ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 6033

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В.М.Лебеденко

ОПИСАНИЕ НЕПРИВОДИМЫХ УНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ НЕКОМПАКТНОЙ ГРУППЫ ОБОБЩЕННЫХ СДВИГОВ ПЯТИМЕРНОГО ГИПЕРБОЛОИДА

1971

P2 - 6033

В.М.Лебеденко

ОПИСАНИЕ НЕПРИВОДИМЫХ УНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ НЕКОМПАКТНОЙ ГРУППЫ ОБОБЩЕННЫХ СДВИГОВ ПЯТИМЕРНОГО ГИПЕРБОЛОИДА

Направлено в ТМФ

1. Введение

1. В работе В.Г. Кадышевского [1] изложен новый подход в квантовой теории поля, использующий введенное им оригинальное понятие относительного импульса. В основе работы лежит гипотеза о том, что относительные импульсы принадлежат пространству Де Ситтера. Группа движений этого пространства совпадает с группой движений однополостного пятимерного гиперболоида.

Большую роль в этой работе играет группа обобщенных (орисферических) сдвигов пятимерного гиперболоида, которая в орисферических координатах (ω , $\vec{X}$) может быть представлена как группа преобразований вида

$$\omega' = \omega + a$$
$$\vec{X}' = e^{-a}\vec{X} + \vec{\sigma}$$

Заметим, что в работе [2] рассматривается аналогичная задача. Только разномерность пространства там на единицу меньше.

Легко показать, что указанная группа изоморфна четырехпараметрической группе Ли, которую мы обозначаем посредством K , состоящей из действительных векторов $(x_0,\vec{X}) = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ $(x_i \in (-\infty, +\infty))$. Операция в K задается так:

$$(x_0, \vec{X})(y_0, \vec{Y}) = (x_0 + y_0, e^{-y_0}\vec{X} + \vec{Y}) \qquad (1)$$

Для дальнейшего развития указанного подхода в квантовой теории поля важное значение имеет Фурье-анализ на группе K. В частности, необходимо знание всех, с точностью до эквивалентности, унитарных неприводимых представлений этой группы.

Построению этих представлений и посвящена настоящая работа.

2. Очевидно, что K некомпактна в обычной топологии евклидова пространства E_4.

Группа K принадлежит к классу так называемых экспоненциальных групп (см. п. 1 гл. II, п.4 гл. III). Теория представлений этих групп хорошо разработана. В главе II приводится алгоритм построения всех, с точностью до эквивалентности, неприводимых представлений экспоненциальной группы, заимствованный нами из работы Л. Пуканского /3/. Используя этот алгоритм, мы построили все, с точностью до эквивалентности, неприводимые унитарные представления группы K (см. гл. V). Оказалось, что все они, за исключением одномерных, бесконечномерны. Каждое такое представление задается вектором $c = (0, \vec{C})$, где $\vec{C} = (c_1, c_2, c_3)$, т.е. тремя параметрами. В пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ эти представления имеют вид:

$$U_c(g) f(y) = e^{i e^{y+x_0} (\vec{C}, \vec{X})} f(y + x_0), \qquad (2)$$

где

$$g = (x_0, \vec{X}) \in K, \quad f(y) \in L_2(-\infty, \infty),$$

$(\vec{C}, \vec{X})$ – обычное скалярное произведение векторов $\vec{C}$ и $\vec{X}$. В главе VII приводится серия неэквивалентных неприводимых представлений вида (2). Каждое неприводимое унитарное представление группы K эквивалентно одному из этой серии.

II. Определение экспоненциальной группы и алгоритм построения всех ее унитарных неприводимых представлений

Существует несколько эквивалентных определений экспоненциальной группы (см.[3]). Приведем одно из них: группа Ли G и соответствующая ей алгебра Ли L, называются экспоненциальными, если числовая функция.

$$\det((\exp ad\,\ell - I)/\,ad\,\ell) \qquad (\ell \in L) \tag{3}$$

нигде не обращается в ноль на L (при этом L считается действительной алгеброй Ли, а G - связной и односвязной группой). Напомним, что линейный оператор $ad\,\ell$ действует в L по формуле

$$ad\,\ell\,(x) = [\ell, x] \in L,$$

где $\ell, x \in L$, а $[\ell, x]$ - коммутатор ℓ и x.

Его можно задать некоторой квадратной действительной матрицей относительно базиса L. Кроме того, под оператором

$$(\exp ad\,\ell - I)/\,ad\,\ell$$

подразумевается ряд

$$I + \frac{ad\,\ell}{2} + \frac{(ad\,\ell)^2}{3!} + \dots + \frac{(ad\,\ell)^n}{(n+1)!} + \dots \tag{4}$$

В работе Л. Пуканского[3] приводится алгоритм построения некоторого класса неприводимых унитарных представлений экспоненциальной группы. Там же приводится доказательство того, что этот алгоритм дает все с точностью до эквивалентности представления такого рода. Но прежде чем приводить указанный алгоритм, мы остановимся на некоторых понятиях, которые в нем используются.

Пусть L - алгебра Ли экспоненциальной группы Ли G. Через L' обозначим пространство, сопряженное к L, т.е. пространство всех линейных функционалов $f(x)$ на L.

Если $H \subseteq L$ - некоторая подалгебра L, то через $\exp H$ обозначим подгруппу G, являющуюся образом H при экспоненциальном отображении: $L \to G$ (в частности $G = \exp L$). Скалярным произведением элементов $x \in L$ и $f \in L'$ называется значение $f(x) \overset{\text{опр.}}{=\!=} (x, f)$. При этом x и f считаются ортогональными, если $(x, f) = 0$. Подмножество $S \subseteq L$ и элемент $f \in L'$ считаются ортогональными, если $(x, f) \equiv 0$ при любом $x \in S$. Если $H \subseteq L$ - подалгебра L, то ортогональным дополнением H в L' называется множество $H^{\perp} \subseteq L'$, состоящее из всех элементов $f \in L'$, для которых $(x, f) = 0$ при любом $x \in H$.

Обозначим через $\rho(\ell)$ оператор, действующий в пространстве L', матрица которого равна $(\exp ad\, \ell)'$ (где " $'$ " означает транспонирование). Орбитой $\Omega(f)$ элемента $f \in L'$ называется множество всех значений $\rho(\ell) f$ при $\ell \in L$.

Подалгебра $H \subseteq L$ называется подчиненной элементу $f \in L'$, если множество $[H, H]$ ортогонально f. Если H подчинена f, то будем писать $H < f$.

При $H < f$ формула

$$\chi(\exp h) = \exp[i(h, f)]$$

(где χ - характер $\exp H$, а (h, f) - скалярное произведение, определенное выше) определяет непрерывное одномерное унитарное представление подгруппы $\exp H \subseteq G$.

Представлением $ind(H, f)$ называется представление, индуцированное этим (характером) представлением (см. [3,4]).

Представление $ind(H, f)$ неприводимо тогда и только тогда, когда выполняются условия (см. [3]):

$(*)\quad \dim H = \dim L - \frac{1}{2}\dim(\Omega(f)),$

$(\ast_*)$ линейное многообразие

$f + H^{\perp} \subseteq \Omega(f).$

Если $H < f$, $H_1 < f_1$, то представления $ind(H,f)$ и $ind(H_1,f_1)$. эквивалентны тогда и только тогда, когда f и f_1 лежат на одной орбите, т.е. $\Omega(f) = \Omega(f_1)$ (см. /3/). И, наконец, основное, на наш взгляд, утверждение, доказанное в работе /3/: каждое неприводимое унитарное представление экспоненциальной группы G унитарно эквивалентно некоторому представлению $ind(H,f)$, при подходящем выборе H и f.

Из сказанного выше вытекает следующий алгоритм построения всех с точностью до эквивалентности унитарных представлений группы G:

1) нахождение всех орбит в L' относительно $\rho(\ell)$;

2) выбор представителя f на каждой орбите Ω;

3) выбор подалгебры $H \subseteq L$, подчиненной $f(H < f)$, удовлетворяющей условиям $(*)$ и $(\ast_*)$, для каждого представителя f;

4) построение представлений $ind(H,f)$.

III. О группе K и ее алгебре Ли

1. Приведем матричную реализацию группы K, то есть точное представление K в евклидовом пространстве (E_4). Каждому элементу $g = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_0, \vec{X}) \in K$ поставим в соответствие матрицу

$$\phi(g) = \begin{pmatrix} e^{-x_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-x_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-x_0} & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Если $g' = (y_0, \vec{Y}) = (y_0, y_1, y_2, y_3)$, , то соотношение

$$\phi(g)\phi(g') = \begin{pmatrix} e^{-x_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-x_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-x_0} & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-y_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-y_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-y_0} & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-(x_0+y_0)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-(x_0+y_0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-(x_0+y_0)} & 0 \\ e^{-y_0}x_1+y_1 & e^{-y_0}x_2+y_2 & e^{-y_0}x_3+y_3 & 1 \end{pmatrix} = \phi(g g')$$

показывает, что ϕ – гомоморфизм. А так как единицей группы K является элемент $e = (0, 0, 0, 0) \in K$, $\phi(e) = E$, $\phi^{-1}(E) = e$, то ϕ – изоморфизм. Легко показать, что ϕ непрерывно.

2. Алгебра Ли L группы K.

Матричная реализация (5) позволяет легко найти коммутационные соотношения для алгебры Ли группы K. Эту алгебру обозначим через $L = \{ e_0, e_1, e_2, e_3 \}$, где

$$e_0 = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_1 = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Коммутаторы

$$[e_0, e_j] = e_j \qquad (j = 1,2,3),$$
$$[e_i, e_j] = 0 \qquad (i,j = 1,2,3) \tag{6}$$

Эти соотношения определяют L. Вообще, можно считать, что L – абстрактная действительная алгебра Ли с базисом e_0, e_1, e_2, e_3, элементы которого удовлетворяют соотношениям (6).

3. Оператор $ad\,\ell$ для L.

Пусть $\ell = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$. Посмотрим, как действует оператор $ad\,\ell\,(x) = [\ell, x]$ на элементы базиса:

$$[\ell, e_0] = x_0[e_0, e_0] + x_1[e_1, e_0] + x_2[e_2, e_0] + x_3[e_3, e_0] =$$
$$= -x_1 e_1 - x_2 e_2 - x_3 e_3,$$

$$[\ell, e_1] = x_0[e_0, e_1] + x_1[e_1, e_1] + x_2[e_2, e_1] + x_3[e_3, e_1] =$$
$$= x_0[e_0, e_1] = x_0 e_1,$$

$$[\ell, e_2] = x_0[e_0, e_2] = x_0 e_2$$

$$[\ell, e_3] = x_0[e_0, e_3] = x_0 e_3$$

Теперь можно построить матрицу оператора $ad\,\ell$ в базисе e_0, e_1, e_2, e_3:

$$ad\,\ell = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_1 & x_0 & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & x_0 & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 & x_0 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Для последующего нам понадобится общий вид матрицы $(ad\,\ell)^n$. Найдем матрицу $(ad\,\ell)^2$:

$$(ad\,\ell)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_1 & x_0 & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & x_0 & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_1 & x_0 & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & x_0 & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 & x_0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_1 x_0 & x_0^2 & 0 & 0 \\ -x_1 x_0 & 0 & x_0^2 & 0 \\ -x_3 x_0 & 0 & 0 & x_0^2 \end{pmatrix}$$

Легко установить, что

$$(ad\,\ell)^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_1 x_0^{n-1} & x_0^n & 0 & 0 \\ -x_2 x_0^{n-1} & 0 & x_0^n & 0 \\ -x_3 x_0^{n-1} & 0 & 0 & x_0^n \end{pmatrix}.$$

Если $x_0 = 0$, то при всех $n \geq 1$ $(ad\,\ell)^n = 0$. Если $x_0 \neq 0$, то матрицу $(ad\,\ell)^n$ $(n \geq 1)$ можно записать так

$$(ad\,\ell)^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{x_1}{x_0} x_0^n & x_0^n & 0 & 0 \\ -\frac{x_2}{x_0} x_0^n & 0 & x_0^n & 0 \\ -\frac{x_3}{x_0} x_0^n & 0 & 0 & x_0^n \end{pmatrix} \qquad (8)$$

4. Экспоненциальность группы K.

Покажем, что K является экспоненциальной группой. Во-первых, K является связной и односвязной, как евклидово пространство E_4, естественная топология которого совпадает с топологией K (см. /5/). Проверим, что числовая функция (3) нигде не обращается в ноль на L.

Найдем сумму ряда (4)

$$E + \frac{ad\ell}{2} + \frac{(ad\,\ell)^2}{3!} + \dots + \frac{(ad\,\ell)^n}{(n+1)!} + \dots =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-x_1}{x_0}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x_0^n}{(n+1)!}\right) & 1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x_0^n}{(n+1)!} & 0 & 0 \\ \frac{-x_2}{x_0}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x_0^n}{(n+1)!}\right) & 0 & 1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x_0^n}{(n+1)!} & 0 \\ \frac{-x_3}{x_0}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x_0^n}{(n+1)!}\right) & 0 & 0 & 1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x_0^n}{(n+1)!} \end{pmatrix}$$

при $\ell = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ и $x_0 \neq 0$.

Так как

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_0^n}{(n+1)!} = \frac{1}{x_0}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_0^n}{n!} - 1\right) = \frac{e^{x_0} - 1}{x_0},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_0^n}{(n+1)!} = \frac{e^{x_0} - 1}{x_0} - 1,$$

то

$$(\exp(ad\,\ell\;)\;-E)/ad\,\ell =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-x_1}{x_0}\left(\frac{e^{x_0}-1}{x_0}-1\right) & \frac{e^{x_0}-1}{x_0} & 0 & 0 \\ \frac{-x_2}{x_0}\left(\frac{e^{x_0}-1}{x_0}-1\right) & 0 & \frac{e^{x_0}-1}{x_0} & 0 \\ \frac{-x_3}{x_0}\left(\frac{e^{x_0}-1}{x_0}-1\right) & 0 & 0 & \frac{e^{x_0}-1}{x_0} \end{pmatrix}$$

Теперь очевидно, что функция (3)

$$\det((\exp ad\,\ell\;-E)/ad\,\ell\;) =$$

$$= \left(\frac{e^{x_0}-1}{x_0}\right)^3 \neq 0 \qquad \text{при } x_0 \neq 0 .$$

Если же $x = 0$, то все члены ряда (4), начиная со второго, равны нулю.

Имеем

$$(\exp ad\,\ell\;-E)/ad\,\ell =$$

$$= E + \frac{ad\,\ell}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-x_1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-x_2}{2} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-x_3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Отсюда $\det((\exp(ad\,\ell) - E)/ad\,\ell) = 1 \neq 0$.

Итак, мы убедились в том, что функция (3) нигде не обращается в ноль на L. Поэтому группа K является экспоненциальной (см. гл. II) и для построения ее унитарных неприводимых представлений можно воспользоваться алгоритмом, приведенным во второй главе.

5. Оператор $\rho(\ell)$ для K.

Для дальнейшего большое значение будет иметь оператор $\rho(\ell) = (\exp ad\,\ell)'$, действующий в пространстве L'. Его матрица получается из матрицы $\exp ad\,\ell$ путем транспонирования. Найдем эту матрицу. Если $\ell = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, то при $x_0 = 0$,

$$ad\,\ell = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(ad\,\ell)^n = 0 \qquad (n \geq 2).$$

Поэтому $\exp(ad\,\ell) = E + ad\,\ell =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x_1 & 1 & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \tag{9}$$

$$\rho(\ell) = \begin{pmatrix} 1 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Если $x_0 \neq 0$, то

$$(ad\,\ell)^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{x_1}{x_0} x_0^n & x_0^n & 0 & 0 \\ -\frac{x_2}{x_0} x_0^n & 0 & x_0^n & 0 \\ -\frac{x_3}{x_0} x_0^n & 0 & 0 & x_0^n \end{pmatrix} \tag{8}$$

и

$$\exp(ad\,\ell\,) = E + ad\,\ell + \frac{(ad\,\ell\,)^2}{2} + \cdots + \frac{(ad\,\ell\,)^n}{n!} + \cdots =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{x_1}{x_0}\left(\sum_1^\infty \frac{x_0^n}{n!}\right) & 1+\sum_1^\infty \frac{x_0^n}{n!} & 0 & 0 \\ -\frac{x_2}{x_0}\left(\sum_1^\infty \frac{x_0^n}{n!}\right) & 0 & 1+\sum_1^\infty \frac{x_0^n}{n!} & 0 \\ -\frac{x_3}{x_0}\left(\sum_1^\infty \frac{x_0^n}{n!}\right) & 0 & 0 & 1+\sum_1^\infty \frac{x_0^n}{n!} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-x_1}{x_0}(e^{x_0}-1) & e^{x_0} & 0 & 0 \\ \frac{-x_2}{x_0}(e^{x_0}-1) & 0 & e^{x_0} & 0 \\ \frac{-x_3}{x_0}(e^{x_0}-1) & 0 & 0 & e^{x_0} \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, что

$$\rho(\ell\,) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{x_1}{x_0}(e^{x_0}-1) & -\frac{x_2}{x_0}(e^{x_0}-1) & -\frac{x_3}{x_0}(e^{x_0}-1) \\ 0 & e^{x_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{x_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{x_0} \end{pmatrix} \qquad (10)$$

Сравнивая формулы (9) и (10), и принимая во внимание то, что $x_i \in (-\infty, \infty)$ могут изменяться независимо, мы приходим к выводу, что матрица $\rho(\ell)$ для K имеет вид

$$\rho(\ell) = \begin{pmatrix} 1 & \beta & \gamma & \delta \\ 0 & e^{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{a} \end{pmatrix} \qquad (11)$$

где параметры a, β, γ и δ могут принимать любые значения из $(-\infty, \infty)$.

IV. Орбиты в L' и выбор пар (H, c) для группы K

1. Пространство L' и орбиты относительно $\rho(\ell)$.

Как известно, пространство L' изоморфно пространству L. В L' можно естественным образом выбрать базис f_0, f_1, f_2, f_3, где $f_i(e_j) = \delta_{ij}$. Тогда относительно этого базиса, каждый элемент $c \in L'$ однозначно записывается в виде

$$c = c_0 f_0 + c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 = (c_0, c_1, c_2, c_3).$$

Пусть $c = (c_0, c_1, c_2, c_3) \in L'$ – произвольный элемент L'. Под действием оператора $\rho(\ell)$ c (см. (11)) переходит в

$$\rho(\ell)\, c = \begin{pmatrix} 1 & \beta & \gamma & \delta \\ 0 & e^{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (c_0+\beta c_1 + \gamma c_2 + \delta c_3 \ , e^{a} c_1 \ , e^{a} c_2 \ , e^{a} c_3) =$$

$$= (c_0, 0, 0, 0) + e^{a} (0, c_1, c_2, c_3) + \tag{12}$$

$$+ (\xi, 0, 0, 0) \, (Sgn\, (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2))$$

Отсюда видно, что если вектор $c = (c_0, 0, 0, 0)$, то его орбита $\Omega(c) = c$ – точка. Если же $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \neq 0$, то

$$\Omega(c) = (c_0, 0, 0, 0) + S_1 + S_2 = \tag{13}$$

$$= S_1 + S_2 ,$$

где S_1 – прямая, состоящая из всех векторов $(\xi, 0, 0, 0)$, а S_2 – полупрямая вида $e^{\alpha}(0, c_1, c_2, c_3) = e^{\alpha}(0, \vec{C})$ всех векторов $k(0, \vec{C})$ $(k > 0)$. Очевидно, что в первом случае $\dim \Omega(c) = 0$, а во втором $\dim \Omega(c) = 2$. Следуя алгоритму главы II, мы выберем представители на каждой орбите. Для орбит первого типа представители, естественно, будут иметь вид $c = (c_0, 0, 0, 0) = (c_0, \vec{0})$. Для орбит второго рода в качестве представителей могут быть выбраны векторы $c' = (0, \vec{C}) = (0, c_1, c_2, c_3)$.

В качестве такого вектора можно выбрать и любой вектор kc', где $k > 0$. Но выбор c' мы конкретизируем в главе VII. Пока будем считать, что $\vec{C} = (c_1, c_2, c_3)$ – произвольный вектор.

IV. Выбор пар (H, c), удовлетворяющих условиям $(*)$ и $(^*_*)$

1. Случай $c = (c_0, 0, 0, 0) \in L'$. В этом случае $\Omega(c) = c$ и $\dim \Omega(c) = 0$. Будем искать подалгебру $H \subseteq L$, удовлетворяющую условиям:

$$(*)' \quad \dim H = \dim L - \frac{1}{2} \dim \Omega(c) = \dim L = 4$$

$$(^*_*)' \quad c + H^{\perp} \subseteq \Omega(c) = c \quad (H^{\perp} = 0)$$

Из условия $(^*_*)'$ следует, что $H = L$. В то же время $H = L$ удовлетворяет условию $(*)'$ и $L < c$. Действительно, $[L, L] \subseteq \subseteq \{e_1, e_2, e_3\}$, а $\{e_1, e_2, e_3\} \perp c$. Итак, для любого $c = (c_0, 0, 0, 0) \in L'$ искомой парой является пара (L, c).

2. Случай $c = (0, \vec{C}) = (0, c_1, c_2, c_3)$.

В этом случае (см. (13)) $\Omega(c) = S_1 + S_2$, где S_1 –

прямая, состоящая из всех векторов $(\xi, 0, 0, 0) = \xi f_0$, а S_2 – полупрямая, состоящая из всех векторов вида $k(0, \vec{C})$ $(k > 0)$, $\dim \Omega(c) = 2$. Покажем, что для $c = (0, \vec{C})$ искомой подалгеброй является $H_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$. Действительно, так как

$$[H_1, H_1] = 0 \perp c \quad , \text{ то } \quad H_1 < c .$$

Размерность H_1

$$\dim H_1 = 3 = \dim L - \frac{1}{2} \dim \Omega(c).$$

Так что выполняется условие $(*)$. Ортогональное дополнение $H_1^{\perp} = \{f_0\} = S_1 \subset L'$,

$$c + H_1^{\perp} = S_1 + (0, \vec{C}) \subset S_1 + S_2$$

То есть выполняется условие $(\substack{*\\*})$ (см. гл. II). Итак, мы получили пару (H_1, c).

V. Построение представлений $ind(H, c)$

1. Построение представлений $ind(H_1, c)$ $(c = (0, \vec{C}))$.

Подгруппа $K \cdot \exp H_1 = \tilde{H}_1$ состоит из всех векторов $(0, x_1, x_2, x_3)$. Очевидно, что $\tilde{H}_1 \lhd K$ (нормальный делитель K). Вектору $c = (0, \vec{C})$ соответствует характер этой подгруппы $\chi_c(\exp h) = \exp(i(h, c))$, где

$$h = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \in H_1 .$$

Очевидно, что $(h, c) = (\vec{X}, \vec{C})$, где $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$, а $(\vec{X}, \vec{C})$ обычное скалярное произведение трехмерных векторов. Итак, $\chi_c(\tilde{h}) = e^{i(\vec{X}, \vec{C})}$, где $c = (0, \vec{C})$, $\tilde{h} = \exp h = (0, \vec{X}) \in \tilde{H}_1$.

Этому характеру соответствует одномерное унитарное представление $\tilde{H}_1$ в пространстве Z (комплексных чисел) $Q_c(\tilde{h})$:

$$Q_c(\tilde{h})z = e^{i(\vec{x},\vec{c})} z, \quad z \in Z . \tag{14}$$

Представление $ind(H_1, c)$, индуцированное $Q_c(\tilde{h})$ (см. /4/), строится в гильбертовом пространстве M_c комплексных функций $f(j)$ на группе K, удовлетворяющих условиям:

$$f(\tilde{h}g) = Q_c(\tilde{h})f(g) = e^{i(\vec{c},\vec{x})} f(g), \tag{15}$$

$$\int_T |f(g)|^2 dt < \infty \tag{16}$$

Условие (16) означает, что функции $f(g)$ из M интегрируемы с квадратом на однородном пространстве $T = K/\tilde{H}$ по мере dt на T, инвариантной относительно группы K.

Скалярное произведение в M_c задается так:

$$(f_1(j), f_2(j)) = \int_T f_1(j)\overline{f_2(j)}\, dt \tag{17}$$

Представление $ind(H_1, c)$–$V_c(g)$ действует в M_c следующим образом:

$$V_c(g)f(g') = f(g'g) \tag{18}$$

Теперь конкретизируем вышесказанное.

Для любого элемента $g \in K$ справедлива запись $j = \hat{t} \times \tilde{h}$, где $\hat{t} = (t, 0, 0, 0) = (t, \vec{O}) \in K$, $\tilde{h} \in \tilde{H}_1 \subset K$. Элемент фактор-группы $T = K / \tilde{H}_1$ $\bar{t}_1 = \hat{t}_1 \tilde{H}_1$ при умножении на $\bar{g} = \hat{t} \cdot \tilde{H}_1$ (справа) переходит в $\bar{t}_1 \bar{j} = \hat{t}_1 \hat{t} \ \tilde{H}_1 = (t_1 + t, \vec{O}) \cdot \tilde{H}_1$. То есть группа K действует на T как группа сдвигов на вещественной прямой. Поэтому мерой dt, инвариантной относительно K, с точностью до числового множителя, является обычная мера Лебега на вещественной прямой (см. /6/).

Итак, условие (16) и формулу (17) можно теперь переписать:

$$\int_{-\infty}^{\infty} | f(y_0, \vec{Y}) |^2 \, dy_0 < \infty \tag{16'}$$

$$(f_1(j), f_2(j)) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y_0, \vec{Y}) \overline{f_2(y_0, \vec{Y})} \, dy_0 \tag{17'}$$

Условие (15) можно выразить следующим образом:

$$f(y_0, e^{-y_0} \vec{X} + \vec{Y}) = e^{i(\vec{C}, \vec{X})} f(y_0, \vec{Y}) \tag{15'}$$

при любых $y_0, \vec{Y}, \vec{X}$).

Положим в равенстве (15') $\vec{Y} = 0$. Тогда

$$f(y_0, e^{-y_0} \vec{X}) = e^{i(\vec{C}, \vec{X})} f(y_0, \vec{O})$$

при любых y_0 и $\vec{X}$.

Отсюда мы заключаем, что

$$f(y_0, \vec{Y}) = e^{ie^{y_0}(\vec{C}, \vec{Y})} f(y_0, \vec{O}) \tag{19}$$

при любом $(y_0, \vec{Y}) \subseteq K$. Иными словами, каждая функция $f(y_0, \vec{Y}) \in M_c$ в некотором смысле определяется своими значениями $f(y_0, \vec{O})$ на прямой $\vec{Y} = \vec{O}$. Ввиду условия (16') функция $f(y_0, \vec{O}) = \Psi(y_0)$ должна быть интегрируемой с квадратом по мере Лебега, т.е. $\Psi(y_0) \in L_2(-\infty, \infty)$. Таким образом, нами установлено соответствие

$$\phi_c: M_c \to L_2(-\infty, \infty),$$

$$\phi_c(f(y_0, Y)) = \Psi(y_0) \in L_2(-\infty, \infty) \tag{20}$$

$$(\phi_c(f(y_0, Y)) = e^{-ie^{y_0}(\vec{C}, \vec{Y})} f(y_0, Y))$$

Покажем, что ϕ_c – взаимно однозначеное соответствие между M_c и $L_2(-\infty, \infty)$. Однозначность ϕ_c очевидна. Если $\Psi(y_0) \in L_2(-\infty, \infty)$, то функция

$$f(y_0, \vec{Y}) = e^{ie^{y_0}(\vec{C}, \vec{Y})} \Psi(y_0) \in M_c$$

Действительно, условие (15') выполняется:

$$f(y_0, e^{-y_0}\vec{X} + \vec{Y}) = e^{ie^{y_0}(\vec{C}, e^{-y_0}\vec{X} + \vec{Y})} \Psi(y_0) =$$

$$= e^{i(\vec{C}, \vec{X})} e^{ie^{y_0}(\vec{C}, \vec{Y})} \Psi(y_0) = e^{i(\vec{C}, \vec{X})} f(y_0, Y).$$

Выполнение (16') очевидно.

Этим установлено, что ϕ_c однозначное отображение M_c на $L_2(-\infty, \infty)$. Оно взаимно однозначно, так как $\phi_c(f(y_0, Y)) = e^{-ie^{y_0}(\vec{C}, \vec{Y})} f(y_0, \vec{Y})$

Отображение ϕ_c изометрично, так как скалярное произведение в M_c

$$(f_1(g), f_2(g))_{M_c} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y_0, \vec{Y}) \overline{f_2(y_0, \vec{Y})} dy_0 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ie^{y_0}(\vec{C},\vec{Y})} \Psi_1(y_0) e^{-ie^{y_0}(\vec{C},\vec{Y})} \overline{\Psi_2(y_0)} dy_0 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(y_0) \overline{\Psi_2(y_0)} dy_0 = (\Psi_1(y_0), \Psi_2(y_0))_{L_2}$$

Положим в формуле (18) $g = (x_0, \vec{X})$, $g' = (y_0, \vec{Y})$

$$(g'g = (x_0 + y_0, e^{-x_0}\vec{Y} + \vec{X}))$$

Тогда представление $V_c(g)$ действует в пространстве M_c так:

$$V_c(g) f(g') = f(g'g) = V_c(g) f(y_0, \vec{Y}) =$$

$$= V_c(g) e^{ie^{y_0}(\vec{C},\vec{Y})} \Psi(y_0) =$$

$$= f(y_0 + x_0, e^{-x_0}\vec{Y} + \vec{X}) =$$

$$= e^{ie^{y_0+x_0}(\vec{C},\, e^{-x_0}\vec{Y}+\vec{X})}\,\Psi(y_0+x_0) =$$

$$= e^{ie^{y_0}(\vec{C},\vec{Y})}\left(e^{ie^{y_0+x_0}(\vec{C},\vec{X})}\,\Psi(y_0+x_0)\right) = \qquad (21)$$

$$= e^{ie^{y_0}(\vec{C},\vec{Y})}\,\Psi'(y_0).$$

Функция

$$\Psi'(y_0) = e^{ie^{y_0+x_0}(\vec{C},\vec{X})}\,\Psi(y_0+x_0) =$$

$$= \phi_c\,(V_c\,(g)f(g'))$$

То есть при ϕ_c представление $V_c\,(g)$ переходит в унитарно эквивалентное представление

$$U_c(g)\ \ (U_c(g) = \phi_c V_c(g)\phi_c^{-1})$$

действующее в пространстве $L_2(-\infty,\infty)$ так:

$$U_c(g)\Psi(y_0) = e^{ie^{y_0+x_0}(\vec{C},\vec{X})}\,\Psi(y_0+x_0)$$

или более наглядно

$$U_c(g)f(y) = e^{ie^{y+x_0}(\vec{C},\vec{X})}\,f(y+x_0) \qquad (22)$$

для любой $f(y) \in L_2(-\infty, \infty)$ и любого $g=(x_0, \vec{X}) \in K$.

2. Представления $ind(L,c)$ $(c=(c_0,\vec{O}))$

Построим представление $ind(L, c)$ для $c=(c_0,\vec{O})$. Как и в первом случае, для каждого такого c имеем одномерное представление $K=\exp L$ в пространстве $Z - Q_c(\tilde{h})$:

$$Q_c(\tilde{h})z = e^{ic_0x_0} z,$$

где $\tilde{h}=(x_0,\vec{X}) \in K$, $z \in Z$.

Но так как K/K – единичная группа, то и все представления $ind(L,c)$ одномерны или тривиальны. Более подробно, пространство M_c в этом случае состоит из функций $f(g)$, удовлетворяющих соотношению (15):

$$f(\tilde{h}g)=f(x_0+y_0, e^{-y_0}\vec{X}+\vec{Y}) = e^{ic_0x_0} f(y_0,\vec{Y})$$

Положим $y_0=0$, $\vec{Y}=\vec{O}$, тогда имеем соотношение

$$f(x_0, e^{-y_0}\vec{X}) = e^{ic_0x_0} f(0,\vec{O})$$

или

$$f(x_0,\vec{X}) = e^{ic_0x_0} f(0,\vec{O}) = e^{ic_0x_0} k, \quad k \in Z, \quad \text{т.е.} \quad \dim M_c = 1.$$

Условие (16) для этого случая вырождается и интеграл от квадрата модуля $f(y_0, \vec{Y}) = e^{ic_0x_0} k$ равен $|k|^2$. Представление $ind(L,c)$, или $V_c(g)$ действует в M_c так:

$V_c(g)f(g') = e^{ic_0x_0} f(g')$, если $c_0 \neq 0$. (т.е. одномерно). Если же $c_0=0$, т.е. $c=(0,\vec{O})$, то представление $ind(L,c)$ тривиально.

Итак, мы построили все представления $ind(H,c)$ для группы K. Причём, мы убедились в том, что бесконечномерными среди них являются только представления $ind(H_1,c)$, где $c=(0,\vec{C})$, $\vec{C}\neq\vec{0}$.

VI. Окончательный результат

В главе V нами найдены все, с точностью до эквивалентности, неприводимые бесконечномерные унитарные представления группы K, реализованные в пространстве $L_2(-\infty,\infty)$. Это представления $U_c(g)(c=(0,\vec{C}))$:

$$U_c(g)f(y)=e^{ie^{y+x_0}(\vec{C},\vec{X})}f(y+x_0) \tag{22}$$

$(g=(x_0,X)$, $(\vec{C},\vec{X})$ – обычное скалярное произведение $\vec{C}$ и $\vec{X}$). Каждое такое представление определяется вектором $\vec{C}=(c_1,c_2,c_3)$, т.е. тремя параметрами. Но, как было указано выше, представления $ind(H,c)$ и $ind(H,c')$ при $c=(0,\vec{C})$, $c'=(0,\vec{C}')$ (а также соответствующие им $U_c(g)$ и $U_{c'}(g)$)) эквивалентны тогда и только тогда, когда $\vec{C}=k\vec{C}'$ и $k>0$. Поэтому; если выбрать из всех $U_c(g)$ серию представлений, для которых все векторы $\vec{C}$ заполняют единичную сферу, то это будут, также, все, с точностью до эквивалентности, неприводимые бесконечномерные унитарные представления K.

Если вектор $\vec{C}=(c_1,c_2,c_3)$ лежит на единичной сфере, то координаты c_i можно выразить через два независимых параметра t и s ($0\leq t\leq\pi$, $0\leq s\leq 2\pi$) так:

$$\begin{aligned} c_1&=\sin t\cos s\\ c_2&=\sin t\sin s\\ c_3&=\cos t \end{aligned} \tag{23}$$

Итак, сформулируем окончательный результат. Каждое неприводимое бесконечномерное унитарное представление группы K эквивалентно некоторому представлению $U(g)$ в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$, действующему по формуле (22), для которого параметры вектора $c = (0; \vec{C}) = (0, c_1, c_2, c_3)$ выражаются через два независимых параметра t и s по формуле (23). Остальные представления одномерны или тривиальны.

В заключение автор выражает глубокую благодарность В.Г. Кадышевскому за инициирование этой работы, Д.П. Желобенко и Х.Я. Христову за ценные советы, Е.П. Жидкову и Г.И. Макаренко за постоянную помощь.

Литература

1. В.Г. Кадышевский. Квантовая теория с неевклидовым пространством относительных импульсов. Препринт ОИЯИ, Р2-5717, Дубна, 1971.
2. В.Р. Гарсеванишвили, В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Скачков. Представление для релятивистской амплитуды рассеяния при высоких энергиях. Теоретическая и математическая физика. Том. 7, №2, 203 (1971).
3. L. Pukanszky. On the Unitary Representations of Exponential Groups. Journal of Functional Analysis 2, 73-113 (1968).
4. А.А. Кириллов. Унитарные представления нильпотентных групп Ли. УМН, т. XVII вып. 4, 106 (1962).
5. А.С. Понтрягин. Непрерывные группы. Москва, ГИТТЛ, 1954 г.
6. П. Халмош. Теория меры. Москва, ИЛ, Москва, 1953 г.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 сентября 1971 года.