СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2-6070

Нгуен Ван Хьеу

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫЕ СКАЛЯРНЫЕ ПОЛЯ И ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

1971

P2-6070

Нгуен Ван Хьеу

СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫЕ СКАЛЯРНЫЕ ПОЛЯ И ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

§1. Введение

В настоящей работе под существенно нелинейными полями подразумеваются поля, удовлетворяющие уравнениям, в которых члены с высшими производными являются нелинейными. В работах Блохинцева[1,2] и Свирского[3] впервые было показано, что эти поля обладают следующим особым свойством: в них возможно распространение сигналов со скоростью, превышающей скорость света в вакууме, несмотря на то, что полевые уравнения релятивистски – инвариантны. Иначе говоря, из релятивистской инвариантности теории поля не следует, что скорость света в вакууме является максимально допустимой. С другой стороны, если справедливы обычные формулы преобразования Лоренца, то существование "сверхсветовых" сигналов, т.е. сигналов со скоростью, превосходящей скорость света в вакууме, приведет к внутренней противоречивости теории: при переходе из одной системы отсчета к другой хронологический порядок испускания и приема сигнала может меняться. Эта трудность, однако, не будет возникать, если формулы преобразования пространственно-временных координат при переходе из одной системы отсчета к другой содержат явно напряженности полей в данной точке пространства-времени и метрика зависит явно от полей, как это было отмечено впервые в работе Блохинцева[4], а затем в работе Дао Вонг Дык и автора[5].

В настоящей работе, являющейся продолжением предыдущей[5], мы изучим более подробно искривление пространства-времени в существенно нелинейных полях. Ради простоты будем рассматривать лишь случай скалярного поля Φ с градиентной инвариантностью, т.е. случай, когда лагранжиан зависит явно лишь от производных поля

$$\Phi_\mu = \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} .$$

На основе результатов, полученных в работах /4,5/, и при помощи некоторых соображений симметрии мы выведем систему уравнений, позволяющих определить метрику в заданном поле, если известен лагранжиан. Изучим также физические следствия искривления пространства-времени в существенно нелинейных полях. Обобщая полученные результаты, в последующей работе мы будем рассматривать настоящую нелинейную теорию для существующего поля - теорию электромагнитного поля с нелинейным лагранжианом Гейзенберга-Эйлера /6/, учитывающим рассеяние фотона на фотоне за счет квантовых эффектов рождения и аннигиляции электронно-позитронных пар.

Как и в предыдущей работе /5/, метрику Минковского обозначим через $g^{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$: $g^{00}=g_{00}=1, g^{ii}=g_{ii}=-\delta_{ii}, g^{i0}=g_{i0}=0$. Положим $x^0=t, x^i=(x,y,z)$ и, следовательно, $x_0=t, x_i=-x^i$ в случае плоского пространства-времени. Скорость света в вакууме считаем равной 1.

§2. Система уравнений для определения метрики

В качестве простого примера будем рассматривать скалярное поле с лагранжианом, зависящим лишь от

$$\Phi_\mu=\frac{\partial\Phi}{\partial x^\mu}.$$

Метрику пространства-времени, введенную в работах /4,5/, обозначим через $G^{\mu\nu}$ и $G_{\mu\nu}$:

$$G^{\mu\nu}G_{\nu\lambda}=\delta^\mu_\lambda.$$

По определению, интервал

$$ds^2=G_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{1}$$

является инвариантом относительно физических преобразований системы координат - переходов из одних систем отсчета к другим. Из принципа наименьшего действия

$$\delta S = 0, \quad S = \int d^4x \sqrt{-G}\,\mathfrak{L}, \qquad G = \det(G_{\mu\nu})$$

следует, что поле Φ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left[\frac{\partial(\sqrt{-G}\,\mathfrak{L})}{\partial \Phi_{\mu}} \right] = 0, \tag{2}$$

т.е.

$$\frac{\partial^2 [\sqrt{-G}\,\mathfrak{L}]}{\partial \Phi_{\mu}\, \partial \Phi_{\nu}} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^{\mu}\, \partial x^{\nu}} = 0, \tag{3}$$

причем лагранжиан $\mathfrak{L}$ зависит явно лишь от инварианта

$$K = \frac{1}{2} G^{\mu\nu} \Phi_{\mu} \Phi_{\nu}. \tag{4}$$

Напишем теперь соответствующее уравнение для поверхности фронта волны:

$$\Psi = const$$

(подробно см. работу Блохинцева и Орлова[7]). Мы имеем

$$\frac{\partial^2(\sqrt{-G}\,\mathfrak{L})}{\partial \Phi_{\mu}\, \partial \Phi_{\nu}} \frac{\partial \Psi}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \Psi}{\partial x^{\nu}} = 0. \tag{5}$$

С другой стороны, ковариантное уравнение для поверхности фронта волны в пространстве-времени с метрикой $G^{\mu\nu}$ имеет вид

$$G^{\mu\nu} \frac{\partial \Psi}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \Psi}{\partial x^{\nu}} = 0. \tag{6}$$

Сравнивая (5) и (6), мы получим соотношение

$$\frac{\partial^2 (\sqrt{-G}\,\mathfrak{L})}{\partial \Phi_{\mu}\, \partial \Phi_{\nu}} = \lambda G^{\mu\nu}, \tag{7}$$

где λ – некоторая инвариантная функция от Φ_μ, т.е. функция от K. Это уравнение было получено в работе Блохинцева/4/.

Другое уравнение для определения $G^{\mu\nu}$ является следствием требования, чтобы уравнение поля (2) совпало с общековариантным уравнением распространения волны в римановом пространстве-времени

$$\frac{1}{\sqrt{-G}}\,\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left[\sqrt{-G}\;G^{\mu\nu}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x^{\nu}}\right]=0. \tag{8}$$

Это условие приведет к следующему соотношению:

$$\frac{\partial(\sqrt{-G}\,\mathfrak{L})}{\partial\Phi_{\mu}}=\sqrt{-G}\;G^{\mu\nu}\,\Phi_{\nu}\,, \tag{9}$$

как это было отмечено в работе/5/. Оказывается, что уравнения (7) и (9) вместе с некоторыми соображениями симметрии позволяют однозначно определить метрику $G^{\mu\nu}$ в зависимости от напряженности поля Φ_μ.

Для того, чтобы доказать это утверждение, заметим, прежде всего, что написанные выше уравнения обладают следующими свойствами симметрии: они инвариантны относительно группы линейных преобразований координат

$$x^{\mu}\to\tilde{x}^{\mu}=a^{\mu}_{\mu'}\,x^{\mu'}, \tag{10}$$

если мы требуем, чтобы в этих преобразованиях мы имели

$$G^{\mu\nu}\to\tilde{G}^{\mu\nu}=a^{\mu}_{\mu'}\,a^{\nu}_{\nu'}\,G^{\mu'\nu'}, \tag{11}$$

причем постоянные коэффициенты $a^{\mu}_{\mu'}$ удовлетворяют условиям

$$a^{\mu}_{\mu'}\,a^{\nu}_{\nu'}\,g_{\mu\nu}=g_{\mu'\nu'}\,,$$

$$a^{\mu}_{\mu'}\,a^{\nu}_{\nu'}\,g^{\mu'\nu'}=g^{\mu\nu}.$$

Заметим, что эти преобразования не являются физическими преобразованиями пространственно-временных координат при переходе из одной системы отсчета к другой; инвариантность относительно этих линейных преобразований с постоянными коэффициентами a^μ_ν представляет собой чисто формальное свойство симметрии рассматриваемых уравнений и отличается от физического требования инвариантности относительно изменений системы отсчета. Это свойство симметрии приводит к тому, что метрика $G^{\mu\nu}$ имеет следующий общий вид:

$$G^{\mu\nu} = \alpha(H)\, g^{\mu\nu} + \beta(H)\, g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} \Phi_{\mu'} \Phi_{\nu'}, \tag{12}$$

где

$$H = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \Phi_\mu \Phi_\nu . \tag{13}$$

Нетрудно проверить, что

$$K = H\gamma(H), \tag{14}$$

где

$$\gamma(H) = \alpha(H) + 2H\beta(H). \tag{15}$$

Подставляя выражение (12) в уравнения (7) и (9), мы получим соотношения

$$\frac{d(\sqrt{-G}\,\mathfrak{L})}{dH} = \sqrt{-G}\,\gamma, \tag{16}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-G}\gamma} \frac{d(\sqrt{-G}\,\gamma)}{dH} = \frac{1}{2H}\left(\frac{\gamma}{\alpha} - 1\right). \tag{17}$$

Так как из выражения (12) для метрики $G^{\mu\nu}$ мы имеем

$$-G = -\det(G_{\mu\nu}) = \frac{1}{\gamma\alpha^3}, \tag{18}$$

то соотношения (16) и (17), действительно, представляют собой систему уравнений для определения двух функций α и γ :

$$\frac{d(\gamma^{-1/2}\alpha^{-3/2}\mathfrak{L})}{dH} = \gamma^{1/2}\alpha^{-3/2}, \tag{19}$$

$$\frac{1}{\gamma^{1/2}a^{-3/2}}\cdot\frac{d(\gamma^{1/2}a^{-3/2})}{dH}=\frac{1}{2H}\left(\frac{\gamma}{a}-1\right). \tag{20}$$

На практике мы имеем дело лишь со слабыми полями. В этих случаях можно разложить a и γ в степенные ряды по H и ограничиться лишь первыми членами. Соответствующие коэффициенты разложения можно определить при помощи системы уравнений (19) и (20), если заранее известно выражение лагранжиана. Иначе говоря, можно определить приблизительно метрику $G^{\mu\nu}$ пространства-времени в слабых полях по теории возмущений на основе уравнений (19) и (20) с заданным лагранжианом $\mathfrak{L}$.

В качестве иллюстрации рассмотрим искривление пространства-времени в скалярном поле с простым лагранжианом

$$\mathfrak{L}=K+\sigma K^2, \tag{21}$$

где σ– малая константа. В первом приближении мы имеем

$$a\simeq 1+a'H, \quad \gamma\simeq 1+\gamma' H, \tag{22}$$

и следовательно,

$$\mathfrak{L}\simeq H+(\gamma'+\sigma)H^2. \tag{23}$$

Подставляя эти выражения в уравнения (19) и (20), мы получим

$$a'=0, \quad \gamma'=-4\sigma. \tag{24}$$

В данном приближении

$$\beta\simeq-2\sigma. \tag{25}$$

Метрика $G^{\mu\nu}$, таким образом, имеет вид

$$G^{\mu\nu}\simeq g^{\mu\nu}-2\sigma g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'}\Phi_{\mu'}\Phi_{\nu'}. \tag{26}$$

§3. Скорость распространения сигнала в поле с заданным лагранжианом

Перейдем теперь к изучению одной из возможностей экспериментальной проверки предложенной нами схемы введения метрики. Предположим, что нелинейный лагранжиан $\mathfrak{L}$ каким-то образом был определен. В рамках существующей классической теории поля (без введения метрики $G^{\mu\nu}$)

можно вычислить скорость распространения малых возмущений, рассматриваемых как сигналы, в заданном поле. Мы покажем, что это значение скорости сигнала будет отличаться от значения, полученного в рамках предложенной нами здесь схемы. Эта разница может быть использована для (косвенной) экспериментальной проверки справедливости нашей теории (в том случае, когда известен лагранжиан). Такая ситуация имеет место для электромагнитного поля, которое будет рассмотрено в следующей работе. Изучение скалярного поля представляет методический интерес, поскольку в данном случае расчеты существенно упрощаются.

Итак, для нашей цели будем рассматривать сначала уравнение поля в стандартной теории поля

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \Phi_\mu \partial \Phi_\nu} \Phi_{\mu\nu} = 0. \tag{27}$$

Допустим, что на фоне заданного поля Φ', удовлетворяющего уравнению (27),

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{L}'}{\partial \Phi'_\mu \partial \Phi'_\nu} \cdot \Phi'_{\mu\nu} = 0, \tag{27'}$$

где $\mathfrak{L}'$ обозначает $\mathfrak{L}$ при $\Phi = \Phi'$, существует малое возмущение ϕ. Суммарное поле

$$\Phi = \Phi' + \phi \tag{28}$$

также должно удовлетворять уравнению (27). Отсюда получаем уравнение распространения сигнала ϕ в заданном поле Φ':

$$\begin{gathered}
\left[\frac{d\mathfrak{L}'}{dH'} g^{\mu\nu} + \frac{d^2\mathfrak{L}'}{dH'^2} g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} \Phi'_{\mu'} \Phi'_{\nu'}\right] \phi_{\mu\nu} + \\
+ \left[\frac{d^2\mathfrak{L}'}{dH'^2} \left(g^{\alpha\beta} g^{\mu\mu'} \Phi'_{\mu'} + 2 g^{\alpha\mu} g^{\beta\beta'} \Phi'_{\beta'}\right) + \right. \\
\left. + \frac{d^3\mathfrak{L}'}{dH'^3} g^{\alpha\alpha'} g^{\beta\beta'} g^{\mu\mu'} \Phi'_{\alpha'} \Phi'_{\beta'} \Phi'_{\mu'}\right] \Phi'_{\alpha\beta} \cdot \phi_\mu = 0,
\end{gathered} \tag{29}$$

где

$$H' = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} - \Phi'_\mu \Phi'_\nu .$$

Коэффициенты при старших производных $\phi_{\mu\nu}$ в этом уравнении полностью определяют скорость распространения сигнала в данном поле Φ'.

Вместо уравнения (27) в предложенной нами схеме поле Φ удовлетворяет уравнению (3). Из последнего следует, что малое возмущение ϕ, рассматриваемое как сигнал, распространяется в заданном поле Φ' в соответствии с уравнением

$$\Big[\frac{d(\sqrt{-G'}\mathfrak{L}')}{dH'} g^{\mu\nu} + \frac{d^2(\sqrt{-G}\mathfrak{L}')}{dH'^2} g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} \Phi'_{\mu'} \Phi'_{\nu'} \Big]\phi_{\mu\nu} +$$

$$+\Big[\frac{d^2(\sqrt{-G'}\mathfrak{L}')}{dH'^2}(g^{\alpha\beta} g^{\mu\mu'} \Phi'_{\mu'} + 2 g^{\alpha\mu} g^{\beta\beta'} \Phi'_{\beta'}) + \tag{30}$$

$$+ \frac{d^3(\sqrt{-G'}\mathfrak{L}')}{dH'^3} g^{\alpha\alpha'} g^{\beta\beta'} g^{\mu\mu'} \Phi'_{\alpha'} \Phi'_{\beta'} \Phi'_{\mu'} \Big] \Phi'_{\alpha\beta} \cdot \phi_\mu = 0.$$

Скорость распространения сигнала теперь определяется коэффициентами при старших производных $\phi_{\mu\nu}$ в уравнении (30).

Очевидно, что при одном и том же заданном лагранжиане $\mathfrak{L}$ скорости сигналов, распространяющихся согласно уравнениям (29) и (30), отличаются друг от друга. Искривление пространства-времени при наличии существенно нелинейных полей, таким образом, приведет к наблюдаемым физическим следствиям, которые могут быть использованы для экспериментальной проверки теории.

В качестве простого примера рассмотрим случай, когда лагранжиан имеет вид (21)

$$\mathfrak{L} = K + \sigma K^2 \tag{21}$$

при необходимости введения метрики $G^{\mu\nu}$ или равен

$$\mathfrak{L} = H + \tau H^2 \tag{31}$$

в стандартной теории. В силу соотношения (24) эти выражения приблизительно равны, если

$$\tau = \sigma + \gamma' = -3\sigma. \tag{32}$$

В статическом однородном поле с напряженностью $\vec{F}$, направленной по оси ox, уравнение (29) имеет вид

$$\left[1 - F^2 \frac{d^2\mathfrak{L}'}{dH'^2} \Big/ \frac{d\mathfrak{L}'}{dH'}\right] \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0, \tag{33}$$

где

$$\frac{d^2\mathfrak{L}'}{dH'^2} \Big/ \frac{d\mathfrak{L}'}{dH'} = 2\tau. \tag{34}$$

Скорость распространения сигнала по оси ox равна

$$v = \sqrt{1 - 2\tau F^2}. \tag{35}$$

В таком же поле уравнение (30) имеет вид

$$\left[1 - F^2 \frac{d^2(\sqrt{-G'}\mathfrak{L}')}{dH'^2} \Big/ \frac{d(\sqrt{-G'}\mathfrak{L}')}{dH'}\right] \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0, \tag{36}$$

где

$$\frac{d^2(\sqrt{-G'}\mathfrak{L}')}{dH'^2} \Big/ \frac{d(\sqrt{-G'}\mathfrak{L}')}{dH'} \approx 2\sigma + \gamma' = -2\sigma. \tag{37}$$

Скорость сигнала, распространяющегося по оси ox, равна

$$v = \sqrt{1 + 2\sigma F^2}. \tag{38}$$

Сравнивая (35) и (38) с учетом (32), мы увидим, что возникновение неминковской метрики при наличии существенно нелинейного поля меняет скорость распространения сигнала. Если заранее известен лагранжиан, то измерение скорости сигнала в заданном поле представляет собой один из способов экспериментальной проверки теории. Обобщение этих результатов на случай электромагнитного поля приведет к предсказаниям, которые можно сравнить с опытом.

§4. Универсальное взаимодействие существенно нелинейного поля со всеми другими полями

В заключение мы рассмотрим весьма интересное физическое следствие искривления пространства-времени в существенно нелинейном поле. Мы покажем, что такое поле должно взаимодействовать со всеми другими полями. Действительно, метрика пространства-времени $G^{\mu\nu}$ полностью определяется заданным полем

$$G^{\mu\nu} = a(H)\, g^{\mu\nu} + \beta(H)\, g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} \Phi_{\mu'} \Phi_{\nu'},$$

если известен лагранжиан. Уравнения для других полей, даже свободных, должны содержать явно этот метрический тензор, поскольку они инвариантны относительно преобразований пространственно-временных координат, сохраняющих интервал (1). Это приведет к эффективному универсальному взаимодействию поля Ф со всеми другими полями. Так, например, вместо уравнения

$$\left(g^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + m^2\right) A(x) = 0 \tag{39}$$

для свободного скалярного поля $A(x)$ мы имеем теперь соответствующее уравнение в римановом пространстве:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-G}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-G}\, G^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) + m^2\right] A(x) = 0. \tag{40}$$

В слабом поле Ф это уравнение можно переписать приблизительно следующим образом:

$$\left(g^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + m^2\right) A(x) + \beta\Big(g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} \Phi_\mu \Phi_\nu \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} + \tag{41}$$

$$+ g^{\sigma\sigma} \Phi_{\sigma\sigma}\, g^{\nu\nu'} \Phi_\nu \frac{\partial}{\partial x^{\nu'}}\Big) A(x) = 0.$$

Очевидно, что второй член в левой части последнего уравнения описывает взаимодействие между полями $\Phi(x)$ и $A(x)$.

Таким образом, искривление пространства-времени в существенно нелинейном поле Ф влечет за собой взаимодействие этого поля со всеми другими полями. Обобщение этих результатов на случай электромагнитного поля приведет к физическим предсказаниям, доступным экспериментальной проверке. Это будет сделано в следующей работе.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить Д.И. Блохинцева и М.А. Маркова за интерес к работе и ценные советы, а также Дао Вонг Дык за стимулирующие дискуссии.

Литература

1. Д.И. Блохинцев. ДАН СССР, 82, 553 (1953).
2. D.I. Blokhinsev. Nuovo Cim., Supp. X, 3, 629 (1956).
3. М. Свирский. Вест.МГУ, 5, 43 (1951).
4. Д.И. Блохинцев. ДАН СССР, 168, 774 (1966).
5. Дао Вонг Дык, Нгуен Ван Хьеу. ТМФ, 2, 55 (1970).
6. W.Heisenberg, L.Euler. Z.Physik, 98, 714 (1936).
7. Д.И. Блохинцев, В.В. Орлов. ЖЭТФ, 25, 513 (1953).

Рукопись поступила в издательский отдел
5 октября 1971 года.