СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна



P2 - 6094

Д.И. Блохинцев

# СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1971

P2 - 6094

Д.И. Блохинцев

# СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Блохинцев Д.И. P2-6094

Стохастические пространства

Эта статья является очерком теории стохастических пространств. Её строение таково: во введении и в §2 дается определение стохастического пространства; в последующих параграфах рассматриваются различные специальные случаи: а) нелинейные поля и стохастические пространства; б) стохастические пространства, возникающие при приближенном решении уравнений поля в случайной среде; в) стохастические пространства, возникающие вследствие турбулентной гравитации или г) вследствие квантовых флюктуаций гравитации.

**Сообщения Объединенного института ядерных исследований**

**Дубна, 1971**

Blokhintsev D.I. P2-6094

Stochastic Spaces

The paper presents itself a sketch of theory of stochastic spaces. In the introduction and sec. 2 the definition of the stochastic space is given; in the following sections some special cases are considered: a) nonlinear fields and stochastic spaces; b) stochastic spaces resulting from approximate solving of the field equations in a random medium; c) stochastic spaces due to the turbulent gravitation or d) due to the quantum fluctuations of the gravitation.

**Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.**

**Dubna, 1971**

## §1. Введение

Метрическое пространство со случайной, стохастической метрикой с чисто математической точки зрения изучалось в работах[1,2].

Однако эти исследования относятся к случаю эвклидовой геометрии, имеющей положительно-дефинитную метрическую форму. Для целей физики более важным случаем является псевдоэвклидово пространство Минковского. Недефинитность метрики этого пространства приводит к ряду специфических проблем, которые не встречаются в случае эвклидова пространства.

Эти специфические для физического пространства трудности связаны с требованиями, предъявляемыми к инвариантности и к нормировке вероятности того или иного значения интервала $s^2$ в недефинитном пространстве (подробнее см. в[3]). Они не замедлили обнаружиться в работах физиков, которые в неявной форме использовали понятия, относящиеся к стохастической геометрии (см.[4-7]). В отличие от пути, избранного в работах[1,2], в этом очерке теории стохастического пространства мы не исходили из метрического пространства, а рассматривали стохастичность пространства как некоторое отношение двух пространств. Метрика вводится позднее. Мы избегаем упомянутых выше трудностей таким путем, что стохастические свойства пространства вводим явно посредством случайных параметров $\zeta$, физический смысл которых может быть весьма различен. По отношению к этим параметрам требования инвариантности и нормировки вероятности $dW$ являются уже частным делом.

Дальнейшие разделы очерка посвящены теории поля в стохастических пространствах. В них приведены различные примеры стохастических пространств в теоретической физике.

## §2. Определения

Рассмотрим два пространства, $\mathcal{R}_4\,(x)$ и $\mathcal{R}_4(\xi)$, которые, для определенности, будем считать четырехмерными. Допустим, что существует отображение пространства $\mathcal{R}_4(\xi)$ на пространство $\mathcal{R}_4(x)$ :

$$x_a = X_a(\xi, \zeta) \quad , \tag{2.1}$$

зависящее от параметра $\zeta$, который является <u>случайной величиной.</u> Под параметром $\zeta$ может подразумеваться большое число параметров $\zeta_1$, $\zeta_2 \ldots$, $\zeta_N$ или даже бесконечно большое $(N \to \infty)$, в частности зависимость от параметров $\zeta$ может быть функциональной. В этом последнем случае мы заключаем $\zeta$ в фигурные скобки:

$$x_a = X_a(\xi, \{\zeta\}) \ . \tag{2.2}$$

Мы предполагаем, что существует нормированная вероятность $dW(\zeta)$ тех или иных распределений параметров $\zeta$ :

$$dW(\zeta) \geq 0 \tag{2.3}$$

или

$$dW\{\zeta\} \geq 0 \ , \tag{2.3'}$$

и условия нормировки гласят:

$$\int dW(\zeta) = 1 \ , \tag{2.4}$$

$$\int dW\{\zeta\} = 1 \ . \tag{2.4'}$$

Пространство $\mathfrak{R}_4(x)$, возникающее как отображение (2.1) пространства $\mathfrak{R}_4(\xi)$, мы будем называть стохастическим пространством по отношению к пространству $\mathfrak{R}_4(\xi)$.

Если существует обратное преобразование

$$\xi_a = \xi_a(x_a, \zeta) \equiv X_a^{-1}(x, \zeta), \tag{2.5}$$

то пространства $\mathfrak{R}_4(\xi)$ и $\mathfrak{R}_4(x)$ стохастичны одно относительно другого.

Полезным понятием является понятие реперной области. Под реперной областью мы будем понимать такую область в $\mathfrak{Y}(\xi)$, внутри которой преобразование (2.1) не зависит от случайных параметров

$$\frac{\partial X_a(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} = 0, \qquad \xi \in \mathfrak{Y}(\xi). \tag{2.6}$$

Разумеется, что реперная область может и не существовать.

По определению, имеем для средних значений:

$$\bar{x}_a = \int X_a(\xi, \zeta)\, dW(\zeta), \tag{2.7}$$

$$\overline{(x_a - \bar{x}_a)^m} = \int [X_a(\xi, \zeta) - \bar{x}_a]^m\, dW(\zeta). \tag{2.8}$$

Эти моменты, вообще говоря, суть функции точки $\xi$ в $\mathfrak{R}_4(\xi)$.

Пусть теперь в пространстве $\mathfrak{R}_4(\xi)$ задана риманова метрика:

$$d\sigma^2 = g_{\alpha\beta}(\xi)\, d\xi_\alpha\, d\xi_\beta. \tag{2.9}$$

Эта метрика индуцирует стохастическую метрику в пространстве $\mathfrak{R}_4(x)$:

$$ds^2 = G_{\alpha\beta}(x,\zeta)\,dx_\alpha dx_\beta, \tag{2.10}$$

где

$$G_{\alpha\beta}(x,\zeta) = g_{\mu\nu}(\xi)\,\frac{\partial\xi_\mu(x,\zeta)}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial\xi_\nu(x,\zeta)}{\partial x_\beta}, \tag{2.11}$$

причём координаты $\xi$ в $g_{\mu\nu}(\xi)$ выражены через $x$ и $\zeta$ посредством (2.5). В силу (2.10) и (2.11) интервал в пространстве $\Re_4(x)$ становится <u>стохастической величиной.</u> Средняя длина, взятая по кривой

$$x_\alpha = x_\alpha(\tau) \tag{2.12}$$

между точками $A$ и $B$, равна:

$$\bar{\ell} = \int dW(\zeta)\int_A^B \sqrt{\gamma_{ik}(x,\zeta)\frac{dx_i}{d\tau}\frac{dx_k}{d\tau}}\,d\tau, \tag{2.13}$$

$i,k = 1,2,3$ и тензор $\gamma_{ik}$ равен:

$$\gamma_{ik} = G_{ik} - \frac{G_{0i}\,G_{0k}}{G_{00}} \tag{2.14}$$

(см.[8]).

Формула (2.10) позволяет рассматривать стохастическое метрическое пространство $\Re_4(x)$ и безотносительно к какому-либо другому пространству $\Re_4(\xi)$ при предположении, что его собственная метрика определена формулой (2.10) вне специальной связи с (2.11).

Реперная область в этом случае означает область в пространстве $\mathcal{Y}(x)$, внутри которой метрический тензор $G_{\alpha\beta}(x,\zeta)$ не зависит от случайных параметров:

$$\frac{\partial G_{\alpha\beta}(x,\zeta)}{\partial\zeta} = 0. \tag{2.15}$$

Заметим: а) Если реперная область не существует, то мы имеем дело со стохастичностью, покрывающей все пространство $\Re_4(x)$. б) Если не существует преобразования от $\Re_4(x)$ к $\Re_4(\xi)$, т.е. преобразования, обратного преобразованию (2.5), которое устранило бы зависимость от случайных параметров, то мы имеем дело с неустранимой стохастичностью.

## §3. Поля в стохастическом пространстве

Пусть в пространстве $\Re_4(\xi)$ дано поле $\phi(\xi)$, которое в общем случае может быть случайным. Учитывая эту возможность, положим:

$$\phi = \phi(\xi;\eta), \tag{3.1}$$

где $\eta$ - случайный параметр. (Зависимость от $\eta$ может быть и функциональной). Вероятность того или иного распределения параметров пусть будет $dW(\eta)$. Таким образом, каждой точке пространства $\Re_4(\xi)$ с вероятностью, определяемой величиной $dW(\eta)$, соответствует некоторое значение поля $\phi = \phi(\xi;\eta)$.

Обратимся теперь к стохастически сопряженному пространству $\Re_4(x)$, причём

$$x_\alpha = \xi_\alpha + X_\alpha(\xi,\zeta). \tag{3.2}$$

Случайные параметры $\zeta$ могут а) совпадать с параметрами $\eta$, б) частично совпадать с ними или в) быть различными. Поэтому вместо $dW(\zeta)$ и $dW(\eta)$ целесообразнее рассматривать вероятность

$$dW = dW(\zeta,\eta), \tag{3.3}$$

$$\int dW(\zeta,\eta) = 1. \tag{3.3'}$$

С помощью этой величины мы можем выразить вероятность того, что точке

$\xi$ в $\mathfrak{R}_4(\xi)$ будет соответствовать точка $x_\xi$ в $\mathfrak{R}_4(x)$, а поле равно $\phi$. Эта вероятность есть

$$dW(\phi, x, \xi) = \int dW(\zeta, \eta)\delta[\phi - \phi(\xi, \eta)]\delta[x - \xi - X(\xi, \zeta)]. \tag{3.4}$$

Если существует преобразование, обратное (3.2), вида (2.5), то поле $\phi$ в пространстве $\mathfrak{R}_4(x)$ может быть представлено в виде

$$\phi = \phi(x_a + \xi_a(x, \zeta), \eta) = \phi(x, \zeta, \eta), \tag{3.5}$$

т.е. оно принимает вид, аналогичный виду поля в пространстве $\mathfrak{R}_4(\xi)$.

## §4. Стохастические пространства и существенно нелинейные поля

Существенно нелинейным полем назовем поле, скорость распространения которого зависит от величины самого поля и его производных.

Примером таких полей в пространстве $\mathfrak{R}_4(x)$ являются поля типа Борна-Инфельда, уравнение для которых выводится из вариационного принципа:

$$\delta S = 0, \quad S = \int L\sqrt{-G}\, d\Omega, \tag{4.1}$$

где $G$ есть детерминант метрического тензора $g_{\mu\nu}$, $\sqrt{-G}\cdot d\Omega$ – инвариантный элемент объема в $\mathfrak{R}_4(x)$, $L$ – плотность лагранжиана, которая предполагается функцией инвариантнов $K$ и $I$. Для скалярного поля $\phi$ эти инварианты равны:

$$L = L(K, I), \quad K = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\phi_\mu\phi_\nu, \quad I = \frac{1}{2}\phi^2. \tag{4.2}$$

Здесь $\phi_\mu = \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}$. В случае спинорного поля $\psi(x)$ эти инварианты имеют вид

$$K = \frac{1}{2}(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi_{\mu} - \bar{\psi}_{\mu}\gamma^{\mu}\psi), \tag{4.3}$$

$$I = \frac{1}{2}\bar{\psi}\psi, \tag{4.3'}$$

где $\psi_{\mu} = \frac{\partial\psi}{\partial x_{\mu}}$ , $\gamma^{\mu}$ - матрицы Дирака (заметим, что в (4.3) и (4.3') эти инварианты выписаны явно для случая плоского пространства). Из вариационного принципа (4.1) следует уравнение поля:

$$-\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\left[\frac{\partial(L\sqrt{-G})}{\partial\phi_{\mu}}\right] + \frac{\partial(L\sqrt{-G})}{\partial\phi} = 0, \tag{4.4}$$

или

$$-\frac{\partial^2(L\sqrt{-G})}{\partial\phi_{\mu}\partial\phi_{\nu}}\phi_{\mu\nu} + \frac{\partial(L\sqrt{-G})}{\partial\phi} - \frac{\partial^2(L\sqrt{-G})}{\partial\phi_{\mu}\partial\phi}\phi_{\mu} = 0, \tag{4.4'}$$

где $\phi_{\mu\nu} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_{\mu}\partial x_{\nu}}$.

Подобным же образом для спинорного поля получим:

$$-\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\left[\frac{\partial(L\sqrt{-G})}{\partial\bar{\psi}_{\mu}}\right] + \frac{\partial(L\sqrt{-G})}{\partial\phi} = 0, \tag{4.5}$$

или:

$$-\frac{\partial^2(L\sqrt{-G})}{\partial\bar{\psi}_{\mu}\partial\bar{\psi}_{\nu}}\bar{\psi}_{\mu\nu} - \frac{\partial^2(L\sqrt{-G})}{\partial\bar{\psi}_{\mu}\partial\psi_{\nu}}\psi_{\mu\nu} +$$

$$+\frac{\partial(L\sqrt{-G})}{\partial\bar{\psi}} - \frac{\partial^2(L\sqrt{-G})}{\partial\bar{\psi}_{\mu}\partial\bar{\psi}}\bar{\psi}_{\mu} - \frac{\partial^2(L\sqrt{-G})}{\partial\bar{\psi}_{\mu}\partial\psi}\psi_{\mu} = 0 \tag{4.5'}$$

и аналогичное сопряженное уравнение.

В отличие от уравнения Дирака уравнение (4.5') для спинорного поля является уравнением второго порядка. Нетрудно показать, что сохраняющийся ток $\mathcal{J}_{\mu}$ имеет теперь вид

$$\mathcal{J}_{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi \quad . \tag{4.6}$$

Уравнения типа (4.5) и (4.5') содержат переменные коэффициенты при высших производных, зависящие от поля и его первых производных. Поэтому характеристический конус, определяющий направления распространения сигналов (слабых разрывов) оказывается искривленным (см./3,9/). При этом в некоторых случаях скорость сигнала может оказаться большей скорости света в пустоте. В работах/10,11/ было обрашено внимание на целесообразность переопределения метрики пространства-времени в случае нелинейных полей. Это переопределение, в частности, позволяет избежать противоречия, возникающего в случае "сверхсветовых" сигналов. Внутренне согласованное переопределение метрики было предложено в работе/12/. Пусть метрика задана квадратичной формой

$$d\sigma^2 = G_{\mu\nu}\, d\xi^{\mu}\, d\xi^{\nu}, \tag{4.7}$$

причём метрический тензор $G_{\mu\nu}$ зависит теперь от поля $\phi$ и его производных $\phi_\mu$. Соответствующее пространство обозначим через $\mathfrak{R}_4(\xi)$. В этом пространстве волновое уравнение Даламбера гласит:

$$-\frac{\partial}{\partial \xi_{\mu}} [\sqrt{-G}\; G^{\mu\nu} \phi_{\nu}] + \frac{\partial (L\sqrt{-G})}{\partial \phi} = 0. \tag{4.8}$$

С другой стороны, из вариационного принципа (4.1) следует уравнение поля:

$$-\frac{\partial}{\partial \xi_{\mu}} [-\frac{\partial(\sqrt{-G}L)}{\partial \phi_{\mu}}] + \frac{\partial(L\sqrt{-G})}{\partial \phi} = 0, \tag{4.9}$$

которое отличается от (4.5) предположением, что тензор теперь есть функция $\phi$ и $\phi_\mu$. Метрика будет согласована характером распространения поля, если положить

$$\frac{\partial (L\sqrt{-G})}{\partial \phi_\mu} = \sqrt{-G}\; G^{\mu\nu}\; \phi_\nu \qquad (4.10)$$

(см.[12]). Таким образом, нелинейное поле индуцирует в пространстве свою метрику. Очевидно, что различные поля индуцируют различные метрики. Если существует общая область пространства-времени, где все поля слабые, так что метрика становится общей всем им, превращаясь в метрику пространства Минковского, то, исходя из этой области в $\Re_4(x)$ и двигаясь в направлении возрастающих полей, мы придем к расщеплению пространства $\Re_4(x)$ на различные пространства $\Re_{4\phi}(x)$, в каждом из которых задана своя метрика. Если начальные данные для полей заданы стохастически, то индуцируемая нелинейными полями метрика будет стохастической и сами пространства $\Re_{4\phi}(x)$ будут пространствами стохастическими.

## §5. Простой пример стохастического пространства

Обратимся к уравнению типа (4.2), но в двухмерном пространстве $\Re_2(x)$, так что $x \equiv t, x$. Возьмем лагранжиан в форме

$$L = b^2\left(1 + \frac{\Re}{b^2}\; K\right)^{1/2} - b^2 , \qquad (5.1)$$

где

$$\Re = \frac{1}{2}\left(\phi_t^2 - \phi_x^2\right) \qquad (5.2)$$

и величина $b$ играет роль масштаба нелинейности. Из этого лагранжиана вытекает уравнение

$$-(1-\phi_x^2)\,\phi_{tt} + 2\phi_x\,\phi_t\,\phi_{xt} + (1-\phi_x^2)\,\phi_{xk} = 0, \qquad (5.3)$$

имеющее кривые характеристики. Решение задачи Коши для этого уравнения было получено в работе [13]. При этом было показано, что это решение имеет простой вид в пространстве $\Re_2(\xi)$, $\xi \equiv \tau, \xi$, точки которого связаны с точками пространства $\Re_2(x)$ преобразованиями

$$t = \tau + \frac{1}{2b^2}\int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau} [H_0(\lambda) - b^2]\,d\lambda, \tag{5.4}$$

$$x = \xi + \frac{1}{2b^2}\int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau} \mathcal{Y}_0(\lambda)\,d\lambda. \tag{5.5}$$

Здесь $H$ – гамильтониан рассматриваемого поля:

$$H = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_t}\phi_t - \mathfrak{L}, \tag{5.6}$$

а $\mathcal{Y}$ – его импульс:

$$\mathcal{Y} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_t}\phi_x. \tag{5.7}$$

$H_0(\lambda)$ и $\mathcal{Y}_0(\lambda)$ суть значения этих величин на пространственной поверхности в $\Re_2(\xi)$, $\tau=0$. Эта поверхность совпадает с пространственной поверхностью в $\Re_2(x)$ при $t=0$. В пространстве $\Re_2(\xi)$ поле $\phi(\tau,\xi)$ удовлетворит простому уравнению

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\tau^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} = 0 \tag{5.8}$$

и равно

$$\phi(\xi,\tau) = \frac{1}{2}[\phi_0(\xi+\tau) + \phi_0(\xi-\tau)] + \frac{1}{b^2}\int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau}\Pi_0(\lambda)\,d\lambda, \tag{5.9}$$

где $\Pi$ есть импульс, канонически сопряженный полю $\phi$.

$$\Pi = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi}. \tag{5.10}$$

$\Pi_0(\lambda)$ – значения этого импульса на поверхности $\tau = 0$, а $\phi_0(\lambda)$ – значения поля на этой же поверхности. Допустим теперь, начальные значения $\phi_0$ и $\Pi_0$ являются случайными величинами $\hat{\phi}_0$, $\hat{\Pi}_0$, заданными распределением

$$dW \equiv dW\{\hat{\phi}_0, \hat{\Pi}_0\}. \tag{5.11}$$

Тогда преобразования (5.4) и (5.5) суть стохастические преобразования:

$$t = \tau + \frac{1}{2b^2}\int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau} [\hat{H}_0(\lambda) - b^2]\, d\lambda \equiv t(\xi, \tau, \{\hat{\phi}_0, \hat{\Pi}_0\}), \tag{5.12}$$

$$x = \xi + \frac{1}{2b^2}\int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau} \hat{\mathcal{Y}}_0(\lambda)\, d\lambda \equiv x(\xi, \tau, \{\hat{\phi}_0, \hat{\Pi}_0\}). \tag{5.13}$$

Поверхность $\tau = 0$ в $\Re_2(\xi)$ совпадает с поверхностью $t = 0$ в $\Re_2(x)$, и поэтому эта поверхность есть реперная область. Поле $\hat{\phi}(\xi, \tau)$ принимает определенные, хотя и случайные значения в пространстве $\Re_2(\xi)$. Это пространство можно назвать <u>собственным</u> пространством поля $\hat{\phi}$.

В пространстве $\Re_2(x)$ ситуация является существенно новой в том отношении, что мы уже не имеем ответа на вопрос о вероятности того или иного значения поля $\hat{\phi}(x, t)$ в этом пространстве; имеет смысл лишь вероятность того, что поле $\hat{\phi} = \phi$ и одновременно $\hat{x} = x$, $\hat{t} = t$. Эта вероятность равна

$$\begin{aligned} dW(\phi, x, t) = \int dW\{\phi_0, \Pi_0\}\, \delta[t - t(\xi, \tau, \{\phi_0, \Pi_0\})] \times \\ \times \delta[x - x(\xi, \tau, \{\phi_0, \Pi_0\})]\, \delta[\phi - \Phi(\xi, \tau, \{\phi_0, \Pi_0\})] \equiv \\ \equiv dW(\phi, x, t; \xi, \tau), \end{aligned} \tag{5.14}$$

где функция $\Phi$ определена формулой (5.9) с заменой там $\phi_0$ и $\Pi_0$ на случайные величины.

Рассмотренный пример интересен в том отношении, что он содержит обобщение понятия поля $\phi(x)$ в пространстве $\Re_2(x)$ в том смысле, что не существует функции $\hat{\phi}=\phi(x,t)$, а существует лишь вероятность найти три величины, $\hat{\phi}=\phi$, $\hat{x}=x$, $\hat{t}=t$, соответствующие точке $(\xi,\tau)$ в пространстве $\Re_2(\xi)$.

## §6. Стохастические пространства, возникающие при взаимодействии полей

В некоторых случаях при приближенном решении уравнений для взаимодействующих полей также возникают собственные стохастические пространства.

В качестве примера рассмотрим скалярное поле $\Phi(x)$ в пространстве $\Re_4(x)$, подчиняющееся уравнению

$$\Box_a^2\Phi - M^2\Phi = g\hat{\phi}_a \frac{\partial\Phi}{\partial x_a}, \tag{6.1}$$

где $\hat{\phi}_a(x)$ – некоторое случайное векторное поле, $g$ – константа взаимодействия, $M$ – параметр массы частиц. Будем искать решения этого уравнения, близкие к плоской волне:

$$\Phi = Ae^{iS/\hbar} \tag{6.2}$$

при $\hbar\to 0$. Здесь $A \simeq const$, $S$ – фаза волны, которую мы представим в виде

$$S = px + \hat{\sigma}(x), \tag{6.3}$$

где $p$ – импульс волны при $g=0$, $\hat{\sigma}(x)$ – поправка к фазе. Подставляя (6.2) и (6.3) в (6.1) при $\hbar\to 0$ и малой $g$, получим уравнение для фазы $\hat{\sigma}(x)$ /14/:

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\tau} + \frac{g}{M}\, p^a\hat{\phi}_a = 0, \tag{6.4}$$

где $\tau = (nx)$ есть собственное время волны, $n$ – единичный вектор, параллельный импульсу $p$. Из уравнения (6.4) следует:

$$\hat{\sigma}(x) = -p^{a} \frac{g}{M} \int^{\tau} \hat{\phi}(\tau', x_{\perp}) d\tau', \tag{6.5}$$

где $x_{\perp} = x - n(nx)$. Из этой формулы и из (6.3) видно, что фаза $S$ может быть представлена в виде

$$S = p\,\xi \equiv p^{a} \xi_{a}, \tag{6.6}$$

причём

$$\xi_{a} = x_{a} + \xi_{a}(x, \{\hat{\phi}\}) \tag{6.7}$$

и

$$\xi_{a}(x, \{\hat{\phi}\}) = -\frac{g}{M} \int^{\tau} \hat{\phi}(\tau', x_{\perp}) d\tau'. \tag{6.8}$$

Преобразование (6.7) есть преобразование к стохастическому пространству $\Re_4(\xi)$, в котором волна (6.2) подчиняется простому уравнению Даламбера:

$$\Box^{2}_{\xi} \Phi - M^{2} \Phi = 0. \tag{6.9}$$

Очевидно, что реперной областью для этого пространства будет область $\mathfrak{Y}(x)$, где поле $\hat{\phi}(x) = 0$. Подобный же пример может быть распространен на спинорное поле $\Psi(x)$, взаимодействующее со случайным векторным полем $\hat{\phi}_{a}$. Пусть поле $\Psi(x)$ подчиняется уравнению

$$(D - i g \phi - M) \Psi = 0, \tag{6.10}$$

где $D = \gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}}$, $\phi = \gamma^{\mu} \hat{\phi}_{\mu}$, $g$ – заряд, $M$ – масса. Будем искать решение $\Psi$ в виде

$$\Psi = (D - ig\phi + M)\Phi, \tag{6.11}$$

и

$$\Phi = u_p e^{iS/\hbar}, \tag{6.11'}$$

где $u_p$ – постоянный спинор, а фазу $S$ опять возьмем в виде (6.3). Нетрудно убедиться, что при $\hbar \to 0$ случайная фаза $\hat{\sigma}$ будет опять удовлетворять уравнению (6.4), а функция $\Phi$, взятая в пространстве $\Re_4(\xi)$, – уравнению (6.9)/17/. При этом любопытно то обстоятельство, что в специальном случае электромагнитного поля $\phi_a = A_a$ среднее квадратичное отклонение

$$\sum_{a=1}^{3} \overline{(\xi_a - x_a)^2} = \overline{\Delta\xi^2} \tag{6.12}$$

совпадает с величиной, определяющей лэмбовский сдвиг $\Delta E_n$ электронных уровней в атоме:

$$\Delta E_n \cong \frac{1}{6} \int \psi_n^*(x)\, \nabla^2 U \cdot \overline{\Delta\xi^2}\, \psi_n(x)\, d^3x, \tag{6.13}$$

где $\psi_n(x)$ – волновая функция электрона/14,15/ в атоме, а $U$ – его потенциальная энергия (см./14,15/).

## §7. Стохастическое гравитационное поле

Турбулентное движение материи порождает турбулентную, или стохастическую метрику (см./3,16/). В этом случае тензор импульса - энергии материи $T_{\mu\nu}(x)$ является случайной функцией в пространстве $\Re_4(x)$.

Это обстоятельство может быть выражено явно введением стохастических параметров $\zeta$:

$$\hat{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}(x, \zeta). \tag{7.1}$$

В качестве таких случайных параметров могут быть, например, взяты начальные значения лагранжиевых координат частиц.

Из уравнения Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi k}{c^4} \hat{T}_{\mu\nu}(x, \zeta) \tag{7.2}$$

тогда следует, что метрический тензор $g_{\mu\nu}(x)$ будет также стохастической величиной:

$$\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x, \zeta). \tag{7.3}$$

Если флюктуации при турбулентном движении материи невелики по сравнению со средними значениями характерных величин, то тензор в (7.1) целесообразно разложить на две части:

$$T_{\mu\nu} = \bar{T}_{\mu\nu}(x) + \Phi_{\mu\nu}(x, \zeta), \tag{7.4}$$

где $\bar{T}_{\mu\nu}(x)$ есть среднее значения тензора импульса-энергии:

$$\bar{T}_{\mu\nu}(x) = \int T_{\mu\nu}(x, \zeta) dW(\zeta). \tag{7.5}$$

Здесь $dW(\zeta)$ – нормированная вероятность того или иного распределения случайных параметров $\zeta$. Тензор $\Phi_{\mu\nu}(x, \zeta)$ определяется целиком флюктуациями движущегося вещества. И мы будем считать его пропорциональным некоторому малому параметру $\epsilon$, определяющему амплитуду флюктуаций. Подобным же образом разложим и метрический тензор (7.3):

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}(x) + h_{\mu\nu}(x, \zeta). \tag{7.6}$$

Здесь величина $h_{\mu\nu}(x, \zeta)$ также считается пропорциональной параметру $\epsilon$. Приравнивая в (7.2) нулю коэффициенты при степенях $\epsilon$, получим уравнения:

$$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\bar{g}_{\mu\nu}\cdot\bar{R} = \frac{8\pi k}{c^4}\,T_{\mu\nu}\;(x) \tag{7.7}$$

и

$$A^{\rho\sigma}_{\mu\nu} h_{\rho\sigma} + B^{\rho\sigma\alpha}_{\mu\nu}\frac{\partial h_{\rho\sigma}}{\partial x_\alpha} + C^{\rho\sigma\alpha\beta}_{\mu\nu}\frac{\partial^2 h_{\rho\sigma}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \frac{8\pi k}{c^4}\,\Phi_{\mu\nu}\;(x,\zeta), \tag{7.8}$$

где

$$A^{\rho\sigma}_{\mu\nu} = \frac{\partial \bar{L}_{\mu\nu}}{\partial \bar{g}_{\rho\sigma}}, \qquad B^{\rho\sigma\alpha}_{\mu\nu} = \frac{\partial \bar{L}_{\mu\nu}}{\partial\left(\frac{\partial \bar{g}_{\rho\sigma}}{\partial x_\alpha}\right)},$$

$$C^{\rho\sigma\alpha\beta}_{\mu\nu} = \frac{\partial \bar{L}_{\mu\nu}}{\partial\left(\frac{\partial^2 \bar{g}_{\rho\sigma}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right)} \tag{7.9}$$

и величина

$$\bar{L}_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\bar{g}_{\mu\nu}\,\bar{R}\,. \tag{7.10}$$

Теперь заметим, что коэффициенты $A$ , $B$ , $C$ в (7.8) имеют тот же порядок величины, что и $\bar{L}_{\mu\nu}$ , именно:

$$\bar{L}_{\mu\nu} \cong \frac{1}{\ell^2}, \tag{7.11}$$

где $\ell$ – масштаб длины, определяющий кривизну пространства, метрика которого диктуется средним движением, в согласии с уравнением (7.7). С другой стороны, правая часть уравнения (7.7) имеет порядок величины

$$\sim \frac{8\pi k}{c^2}\,\bar{\rho}, \tag{7.12}$$

где $\bar{\rho}$ – средняя плотность материи; ее можно представить в форме $\bar{\rho}=M/a^3$, здесь $M$ – характерная масса, а $a$ – характерный размер рассматриваемой системы. Тогда:

$$\frac{8\pi k M}{c^2}\,\frac{1}{a^3}=a_g/a^3\ ,\tag{7.13}$$

$a_g$ есть гравитационный радиус, соответствующий массе системы $M$. Из (7.7), (7.11) и (7.13) следует

$$1/\ell^2\cong\frac{a_g}{a^3},\tag{7.14}$$

т.е. радиус кривизны равен:

$$\frac{1}{\ell}\cong\frac{1}{a}\left(\frac{a_g}{a}\right)^{1/2}.\tag{7.15}$$

Обратимся теперь к уравнению (7.8). Пусть масштаб длины, характеризующий градиент стохастического поля $\hbar$, есть $\ell'$. Масса, характерная для масштаба флюктуаций тензора $\Phi_{\mu\nu}$, пусть будет $\Delta m$, а $b$ – длина, определяющая размер этих флюктуаций. Тогда из уравнения (7.8) следует:

$$\frac{\alpha}{\ell^2}\hbar+\frac{\beta}{\ell\ell'}\hbar+\gamma/\ell'^2\cdot\hbar\cong\frac{b_g}{b^3}.\tag{7.16}$$

Здесь $\hbar$ – величина порядка больших компонент тензора $\hbar_{\mu\nu}$, а величина

$$b_g=\frac{8\pi k\cdot\Delta m}{c^2}\tag{7.17}$$

есть гравитационный радиус флюктуации. По смыслу величин $\ell$ и $\ell'$ $\ell>\ell'$. В силу линейности уравнения для тензора $\hbar_{\mu\nu}$ длина $\ell'$ порядка $b$. Таким образом:

$$\hbar\sim\frac{\ell'^2}{b^3}b_g=\frac{b_g}{b}.\tag{7.18}$$

Из (7.18) следует, что величины $h$ будут малыми поправками, если мало отношение $b_g/b$ (эту величину и можно принять в качестве упомянутого параметра $\epsilon$, по которому идет разложение исходного уравнения и тензоров $g_{\mu\nu}$ и $T_{\mu\nu}$ ).

Если величина $\epsilon = b_g/b$ не мала, то разложение в ряд по степеням $\epsilon$ становится непригодным. Одновременно возникает трудность, имеющая, по всей видимости, принципиальный характер. Именно, координаты точек пространства $\Re_4(x)$ устанавливаются в общей теории относительности хроногеометрическими методами так, что четверки чисел ( $x_0, x_1, x_2, x_3$ ), приписываемые той или иной точке, суть не что иное, как хроногеометрическое расстояние, т.е. расстояния и промежутки времени, измеренные посредством светового сигнала. Между тем в случае, когда флюктуации тензора $T_{\mu\nu}$ велики, флюктуации интервала

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x, \zeta)\, dx_\mu dx_\nu \tag{7.19}$$

также не малы. Если этот интервал используется для натягивания координатной сетки в $\Re_4(x)$ (как это принято в хроногеометрии (см./3,17/), то значения координат ( $x_0, x_1, x_2, x_3$ ) каждой физической точки могут быть приписаны лишь в вероятностном смысле.

Возникающая ситуация является весьма необычной. Если к тому же отсутствует реперная область, то привычное нам понятие возможности упорядочения событий в $\Re_4(x)$ теряет свой смысл.

Видимо, такая ситуация может иметь место в микромире, если роль гравитации не исключается там причинами, которые еще не обнаружены с полной ясностью. Суть дела в том, что возможно вообразить такое распределение материи в микромире, которое крайне ослабляет значение гравитации по сравнению с другими взаимодействиями. Для этого достаточно, чтобы масштаб $b$, характеризующий градиенты полей в микромире, был бы существенно больше гравитационного радиуса $b_g$ микроскопических скоплений материи.

С подобной же ситуацией неупорядочиваемости событий можно встретиться и в астрофизике, при наличии среды или вблизи нее, и в случае, когда флюктуации плотности материи велики.

## §8. Квантовые флюктуации гравитационного поля

Флюктуации гравитационного поля, обусловленные вакуумными колебаниями материи, были вычислены в работе/16/. В вакууме среднее значение тензора импульса-энергии $\bar{T}_{\mu\nu}(x) = 0$.

Поэтому флюктуационная часть тензора $\Phi_{\mu\nu}$ в (7.4) совпадает с самим тензором $T_{\mu\nu}$. Средние значения компонент метрического тензора равны: $\bar{g}_{\mu\nu} = g^0_{\mu\nu}$, где $g^0_{\mu\nu}$ суть значения этого тензора для псевдоевклидова пространства $g_{00} = +1$, $g_{kk} = -1$, $k = 1,2,3$; $g_{0k} = 0$. Уравнение (7.8) принимает простой вид. Именно:

$$\frac{1}{2}\Box\psi^{\mu}_{\nu} = -\frac{8\pi k}{c^3} T^{\mu}_{\nu}, \tag{8.1}$$

где

$$\psi^{\mu}_{\nu} = h^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu}\cdot h, \quad h = h^{\sigma}_{\sigma}, \tag{8.2}$$

и

$$\frac{\partial\psi^{\mu}_{\nu}}{\partial x_{\mu}} = 0. \tag{8.3}$$

Тезор $T^{\mu\nu}$ есть тензор, описывающий суммарные флюктуации всех полей с учетом их взаимодействия. Возможно, что этот тензор имеет более простой вид, чем частные тензоры для того или иного поля. Однако этот полный тензор нам неизвестен. Приводимые ниже вычисления для специальных случаев указывают на то, что основные выводы, видимо, не существенно зависят от частного вида поля.

В случае скалярного поля $\phi$ лагранжиан $L$ равен

$$L = \frac{1}{2}\left(g^{\alpha\beta}\frac{\partial\phi}{\partial x_{\alpha}}\frac{\partial\phi}{\partial x_{\beta}} - m^2\phi^2\right) \tag{8.4}$$

и соответствующий контравариантный тензор импульса-энергии имеет вид

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \frac{\partial\phi}{\partial x_\alpha} \frac{\partial\phi}{\partial x_\beta} - g^{\mu\nu} L . \tag{8.5}$$

Само поле $\hat{\phi}$ представляется рядом

$$\hat{\phi} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} (\hat{a}_k e^{ikx} + \hat{a}^+ e^{-ikx}), \tag{8.6}$$

где приняты обычные обозначения ( $V$ – нормировочный объем, $V \to \infty^3$ ), вектор $k$ имеет компоненты $k = \omega_k , \vec{k}$ , $\omega_k = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}$ – масса частиц поля. $\hat{a}_k$ и $\hat{a}_k^+$ суть операторы уничтожения и рождения частиц, подчиняющиеся условию перестановки:

$$[\hat{a}_k , \hat{a}_{k'}^+ ] = \delta_{kk'} . \tag{8.7}$$

Остальные скобки равны нулю.

В случае спинорного поля $\psi$ тензор импульса-энергии имеет вид

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\bar{\psi} \gamma_\mu^\nu \frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\mu} \gamma^\nu \psi) \tag{8.8}$$

(мы выписываем в этом случае его ковариантные компоненты, $\gamma^\nu$ – матрицы Дирака). Поле $\psi$ и сопряженное поле $\bar{\psi}$ разлагаются в ряды:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{p,r=1,2} \{ \hat{a}_r (p) u^r (p) e^{ikx} + \hat{b}_r^+ (p) V^r (-p) e^{-ikx} \}, \tag{8.9}$$

$$\bar{\psi} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{p,r=1,2} \{ \hat{a}_r^+ (p) \bar{u}^r (p) e^{-ikx} + \hat{b}_r (p) \bar{v}^r (-p) e^{ikx} \}, \tag{8.9'}$$

где $\hat{a}_r$ , $\hat{a}_r^+$ и $\hat{b}_r$ , $\hat{b}_r^+$ суть операторы рождения и уничтожения электронов и позитронов; $u^r(p)$ и $v^r(p)$ – нормированные на 1 спиноры. Условия квантования гласят:

$$\{\hat{a}_r(p), \hat{a}^+_{r'}(p)\} = \delta_{rr'}, \tag{8.10}$$

$$\{\hat{b}_r(p), \hat{b}^+_{r'}(p)\} = \delta_{rr'} \tag{8.10'}$$

остальные антикоммутаторы равны нулю. Равенство нулю среднего значения тензора-импульса энергии $\bar{T}_{\mu\nu}$ обеспечивается тем, что мы берем в (8.5) и (8.8) псевдоэвклидовы значения тензора $g^0_{\mu\nu}$ и произведения операторов $\hat{a}$, $\hat{a}^+$, $\hat{b}'$, $\hat{b}^+$ берутся в нормальном виде. По определению нормального произведения, среднее значение $T_{\mu\nu}$ по вакууму будет равно нулю. Из уравнения (8.1) следует, что

$$\psi^\mu_\nu(x) = -\frac{16\pi k}{c^3} \int G(x-x')\hat{T}^\mu_\nu(x')d^4x', \tag{8.11}$$

где $G(x-x')$ есть функция Грина "свободного" уравнения (8.1)x/.

Следуя работе/16/, вычислим среднее по вакууму от произведения величин $\psi^\mu_\nu(x)$, $\psi^a_\beta(y)$, т.е. корреляцию этих величин. Из (8.11) следует, что

$$\psi^\mu_\nu(x)\psi^a_\beta(y) = \left(\frac{16\pi k}{c^3}\right)^2 \times \int G(x-x')G(y-y')Q^{\mu a}_{\nu\beta}(x'-y')d^4x'd^4y', \tag{8.12}$$

где тензор $Q^{\mu a}_{\nu\beta}(x'-y')$ есть корреляция:

$$Q^{\mu a}_{\nu\beta}(x-y) = \overline{T^\mu_\nu(x)T^a_\beta(y)}. \tag{8.13}$$

---

x/В (8.11) имеется в виду функция Грина $G(x-x')$, симметричная относительно прошедшего и будущего.

В силу однородности вакуума эта корреляция зависит лишь от разности $x-y$. Представим эту корреляцию в виде спектрального разложения:

$$Q^{\mu\alpha}_{\nu\beta}(x-y)=\int \tilde{Q}^{\mu\alpha}_{\nu\beta}(q)\,e^{iq(x-y)}\,d^4q\ . \tag{8.14}$$

Тогда для спектрального разложения корреляций компонент метрического тензора получим:

$$M^{\mu\alpha}_{\nu\beta}(x-y)=\overline{\psi^{\mu}_{\nu}(x)\psi^{\alpha}_{\beta}(y)}=$$
$$=\int \tilde{M}^{\mu\alpha}_{\nu\beta}(q)\,e^{iq(x-y)}\,d^4q\,. \tag{8.15}$$

Из (8.11) и (8.13) следует:

$$\tilde{M}^{\mu\alpha}_{\nu\beta}(q)=\left(\frac{16\pi k}{c^3}\right)^{r}\frac{1}{q^4}\,Q^{\mu\alpha}_{\nu\beta}(q), \tag{8.16}$$

где множитель $q^4$ возник вследствие равенства

$$\tilde{G}(q)\sim\frac{1}{q^2}\ . \tag{8.17}$$

В дальнейшем приводятся результаты довольно громоздких вычислений величины $Q^{\mu\alpha}_{\nu\beta}$ для случая а) скалярного поля и отдельно б) для случая спинорного поля. По причинам, которые будут видны из дальнейшего, мы принуждены ограничиться качественными выводами. В этой же связи мы ограничиваемся приведением результатов вычислений для компоненты $Q^{00}_{00}(x)$.

а) Скалярное поле. Для симметризованной корреляции в этом случае получается выражение

$$Q^{00}_{00}(x-y)=\frac{1}{2}\{\overline{T^0_0(x)\quad T^0_0(y)}+\overline{T_{00}(y)\,T^0_0\;(x)}\}=$$

$$=\frac{\hbar^2}{(2\pi)^6\,c^2}\int\frac{d^3k\,d^3k'}{2\omega_k\,2\omega_{k'}}\,M^2(k,k')\cos(k+k',x-y),\tag{8.18}$$

где величина $M(k,k')$ равна

$$M(k,k')=-\omega_k\,\omega_{k'}\,[1-\frac{m^2}{\omega_k\omega_{k'}}+\frac{(\vec{k}\,\vec{k}')}{\omega_k\omega_{k'}}],\tag{8.19}$$

так что вектор $q$ в (8.16) равен:

$$q=\omega_k+\omega_{k'},\ \vec{k}+\vec{k}'.\tag{8.20}$$

Интеграл в (8.18) расходится. Поэтому мы определим в нем верхнюю границу интегрирования по векторам $\vec{k}$ и $\vec{k}'$, именно, положим $|\vec{k}|<K$, $|\vec{k}'|<K$.

Оценка интеграла (8.18) при этом ограничении приводит к следующему результату:

$$Q^{00}_{00}(r)=\frac{1}{32}\,\frac{1}{(2\pi)^4}\,\frac{\hbar^2K^8}{c^2}+\ldots\tag{8.21}$$

Это при $r\to 0$, $t\to 0$, где $r=(\vec{x}-\vec{y})$ и $t=t_x-t_y$. Далее:

$$Q^{00}_{00}(r)=\frac{2}{(2\pi)^4}\,\frac{\hbar^2K^4}{c^2}\cdot\frac{1}{r^4}\,[1+\cos 2\,Kr]\tag{8.22}$$

при $r\to\infty$, $t=0$; и

$$Q^{00}_{00}(t)=-\frac{1}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{2}\,\frac{\hbar^2K^6}{c^2}\,\frac{1}{t^2}\,\cos 2Kt\tag{8.23}$$

при $t \to \infty$, $r=0$. Введем вместо $K$ длину $\Lambda = \frac{2\pi}{K}$. Тогда из (2.1) видно, что величина $Q^{00}_{00}(r)$ имеет порядок $\frac{\hbar^2}{c^2\Lambda^8}$, и, следовательно, амплитуда колебаний плотности скалярной материи $\Delta\rho$ имеет порядок

$$\Delta\rho \sim \frac{\hbar c}{c^2\Lambda^4} . \tag{8.24}$$

Отношение гравитационного радиуса этой плотности

$$b_g = \frac{8\pi k}{c^2}(\Delta\rho\,\Lambda^3) \tag{8.25}$$

к размеру самой флюктуации $\Lambda$ есть

$$b_g/\Lambda = \frac{8\pi k}{c^2}\frac{\hbar c}{c^2\Lambda^4}\Lambda^2 = \frac{\Lambda_g^2}{\Lambda^2} . \tag{8.26}$$

Отсюда следует, что гравитационные эффекты, вызванные вакуумными флюктуациями скалярного поля, имеющими линейный масштаб $\Lambda$, не зависят от массы частиц, если $\Lambda \ll \hbar/mc$ и малы до той поры, пока

$$\Lambda \gg \Lambda_q = \left(\frac{8\pi k\hbar}{c^3}\right)^{1/2} = \sim 10^{-32}\,\text{см}. \tag{8.27}$$

б) <u>Спинорное поле.</u> Вычисления протекают совершенно аналогично случаю скалярного поля и приводят к результату

$$Q^{00}_{00}(x-y) = \frac{1}{4}\frac{1}{(2h)^6}\frac{\hbar^2}{c^2}\int d^2k\,d^3k'(\omega_k - \omega_{k'})^2 \times$$
$$\times M^2(k,k')\cos(k+k', x-y), \tag{8.28}$$

причём величина $M^2(k,k') \cong 1$. При таком же, как и в (8.18), обрезании интеграла получается:

$$Q^{00}_{00}(r) = \frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{16}\frac{1}{15}\frac{\hbar^2}{c^2}K^8 + \ldots \tag{8.29}$$

Это при $r = 0$, $t = 0$. Далее:

$$Q^{00}_{00}(r) = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{\hbar^2}{c^2} \frac{K^2 m^2}{c^2} \frac{1}{r^4} [1 + \cos 2Kr] \tag{8.30}$$

при $r \to \infty$ и $t = 0$, и

$$Q^{00}_{00}(t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{\hbar^2 K^4 m^2}{t^2} \cos 2Kt \tag{8.31}$$

при $t \to \infty$; здесь $m$ – масса спинорных частиц. Как видно из сравнения формул (8.21), (8.23) и (8.29), (8.31), амплитуда плотности $\Delta\rho$ в обоих случаях практически одна и та же и не зависит от массы частиц. Поведение же при больших $r$ или $t$ в случае бозе-статистики и ферми-статистики несколько различается.

## §9. Флюктуации гравитационного поля вблизи электрического заряда

Этот случай флюктуаций гравитационного поля существенно отличается от рассмотренного в предыдущем параграфе только в том случае, если изменения метрики, вызванные присутствием заряда, велики. Классической модельно заряженной частицей может служить, например, "фридмон" /18/ – частица с метрикой Фридмана во внутренней области и с метрикой типа шварцшильдовской во внешней области. Мы ограничимся рассмотрением внешней области $r > r_0$, причём:

$$r_0 = \sqrt{a_g a_0}, \tag{9.1}$$

где

$$a_g = \frac{8\pi k m_0}{c^3}, \quad a_0 = \frac{\epsilon^2}{m_0 c^2}, \tag{9.2}$$

т.е. длина $r_0$ есть среднее геометрическое из гравитационного радиуса $a_g$ частицы и ее электромагнитного радиуса $a_0$. При определенном выборе координат (ср. /18/) метрика при $r > r_0$ определяется интервалом

$$ds^2 = g_{00}\, dt^2 - g_{rr}\, dr^2 - r^2 d\Omega . \tag{9.3}$$

Здесь $r$ – трехмерный радиус, $\Omega$ суть угловые координаты, так что $d\Omega = d\theta^2 + \sin^2\theta \; d\phi^2$ и компоненты метрического тензора равны

$$g_{00} = \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^2, \quad g_{rr} = \frac{1}{g_{00}} . \tag{9.4}$$

Теперь заметим, что длина $r_0$ применительно к условиям микромира может быть записана в виде

$$r_0 = \Lambda_g \sqrt{\frac{\epsilon^2}{\hbar c}} < \Lambda_g . \tag{9.5}$$

В области $r > r_0$ метрика (9.3) становится эвклидовой. Из (9.5) видно, что при этом $r$ может быть еще меньше или сравнимым с длиной $\Lambda_g$. Однако результаты расчётов, приведенных в предыдущем параграфе показывают, что в этой области квантовые флюктуации гравитационного поля будут уже очень велики. Поэтому классические модели частицы, видимо, могут иметь лишь эвристическое значение.

## §10. Оценки на основе функциональных интегралов

Качественное рассмотрение квантовых флюктуаций гравитационного поля и поведения квантовых полей в гравитационном поле может быть усовершенствовано на основании методики, предложенной в работе /19/. Эта методика основана на рассмотрении фейнмановских интегралов по траекториям при ограничении гауссовским приближением для фазы. Рассмотрим совместно гравитационное поле $g_{\mu\nu}$ и скалярное поле $\phi$. Представим, метрический тензор $g_{\mu\nu}$ в виде (7.6), причём под $\bar{g}_{\mu\nu}$ теперь будем понимать классическое гравитационное поле, а под $h_{\mu\nu}$ – квантовое. Интеграл Фейнмана имеет вид:

$$G = \int d\{\phi\}\, d\{h\}\, \delta(N)\, e^{i\Phi} , \tag{10.1}$$

где символы $d\{\phi\}$ и $d\{h\}$ означают интегрирования в функциональных пространствах $\Re_{\phi}$ и $\Re_{h}$, а $\delta(N)$ есть произведение $\delta$-функций в этих же пространствах, с помощью которого учитываются возможные дополнительные условия $N=0$. Фаза $\Phi$ равна:

$$\Phi = \int [\frac{1}{\Lambda_g^2}\frac{1}{2} R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} + \frac{1}{\hbar c} L]\sqrt{-g}\, dV . \tag{10.2}$$

Здесь $\sqrt{-g}\, dV$ – инвариантный объем, $g$ есть определитель: $g = \| g_{\mu\nu} \|$, $R_{\mu\nu}$ – тензор кривизны, $L$ – функция Лагранжа скалярного поля (8.4). Гравитационное действие

$$W = \frac{1}{2} R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \tag{10.3}$$

в соответствии с разложением

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{10.4}$$

может быть заменено в интеграле (10.2) на

$$W^* = \bar{W} + \bar{W}^{\mu\nu\rho\sigma} h_{\mu\nu} h_{\rho\sigma} + \bar{W}^{\mu\nu\rho\sigma\alpha} h_{\mu\nu} \frac{\partial h_{\rho\sigma}}{\partial x_\alpha} + \bar{W}^{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta} \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial h_{\rho\sigma}}{\partial x_\beta} + \dots , \tag{10.5}$$

т.к. члены с первыми степенями $h_{\mu\nu}$ в силу классических (неквантовых) уравнений гравитационного поля выпадут при интегрировании в (10.2). Если теперь через $\bar{W}^{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta}$ обозначить значение тензора $\bar{W}^{\mu\nu\alpha\beta\rho\sigma}$ для псевдоэвклидовой метрики, то величина

$$\Delta \bar{W}^* = \bar{W}^{\mu\nu\rho\sigma} h_{\mu\nu} h_{\rho\sigma} + \bar{W}^{\mu\nu\rho\sigma\alpha} h_{\mu\nu} \frac{\partial h_{\rho\sigma}}{\partial x_\alpha} + (\bar{W}^{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta} - \bar{W}_0^{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta}) \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial h_{\rho\sigma}}{\partial x_\beta} + \dots \tag{10.6}$$

будет характеризовать вклад в фазу интеграла Фейнмана, обусловленный наличием некоторого среднего, классического гравитационного поля. Изучение коэффициентов $\bar{W}^{\mu\nu\rho\sigma}$, $\bar{W}^{\mu\nu\rho\sigma\alpha}$, $\bar{W}^{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta}$ позволяет сделать качественные заключения о поведении квантового гравитационного поля вблизи заряда более точно, чем это сделано в §9. Однако ввиду громоздкости выражений эти оценки будут опубликованы отдельно.

В дальнейшем мы рассмотрим более простой случай квантования скалярного поля $\phi$ в классическом гравитационном поле. В этом случае мы полагаем $h_{\alpha\beta} = 0$ и тензор $g^{\mu\nu}$ в (10.2) равным $\bar{g}^{\mu\nu}$.

Фаза $\Phi$ в (10.2) принимает вид

$$\Phi = \frac{1}{\Lambda_g^2} \int \bar{W}\sqrt{-\bar{g}}\, dV + \frac{1}{2}\frac{1}{\hbar c}\int \left(\bar{g}^{\mu\nu}\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\frac{\partial\phi}{\partial x_\nu} - m^2\phi^2\right)\sqrt{-\bar{g}}\, dV. \tag{10.4}$$

Интересующая нас квантовая часть этой фазы равна

$$\Phi^* = \frac{1}{2}\frac{1}{\hbar c}\int \left(\bar{g}^{\mu\nu}\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\frac{\partial\phi}{\partial x_\nu} - m^2\phi^2\right)\sqrt{-\bar{g}}\, dV. \tag{10.5}$$

Подставляя сюда $\bar{g}^{\mu\nu}$ из (9.1), мы будем иметь дело со случаем квантового скалярного поля в классическом гравитационном поле заряда $\epsilon$.

Нетрудно проверить, что в этом случае

$$g^{00} = \frac{1}{g_{00}} = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-2}, \quad g^{rr} = -g_{00}, \quad g^{\theta\theta} = r^2, \quad g^{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta, \tag{10.6}$$

так что

$$\sqrt{-\bar{g}}\, dV = r^2 \sin\theta \cdot dr\, d\theta\, d\phi\, dt = dx\, dy\, dz\, dt \tag{10.7}$$

и плотность лагранжиана равна:

$$L = \frac{1}{\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^2\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)^2 - \left[\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\phi}\right)^2\right]. \tag{10.8}$$

Отсюда видно, что квантовые флюктуации производной по времени от поля $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ в области $r > r_0$ становятся меньше (успокаиваются) в сравнении со случаем плоского пространства. Действительно, первый член в (10.8) дает тот же вклад в фазу интеграла Фейнмана, что и в псевдоэвклидовом случае, но при значениях производной $\left|\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|$, меньших в $(1 - \frac{r}{r_0})$ раз. Этот эффект гравитационного поля может быть понят в терминах "эффективной постоянной Планка", понятие о которой было введено в /19/. Именно импульс $\Pi$, канонически сопряженный полю $\phi$, теперь равен

$$\Pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_t} = g^{00} \phi_t , \tag{10.9}$$

и, следовательно, условие квантования гласит:

$$[\phi_t(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t)] = \frac{i\hbar}{g^{00}} \delta(\vec{x} - \vec{x}') = i\hbar^* \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \tag{10.10}$$

где $\hbar^*$ есть "эффективная постоянная Планка", равная

$$\hbar^* = \hbar (1 - r/r_0)^2, \tag{10.11}$$

так что при $r \to r_0$ $\hbar^* \to 0$. Из (10.10) теперь непосредственно видно, что квантовые флюктуации производной $\phi_t$ падают по мере приближения к заряду. Однако флюктуации радиальные возрастают; действительно, второй член в (10.8), содержащий производную $\phi_r$, имеет коэффициент, убывающий при $r \to r_0$. Поэтому возрастает вклад квантовых флюктуаций поля по направлению радиуса-вектора, проведенного из центра заряда.

Этот пример показывает возможность качественного анализа влияния гравитации на квантованное поле на основе интеграла Фейнмана (10.1).

## Литература


1. K. Menger. Proc.Nat.Acad.Soc., USA, 37, 226 (1951).
2. B. Schweizer, A. Sklar. Pasific J.Math., 10, 313 (1960).

3. Д.И. Блохинцев. Пространство и Время в микромире, "Наука, 1970.

4. A.March. Zs. für Phys., 104, 93, 161 (1934); 105, 620 (1937).

5. М.А. Марков. Гипероны и K-мезоны. Физматгиз (1958).

6. R.I.Ingraham. Renormalisation Theory of Quantum Field with a Cut-off. Gordon et Beach, N.Y. (11-67).

7. H.Jukawa. Research Inst. Fund.Phys.Kyoto University RIFP-55 (1966).

8. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля, "Наука", 1967.

9. Д.И. Блохинцев, В.И. Орлов. ЖЭТФ, 25, 513 (1953).

10. Д.И. Блохинцев. ДАН СССР, 82, 553 (1953); Nuovo Cim. Suppl. Ser. Z, 3, 629 (1956).

11. Д.И. Блохинцев. ДАН СССР, 168, 774 (1966).

12. Дао Вонг Дык, Нгуен Ван Хьеу. Препринт ОИЯИ, Р2-4605, Дубна, 1969.

13. Б.М. Барбашов, Н.А. Черников. ЖЭТФ, 50, вып. 5 (1965); см. также /3/.

14. Д.И. Блохинцев. Препринт ОИЯИ, Е2-5922, Дубна, 1971.

15. T.Welton. Phys.Rev., 74, 1157 (1948); см. Сб."Вопросы причинности в кв. механике", И.Л. (1955).

16. D.I.Blokhintsev. Nuovo Cim., 16, 382 (1960); (see /3/).

17. Р. Марцке, Д. Уиллер. Сб. "Гравитация и относительность", МИР (1965).

18. М.А. Марков. К теории фридмонов. См. Препринты ОИЯИ, Дубна, Е2-973 (1966); Е2-5271 (1970); Р2-5289 (1970).

19. Д.И. Блохинцев. ТМФ, IV, 145 (1970); Nuovo Cim., 2A, 632 (1971).

Рукопись поступила в издательский отдел
20 октября 1971 года.