ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 6034

Г.М. Десимиров

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

О КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОМ ОПИСАНИИ РАССЕЯНИЯ НУКЛОНОВ НА МАЛЫЕ УГЛЫ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

1971

P2 - 6034

Г.М. Десимиров

О КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОМ ОПИСАНИИ РАССЕЯНИЯ НУКЛОНОВ НА МАЛЫЕ УГЛЫ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

Направлено в "Изв. ФИ БАН"

1. В некоторых работах [1,2,3,4,5] рассматривалось рассеяние нуклонов при высоких энергиях в рамках квазипотенциального подхода Логунова-Тавхелидзе. В них изучалась простая модель чисто упругого рассеяния на локальном, гладком квазипотенциале гауссовского типа. В настоящей работе применяется квазипотенциальный подход в формулировке И. Тодорова для рассмотрения рассеяния нуклонов на малые углы при высоких энергиях. Амплитуда рассеяния строится в виде ряда борновских приближений путем итерации квазипотенциального уравнения. Выбран случай рассеяния на малые углы, для которого предлагается приближенная формула структуры борновского ряда.

2. Квазипотенциальное уравнение выбирается в виде, предложенном Тодоровым в [6,7]. Пренебрегая спиновой зависимостью, для амплитуды рассеяния $T_w(\vec{p}, \vec{q})$ имеем уравнение

$$T_w(\vec{p},\vec{q}) + V_w(\vec{p},\vec{q}) + \frac{1}{\pi^2 w} \int_{-\infty} \frac{V_w(\vec{p},\vec{k})\, T_w(\vec{k},\vec{q})\, d^3\vec{k}}{\vec{k}^2 - \vec{p}^2 - i\epsilon} = 0 , \qquad (1)$$

где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ -импульс одной из частиц в начальном и в конечном состоянии соответственно, $w = 2\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2} = 2\sqrt{\vec{q}^{\,2} + m^2}$ – полная энергия рассматриваемой системы из двух скалярных нуклонов в с.ц.м., $\vec{p}^{\,2} = \vec{p}^{\,\prime 2} = \vec{q}^{\,2}$, $V_w(\vec{p}, \vec{q})$ – квазипотенциал.

Рассматривая простейшую модель, по соображениям, аналогичным приведенным в работах /1–5/, выберем квазипотенциал в гауссовском виде, который является гладкой локальной функцией вида

$$V_w(\vec{p}, \vec{q}) = -i s g_0 e^{at} \tag{2}$$

с двумя феноменологическими положительными константами g_0 и a,

$$s = w^2 = 4(\vec{p}^{\,2} + m^2) = 4(\vec{q}^{\,2} + \vec{m}^2), \qquad t = -(\vec{p} - \vec{q})^2 .$$

При таком выборе квазипотенциала решение (1) в первом борновском приближении имеет вид

$$T_w^{(1)}(\vec{p}, \vec{q}) = i s g_0 e^{at} \tag{3}$$

с правильно выбранной положительной мнимой частью. Полную амплитуду рассеяния можно представить в виде борновского ряда:

$$T_w(\vec{p}, \vec{q}) = \sum_{n=1}^{\infty} T_w^{(n)}(\vec{p}, \vec{q}), \tag{4}$$

где

$$T_w^{(n+1)}(p, q) = \frac{(i s g_0)^{n+1}}{(\pi^2 w)^n} \int \dots \int \frac{e^{-a[(\vec{p} - \vec{k}_1)^2 + (\vec{k}_1 - \vec{k}_n)^2 + \dots + (\vec{k}_n - \vec{q})^2]} d^3\vec{k}_1\, d^3\vec{k}_2 \cdots d^3\vec{k}_n}{\prod_{l=1}^{n} [\vec{k}_l^{\,2} - p^2 - i\epsilon]} . \tag{5}$$

$$(n = 1, 2, \dots \infty)$$

3. Будем искать асимптотическое представление борновских приближений $T_w^{(n+1)}(\vec{p}, \vec{q})$ при высоких энергиях, т.е. при больших p. Воспользуемся существованием экстремума в экспоненциальном множителе в (5) для того, чтобы найти искомое представление с помощью многомерной асимптотической формулы Лапласа. Совершая в (5) аналогично /4/ сдвиг экстремальной точки

$$\vec{k}_s^{\,0} = \frac{(n+1-s)\vec{p} + s\vec{q}}{n+1} \qquad (s = 1,2,\ldots n) \tag{6}$$

в нуль и переходя к базису продольных $\vec{\rho}_l$ и поперечных составляющих $\vec{\Delta}_l$, проинтегрируем (5) по n_0 $\vec{\Delta}_l$ с помощью формулы Лапласа, в результате чего получим:

$$T_w^{(n+1)}(\vec{p},\vec{q}) = \frac{(isg_0)^{n+1}}{(\pi a w)^n} \; \frac{e^{\frac{at}{n+1}}}{n+1} I_w^{(n+1)}(\vec{p},\vec{q}), \tag{7}$$

где

$$I_w^{(n+1)}(\vec{p},\vec{q}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int \frac{e^{-a[\rho_1^2+(\rho_1-\rho_2)^2+\ldots+(\rho_{n-1}-\rho_n)^2+\rho_n^2]}\, d\rho_1\, d\rho_2 \ldots d\rho_n}{\prod_{l=1}^{n}[(\vec{\rho}_l + \vec{k}_l^{\,0})^2 - p^2 - i\epsilon]}. \tag{8}$$

Вклад полюсов в (8) учтем обычным образом, представляя каждый знаменатель в виде

$$\frac{1}{(\vec{p}_l + \vec{k}_l^{\,0})^2 - \rho^2 - i\epsilon} = \frac{1}{a_l^{(-)} + a_l^{(+)}}\left[\frac{1}{\rho_l - a_l^{(-)} - i\epsilon} - \frac{1}{\rho_l + a_l^{(+)} + i\epsilon}\right], \tag{9}$$

где для полюсов $a_l^{(\pm)}$ имеем

$$a_l^{(\pm)} = \sqrt{p^2\cos^2\frac{\theta}{2} + 4p^2\frac{(n+1-i)i}{(n+1)^2}\sin^2\frac{\theta}{2}} \pm p\cos\frac{\theta}{2}. \tag{10}$$

Здесь θ – угол рассеяния. Для малых значений θ полюса $a_l^{(-)}$ будут малыми, а $a_l^{(+)}$ – большими. Ниже будет рассмотрен главный член, учитывающий вклад только малых полюсов $a_l^{(-)}$, ввиду того, что в случае малых углов рассеяния он дает основной вклад в борновские приближения (см. /4/).

4. Используя спектральное представление гауссовских множителей

$$e^{-a\rho^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\rho z}\phi(z)\,dz\ , \qquad \phi(z) = \frac{1}{2\sqrt{a\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{4a}}\ , \tag{11}$$

а также формулу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ia\rho}\,d\rho}{\rho - a - i\epsilon} = e^{ia a}\ 2\pi i\,\theta(a)\ , \tag{12}$$

для главного члена из (8) получаем

$$I_w^{(n+1)}(\vec p, \vec q) = \frac{(2\pi i)^n\ K_w^{(n)}(\vec p, \vec q)}{(2\sqrt{a\pi})^{n+1} \prod\limits_{l=1}^{n} [a_l^{(-)} + a_l^{(+)}]}\ , \tag{13}$$

где

$$K_w^{(n)}(\vec p, \vec q) = \int \underset{-\infty}{\overset{+\infty}{\cdots}} \int \theta(z_1 - z_2)\,\theta(z_2 - z_3)\ldots\theta(z_n - z_{n+1}) \times$$
$$\times\, e^{i[a_1^{(-)}(z_1 - z_2) + a_2^{(-)}(z_2 - z_3) + \ldots + a_n^{(-)}(z_n - z_{n+1})]}\, e^{-\frac{1}{4a}(z_1^2 + \ldots + z_{n+1}^2)}\, dz_1 \ldots dz_{n+1}\ . \tag{14}$$

Нетрудно увидеть, что полное борновское приближение $T_w^{(n+1)}(\vec p, \vec q)$ при высоких энергиях выражается в виде суммы интегралов, похожих на (14), содержащих комбинации из полюсов $a_l^{(-)}$ и $a_l^{(+)}$. Из этой структуры выделен изучаемый нами главный член.

Ввиду малости полюсов $a_l^{(-)}$ при малых углах рассеяния в качестве первого приближения мы рассмотрим $K_w^{(n)}(\vec p, \vec q)$ в линеаризованном относительно $a_l^{(-)}$ виде, что эквивалентно линеаризации комплексной экспоненты в (14). Таким образом, имеем

$$K_w^{(n)}(\vec p, \vec q) = B^{(n)} + i\sum_{s=1}^{n} a_s^{(-)}[A_s^{(n)} - A_{s+1}^{(n)}]\ , \tag{15}$$

где

$$A_s^{(n)} = \int \overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\cdots}} \int \theta(z_1-z_2)\ldots\theta(z_n-z_{n+1})\, e^{-\frac{1}{4a}(z_1^2+z_2^2+\ldots z_{n+1}^2)} z_s\, dz_1\, dz_2 \ldots dz_{n+1}, \quad (16)$$

$$B^{(n)} = \int \overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\cdots}} \int \theta(z_1-z_2)\ldots\theta(z_n-z_{n+1})\, e^{-\frac{1}{4a}(z_1^2+z_2^2+\ldots+z_{n+1}^2)} dz_1\, dz_2 \ldots dz_{n+1}. \quad (17)$$

Интеграл $B^{(n)}$ имеет значение

$$B^{(n)} = \frac{(2\sqrt{a\pi})^{n+1}}{(n+1)!}\,. \quad (18)$$

Интегралы $A_s^{(n)}$ допускают представления

$$A_s^{(n)} = 2a\,[\,U_s^{(n)} - U_{s-1}^{(n)}\,]\,, \quad (19)$$

где

$$U_s^{(n)} = \int \overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\cdots}} \int \theta(z_1-z_2)\ldots\theta(z_{n-1}-z_n)\, e^{-\frac{1}{4a}[z_1^2+\ldots+2z_s^2+\ldots+z_n^2]} dz_1\, dz_2 \ldots dz_n \quad (20)$$

при дополнительных условиях

$$U_0^{(n)} = U_{n+1}^{(n)} = 0\,. \quad (21)$$

Пользуясь известной техникой (см. /8/), многократный интеграл /20/ сводим к однократному:

$$U_s^{(n)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, \frac{(\sqrt{a\pi})^n}{(s-1)!(n-s)!} \int_{-\infty}^{+\infty} [1-\Phi(x)]^{s-1} e^{-2x^2} [1+\Phi(x)]^{n-s} dx, \quad (22)$$

где $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ – функция ошибок.

С помощью формул (22,19,15,13,7) легко получить приближенную формулу главного члена борновского приближения $T_w^{(n+1)}(\vec{p},\vec{q})$ в случае малых углов θ, которая выражает его через однократный интеграл.

5. Трудность, связанную с последним оставшимся интегрированием, можно преодолеть, если для учитывавшихся полюсов использовать приближенные значения. Из (10) для полюсов $a_i^{(-)}$ имеем в низшем порядке по углу θ:

$$a_i^{(-)} \sim \frac{p}{2} \frac{(n+1-i)\,i}{(n+1)^2}\,\theta^2 \,. \tag{23}$$

При таком выборе $a_i^{(-)}$ в сумме (15) функция ошибок сокращается, и для $K_w^{(n)}(\vec{p},\vec{q})$ получаем простое выражение

$$K_w^{(n)}(\vec{p},\vec{q}) = \frac{(2\sqrt{a\pi})^{n+1}}{(n+1)!}\left[1 + i\,\frac{\sqrt{ap}}{\sqrt{a\pi}}\,\frac{n}{n+1}\,\theta^2\right], \tag{24}$$

а также соответствующее простое выражение для $T_w^{(n+1)}(\vec{p},\vec{q})$.

Как здесь, так и выше, приближенная формула вводит поправку, подобную введенной в работе /5/, в амплитуду рассеяния, которая является малой для малых углов рассеяния, а также чисто действительной.

Подобным образом можно изучать и поправки более высокого порядка по полюсам $a_i^{(-)}$ / или по углу θ /. При этом четные порядки будут давать поправки к мнимой части, а нечетные – к вещественной части амплитуды рассеяния, что видно из формулы (14).

Автор выражает свою благодарность И. Тодорову, В. Ризову и Ю. Полю за полезные обсуждения.

Литература

1. V.R. Garsevanishvili, V.A. Matveev, L.A. Slepchenko, A.N. Tavkhelidze, Preprint JINR, E2-4251, Dubna, 1969. Talk given at the Coral Gables Conference, Miami, Gordon and Breach Science Publ., p. 74, 1969.
2. В.Р. Гарсеванишвили, С.В. Голоскоков, В.А. Матвеев, Л.А. Слепченко. Препринт ОИЯИ, Е2-4361, Дубна, 1969; Ядерная физика, 10, 627 (1969).
3. V.R. Garsevanishvili, V.A. Matveev, L.A. Slepchenko, A.N. Tavkhelidze. Preprint ICTP, IC/69/87, Trieste, 1969.
4. Проблемы физики элементарных частиц и атомного ядра, т. 1, вып. 4., стр. 92, Атомиздат, 1970.
5. V.R. Garsevanishvili, S.V. Goloskokov, V.A. Matveev, L.A. Slepchenko, A.N. Tavkhelidze. Preprint JINR, E2-5244, Dubna, 1970.
6. I.T. Todorov. Preprint ICTP-IC-70/59, Trieste, 1970.
7. C. Itzykson, V.G. Kadyshevsky, I. Todorov. Phys.Rev., D1, No. 10, 2823-2831 (1970).
8. T. Kinoshita. Progr.Theor.Phys., 5, 473 (1950).

Рукопись поступила в издательский отдел
14 сентября 1971 года.