дивергенции тензора $\bar{\psi} H_\mu \psi_\nu - \bar{\psi}_\nu H_\mu \psi$ равняются нулю. Имеем

$$\mathcal{D}^\nu \bar{\psi} H_\mu \psi_\nu = \bar{\psi}^\nu H_\mu \psi_\nu + \bar{\psi} H_\mu \mathcal{D}^\nu \psi_\nu .$$

Согласно (37), получаем

$$\mathcal{D}^{\nu}\bar{\varphi}\, H_{\mu}\psi_{\nu} = \bar{\varphi}^{\nu} H_{\mu}\psi_{\nu} + \left(\frac{m^2c^2}{\hbar^2} - \frac{1}{4}R\right)\bar{\varphi}\, H_{\mu}\psi .$$

Следовательно,

$$\mathcal{D}^{\nu}\,(\bar{\varphi}\, H_{\mu}\psi_{\nu} - \bar{\varphi}_{\nu}\, H_{\mu}\psi) = 0 . \qquad (84)$$

Далее, имеем

$$\mathcal{D}^{\mu}\bar{\varphi}\, H_{\mu}\psi_{\nu} = \bar{\varphi}_{\mu}\, H^{\mu}\psi_{\nu} + \bar{\varphi}\, H^{\mu}\mathcal{D}_{\mu}\mathcal{D}_{\nu}\psi =$$

$$= \bar{\varphi}_{\mu}\, H^{\mu}\psi_{\nu} + \bar{\varphi}\,\mathcal{D}_{\nu} H^{\mu}\psi_{\mu} + \bar{\varphi}\, H^{\mu}(\mathcal{D}_{\mu}\mathcal{D}_{\nu} - \mathcal{D}_{\nu}\mathcal{D}_{\mu})\psi .$$

Согласно (34) и (35), получаем

$$\mathcal{D}^{\mu}\bar{\varphi}\, H_{\mu}\psi_{\nu} = \bar{\varphi}\, H^{\mu}(\mathcal{D}_{\mu}\mathcal{D}_{\nu} - \mathcal{D}_{\nu}\mathcal{D}_{\mu})\psi .$$

Из тождества (31) и (36) находим

$$\mathcal{D}^{\mu}\bar{\varphi}\, H_{\mu}\psi_{\nu} = -\frac{1}{2}\,\bar{\varphi}\, H^{\beta}\psi\, R_{\beta\nu} .$$

Следовательно,

$$\mathcal{D}^{\mu}\,(\bar{\varphi}\, H_{\mu}\psi_{\nu} - \bar{\varphi}_{\nu}\, H_{\mu}\psi) = 0 . \qquad (85)$$

Из (84) и (85) немедленно следует, что дивергенция тензора энергии-импульса равняется нулю:

$$\mathcal{D}^{\mu}\, T_{\mu\nu} = 0 . \qquad (86)$$

Для векторного поля Киллинга в силу уравнения (79) получаем $\mathcal{D}_{\mu}\,(T^{\mu\nu}K_{\nu}) = 0$ . Поэтому интеграл

$$\hat{\mathfrak{K}} = \int\limits_{\Sigma} T_{\mu\nu}\, K^{\nu} d\sigma^{\mu} \qquad (87)$$

не зависит от выбора полной гиперповерхности $\Sigma$.
Этот интеграл будем называть вторично квантованным оператором момента импульса. Докажем, что его можно представить в виде (82), где $\hat{K}$ – оператор (81).

Для доказательства заметим равенство

$$\mathcal{D}_\alpha \bar{\psi}[H_\mu H_\nu H^\alpha]\psi = \bar{\psi} H_\nu \psi_\mu - \bar{\psi}_\mu H_\nu \psi - \bar{\psi} H_\mu \psi_\nu + \bar{\psi}_\nu H_\mu \psi . \tag{88}$$

Оно непосредственно следует из тождества (36) и уравнений (34) и (35). В силу равенства (88) тензор энергии-импульса можно записать в виде

$$T_{\mu\nu} = \frac{i\hbar}{2}[\bar{\psi} H_\mu \psi_\nu - \bar{\psi}_\nu H_\mu \psi] + \frac{i\hbar}{4} \mathcal{D}_\alpha \bar{\psi}[H_\mu H_\nu H^\alpha]\psi . \tag{89}$$

Следовательно,

$$T_{\mu\nu} K^\nu + \bar{\psi} H_\mu \hat{K}\psi = \frac{i\hbar}{4} K^\nu \mathcal{D}_\alpha \bar{\psi}[H_\mu H_\nu H^\alpha]\psi -$$

$$- \frac{i\hbar}{4} \bar{\psi} H_\mu H^\alpha H^\nu \psi (\mathcal{D}_\alpha K_\nu) - \frac{i\hbar}{2}(\bar{\psi}_\nu H_\mu \psi + \bar{\psi} H_\mu \psi_\nu) K^\nu .$$

Далее, имеем

$$K^\nu \mathcal{D}_\alpha \bar{\psi}[H_\mu H_\nu H^\alpha]\psi = \mathcal{D}_\alpha \bar{\psi}[H_\mu K H^\alpha]\psi - \bar{\psi}[H_\mu H^\nu H^\alpha]\psi (\mathcal{D}_\alpha K_\nu),$$

где $K = K^\nu H_\nu$, и в силу тождества (36) и уравнения Киллинга (79) получаем

$$T_{\mu\nu} K^\nu + \bar{\psi} H_\mu \hat{K}\psi = \frac{i\hbar}{4} \mathcal{D}_\alpha \bar{\psi}[H_\mu K H^\alpha]\psi +$$

$$+ \frac{i\hbar}{2}\left\{\bar{\psi} H^\alpha \psi (\mathcal{D}_\alpha K_\mu) - K^\alpha \bar{\psi}_\alpha H_\mu \psi - K^\alpha \psi H_\mu \psi_\alpha\right\}.$$

Наконец, из уравнений (34), (35) и (79) находим

$$\mathcal{D}_\alpha \bar\psi (K_\mu H^\alpha - K^\alpha H_\mu)\psi = \bar\psi H^\alpha \psi \mathcal{D}_\alpha K_\mu - K^\alpha \bar\psi_\alpha H_\mu \psi - K^\alpha \bar\psi H_\mu \psi_\alpha ,$$

а значит,

$$T_{\mu\nu} K^\nu + \bar\psi H_\mu \hat K \psi = \frac{i\hbar}{4} \mathcal{D}_\alpha \bar\psi [H_\mu K H^\alpha]\psi + \frac{i\hbar}{2} \mathcal{D}_\alpha \bar\psi (K_\mu H^\alpha - K^\alpha H_\mu)\psi. \tag{90}$$

Так как правая часть этого равенства является дивергенцией антисимметричного тензора, то интеграл от нее по полной гиперповерхности равняется нулю. Таким образом,

$$\int_\Sigma T_{\mu\nu} K^\nu d\sigma^\mu = -\int_\Sigma \bar\psi H_\mu \hat K \psi \, d\sigma^\mu = i\int_\Sigma \bar\psi H_4 [Q_1 Q_2 Q_3] \hat K \psi , \tag{91}$$

что и требовалось доказать.

## 9. Переход от одного ортогонального базиса к другому

Разумеется, метрическая форма $ds^2$ определяет ортогональный базис лишь с точностью до ортогонального преобразования. Пусть $ds^2 = \eta_{\alpha\beta} f^\alpha f^\beta = \eta_{\alpha\beta} f'^\alpha f'^\beta$,
$f^\alpha = L^\alpha_\beta f'^\beta$ и, обратно, $f'^\alpha = \tilde L^\alpha_\beta f^\beta$,
где $L$ и $\tilde L$ – некоторые матрицы, зависящие от координат $x$. Тогда $\eta_{\alpha\sigma} \tilde L^\sigma_\beta = \eta_{\beta\sigma} L^\sigma_\alpha$. Имеем также

$$e'_\alpha = L^\beta_\alpha e_\beta , \quad e_\alpha = \tilde L^\beta_\alpha e'_\beta , \quad \tilde f^\alpha_\beta = \tilde f'^\alpha_\gamma \tilde L^\gamma_\beta , \quad f^\beta_\alpha = f'^\gamma_\alpha L^\beta_\gamma .$$

Подставляя последние две формулы в (20), находим

$$c^{\gamma}_{\alpha\beta} = c'^{\sigma}_{\mu\nu}\tilde{L}^{\mu}_{\alpha}\tilde{L}^{\nu}_{\beta}L^{\gamma}_{\sigma} + \tilde{L}^{\sigma}_{\alpha}e_{\beta}L^{\gamma}_{\sigma} - \tilde{L}^{\sigma}_{\beta}e_{\alpha}L^{\gamma}_{\sigma}. \qquad (92)$$

Следовательно,

$$\omega_{\alpha\beta\gamma} = \omega'_{\mu\nu\sigma}\tilde{L}^{\mu}_{\alpha}\tilde{L}^{\nu}_{\beta}\tilde{L}^{\sigma}_{\gamma} + \eta_{\mu\nu}\tilde{L}^{\mu}_{\alpha}e_{\gamma}\tilde{L}^{\nu}_{\beta}. \qquad (93)$$

Отсюда легко получаются формулы $\mathcal{D}_{\beta}A^{\alpha} = \tilde{L}^{\mu}_{\beta}L^{\alpha}_{\nu}\mathcal{D}'_{\mu}A'^{\nu}$, $\mathcal{D}_{\beta}A_{\alpha} = \tilde{L}^{\mu}_{\beta}\tilde{L}^{\nu}_{\alpha}\mathcal{D}'_{\mu}A'_{\nu}$ и аналогичные формулы для любых тензоров.

Рассмотрим теперь, как преобразуется ковариантный дифференциал спинора. Всякое преобразование Лоренца $f'^{\alpha} = \tilde{L}^{\alpha}_{\beta}f^{\beta}$ можно разложить в произведение некоторого числа $p$ симметрий x/. Симметрия же относительно плоскости, ортогональной к единичному вектору $a^{\alpha}$, выражается формулой $f'^{\alpha} = f^{\alpha} - 2a^{\alpha}a_{\beta}f^{\beta}$.
Так как $-AH^{\alpha}A = H^{\alpha} - 2a^{\alpha}A$, где $A = a_{\alpha}H^{\alpha}$, то при любом преобразовании Лоренца

$$(-1)^{p}S^{-1}H^{\alpha}S = \tilde{L}^{\alpha}_{\beta}H^{\beta}, \qquad (-1)^{p}SH^{\alpha}S^{-1} = L^{\alpha}_{\beta}H^{\beta},$$

$$(-1)^{p}SH_{\alpha}S^{-1} = \tilde{L}^{\beta}_{\alpha}H_{\beta}, \qquad (-1)^{p}S^{-1}H_{\alpha}S = L^{\beta}_{\alpha}H_{\beta}, \qquad (94)$$

где $S = A_{p}\cdots A_{1}$, $S^{-1} = A_{1}\cdots A_{p}$.

Поэтому, согласно (93), матрица (26) преобразуется следующим

x/ Число $p$ четно, если $\det\|L^{\alpha}_{\beta}\| = 1$, и нечетно, если $\det\|L^{\alpha}_{\beta}\| = -1$, т.е. $(-1)^{p} = \det\|L^{\alpha}_{\beta}\|$.

образом:

$$\Omega = S^{-1}\Omega' S + \frac{1}{4} S^{-1} H_\mu S\, d(S^{-1} H^\mu S).$$

Докажем, что

$$\frac{1}{4} S^{-1} H_\mu S\, d(S^{-1} H^\mu S) = S^{-1} dS\,. \qquad (95)$$

При $p=1$ это равенство легко проверяется. Действительно,

$$\frac{1}{4} A H_\mu A\, d(A H^\mu A) = \frac{1}{4}(2a_\mu A - H_\mu) d(2a^\mu A - H^\mu) = \qquad (96)$$

$$= \frac{1}{2}(2a_\mu A - H_\mu)(A da^\mu + a^\mu dA) = A dA\,.$$

Здесь учтено, что $2a_\mu da^\mu = d(a_\mu a^\mu) = 0$ и $A\cdot dA + dA\cdot A = dA^2 = 0$, так как по условию $A^2 = a_\mu a^\mu = 1$. Докажем теперь, что если равенство (95) выполняется при некотором $p$, то оно выполняется и при $p+1$. Нам требуется, таким образом, доказать, что из формулы (95) следует формула

$$\frac{1}{4} S^{-1} A H_\mu A S\, d(S^{-1} A H^\mu A S) = S^{-1} A\, d(AS). \qquad (97)$$

Для краткости мы опустили здесь номер $p+1$ у матрицы $A$. Имеем

$$\frac{1}{4} S^{-1} A H_\mu A S\, d(S^{-1} A H^\mu A S) = \frac{1}{4} S^{-1} A H_\mu A S (dS^{-1}) A H^\mu A S +$$

$$+ \frac{1}{4} S^{-1} A H_\mu A \big(d(A H^\mu A)\big) S + \frac{1}{4} S^{-1} A H_\mu H^\mu A\, dS.$$

Так как $H_\mu H^\mu$ равно числу размерности пространства-времени, то третье слагаемое равняется

$$\frac{1}{4} S^{-1} A H_\mu H^\mu A\, dS = \frac{1}{4} S^{-1} H_\mu H^\mu dS .$$

Второе слагаемое, согласно (96), равняется

$$\frac{1}{4} S^{-1} A H_\mu A \left(d\left(A H^\mu A\right)\right) S = S^{-1} A (dA) S .$$

Первое же слагаемое равняется

$$\frac{1}{4} S^{-1}(2a_\mu A - H_\mu) S (dS^{-1})(2a^\mu A - H^\mu) S = \frac{1}{4} S^{-1} H_\mu S (dS^{-1}) H^\mu S .$$

Следовательно,

$$\frac{1}{4} S^{-1} A H_\mu A S\, d(S^{-1} A H^\mu A S) = \frac{1}{4} S^{-1} H_\mu S\, d(S^{-1} H^\mu S) + S^{-1} A (dA) S .$$

Таким образом, из (95) следует (97). По индукции равенство (95) доказано, а значит,

$$\Omega = S^{-1} \Omega' S + S^{-1} dS . \tag{98}$$

Отсюда находим

$$\mathcal{D}\psi = d\psi + \Omega\psi = S^{-1}(d\psi' + \Omega'\psi') = S^{-1}\mathcal{D}'\psi' , \tag{99}$$

где

$$\psi' = S\psi , \tag{100}$$

т.е. $\psi$ и $S\psi$ преобразуются по одному и тому же правилу. Так как

$$S^+ H_0 = (-1)^p H_0 S^{-1} , \tag{101}$$

то сопряженный спинор преобразуется по правилу

$$\bar{\varphi}' = (-1)^P \bar{\varphi} S^{-1}. \tag{102}$$

По такому же правилу преобразуется и его ковариантный дифференциал:

$$\mathcal{D}\bar{\varphi} = d\bar{\varphi} - \bar{\varphi}\,\Omega = (-1)^P (d\bar{\varphi}' - \bar{\varphi}'\Omega')S = (-1)^P (\mathcal{D}'\bar{\varphi}')S. \tag{103}$$

Теперь уже нетрудно доказать, что уравнения (34) и (35) ковариантны относительно преобразований от одного ортогонального базиса к другому. Действительно, из (99) и (103) следуют правила преобразования ковариантных производных спинора

$$\mathcal{D}_\nu \psi = \tilde{L}_\nu^{\ \mu} S^{-1} \mathcal{D}_\mu' \psi', \quad \mathcal{D}_\nu \bar{\psi} = (-1)^P \tilde{L}_\nu^{\ \mu} (\mathcal{D}_\mu' \bar{\psi}') S. \tag{104}$$

Согласно (94), получаем

$$H^\nu \mathcal{D}_\nu \psi = (-1)^P S^{-1} H^\mu \mathcal{D}_\mu' \psi', \quad \mathcal{D}_\nu \bar{\psi} H^\nu = \mathcal{D}_\mu' \bar{\psi}' H^\mu S.$$

Кроме того, имеем

$$(-1)^P S H^4 S^{-1} = H^4. \tag{105}$$

Следовательно,

$$H^\nu \mathcal{D}_\nu \psi - \frac{imc}{\hbar} H^4 \psi = (-1)^P S^{-1} \left(H^\nu \mathcal{D}_\nu' \psi' - \frac{imc}{\hbar} H^4 \psi'\right),$$

$$\mathcal{D}_\nu \bar{\psi} H^\nu + \frac{imc}{\hbar} \bar{\psi} H^4 = \left(\mathcal{D}_\nu' \bar{\psi}' + \frac{imc}{\hbar} \bar{\psi}' H^4\right) S,$$

так что уравнения (34) и (35) действительно ковариантны.

Наконец, нетрудно показать, что вектор тока и тензор энергии-импульса преобразуется в соответствии с их наименованиями:

$$J^\alpha = L^\alpha_{\ \mu} J'^\mu, \quad T_{\mu\nu} = \tilde{L}_\mu^{\ \alpha} \tilde{L}_\nu^{\ \beta} T'_{\alpha\beta}.$$

Литература:


I. N.A.Chernikov, E.A.Tagirov, Ann.Inst.Henri Poincaré, vol. IX, N.2, Sect. A, p. 109-141, Paris, 1968. Препринт ОИЯИ Р2-3777, Дубна, 1968.

2. А.П.Котельников, В.А.Фок. Некоторые применения идей Лобачевского в механике и физике, ГИТТЛ, М.-Л.,1950.

3. Э.Картан. Теория спиноров. ИЛ., М., 1947.

4. Ж.де Рам. Дифференцируемые многообразия. ИЛ., М., 1956.



Рукопись поступила в издательский отдел
29 октября 1971 года.