

С 324.2

В-676

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна.

P2 - 5998

3449/1-71



ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

М.К.Волков

НЕПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ЛАГРАНЖИАНЫ  
(Высшие порядки теории возмущений)

1971

P2 - 5998

**М.К.Волков**

**НЕПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ЛАГРАНЖИАНЫ**

**(Высшие порядки теории возмущений)**

***Направлено в ТМФ***

**Объединенная библиотека  
ядерных исследований  
БИБЛИОТЕКА**

## 1. В в е д е н и е

Проблеме построения корректной теории с неполиномиальными лагранжианами взаимодействующих полей в последнее время посвящены многочисленные работы <sup>/1/</sup>. Однако в большинстве из них исследовался лишь второй порядок теории возмущений по так называемой главной константе связи. Главным образом изучалась проблема построения двухточечной функции Грина в таких теориях – суперпропагатора. И лишь в немногих работах делались попытки рассмотрения высших порядков теории возмущений <sup>/2/</sup>. Однако до сих пор не было достигнуто полной ясности в таких вопросах, как, например, выполнение условия унитарности  $S$  – матрицы в произвольном порядке теории возмущений, асимптотического поведения амплитуд рассеяния в  $N$  – м порядке и конечности теории.

Настоящая работа является еще одной попыткой вернуться ко всем перечисленным вопросам на основе рассмотрения наиболее общего неполиномиального лагранжиана взаимодействия. Особенно тщательно будет исследован третий порядок теории возмущений, где впервые мы встречаемся с проблемой определения интегралов от произведения обобщенных функций – суперпропагаторов. Мы покажем, как получать конечные выражения для таких интегралов и докажем выполнение условия унитарности

$S$ -матрицы в этом порядке. Затем будет доказано, что теория остается конечной в любом порядке теории возмущений, будет определен порядок роста амплитуд рассеяния при больших значениях импульса в  $N$ -м порядке и показано, что во всех порядках он один и тот же.

Наша работа близка к работе Ж. Тэйлора <sup>/2/</sup>, в которой автор с помощью предложенного нами метода <sup>/3/</sup> также исследует высшие порядки теории возмущений в теории с неполиномиальным (экспоненциальным) лагранжианом. Но мы предлагаем несколько иной подход к доказательству конечности теории, определению порядка роста амплитуд и более тщательно рассматриваем третий порядок теории возмущений, в частности, доказываем унитарность  $S$ -матрицы в этом порядке в импульсном пространстве.

2. Конечность теории в третьем порядке по  $G$  и асимптотическое поведение амплитуды рассеяния при  $s \rightarrow \infty$

Неполиномиальный лагранжиан скалярного поля  $\phi(x)$  в общем виде можно записать в форме бесконечного ряда по степеням  $\phi^n(x)$  :

$$\mathcal{L}_{\text{вз.}}(\phi) = G \sum_0^{\infty} \frac{u(n)}{n!} : \phi^n(x) : \quad (2.1)$$

(Для удобства записи мы пишем сумму от 0, но полагаем  $u(0)=u(1)=u(2)=0$ ).

Рассмотрим диаграмму, изображенную на рис. 1, соответствующую рассеянию двух скалярных частиц. Амплитуду рассеяния, соответствующую

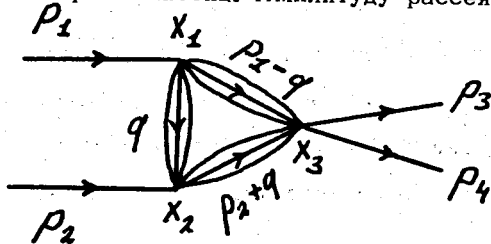


Рис. 1

шую этой диаграмме в  $x$ -пространстве, можно записать в виде

$$F_{211}(x_1, x_2, x_3) = \sum_0^{\infty} u(2+n_1+n_2)u(1+n_1+n_3)u(1+n_2+n_3) \times$$

$$\times \frac{[-i\Delta^c(x_1-x_2)]^{n_3} [-i\Delta^c(x_1-x_3)]^{n_2} [-i\Delta^c(x_2-x_3)]^{n_1}}{n_3! n_2! n_1!} \quad (2.2)$$

$\Delta^c(x)$  - пропагатор свободной частицы. Выражая суммы через интегралы типа Меллина-Бернса, вводя достаточно большие параметры  $\gamma_i$  для того, чтобы можно было в этих интегралах выпрямить контуры интегрирования так, чтобы они шли параллельно мнимым осям  $0 < \text{Re} z_i < 1$ , мы можем перейти к импульсному пространству, не встречаясь при этом с ультрафиолетовыми расходимостями (см. <sup>1/3/</sup>, а также <sup>1/2/</sup>)

$$F_{\gamma}(p_1, p_2) = (2\pi)^9 \prod_1^3 \int_{a_i - i\infty}^{a_i + i\infty} dz_i \frac{\text{ctg} \pi z_i [(4\pi)^2 e^{i\pi}]^{-z_i}}{\sin \pi \gamma_i z_i \Gamma(z_i - 1) \Gamma(z_i) \Gamma(z_i + 1)} u(2+z_1+z_2) \times$$

$$\times u(1+z_1+z_3) u(1+z_2+z_3) \times \int d^4 q (q^2 + i\epsilon)^{z_3-2} [(p_1 - q)^2 + i\epsilon]^{z_2-2} \times$$

$$\times [(p_2 + q)^2 + i\epsilon]^{z_1-2} + F_{\gamma}^0(p_1, p_2). \quad (0 < a_i < 1). \quad (2.3)$$

Мы рассматриваем здесь случай безмассовых частиц.

$$p_1^2 = p_2^2 = 0, (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 = s, \delta^4(p_1) = \delta^4(p_2) = \delta^4(p_1 + p_2) = 0.$$

$$F_{\gamma}^0(p_1, p_2) = (2\pi)^{10} \prod_1^2 \int_{a_i - i\infty}^{a_i + i\infty} dz_i \frac{\text{ctg} \pi z_i [(4\pi)^2 e^{i\pi}]^{-z_i}}{\sin \pi \gamma_i z_i \Gamma(z_i - 1) \Gamma(z_i) \Gamma(z_i + 1)} \times \quad (2.4.)$$

$$\times u(1+z_1) u(2+z_2) u(1+z_1+z_2) \times \{ [(p_1 + p_2)^2 + i\epsilon]^{z_2-2} [(p_1^2 + i\epsilon)^{z_1-2} + (p_2^2 + i\epsilon)^{z_1-2}] +$$

$$+ \frac{u(2+z_1+z_2) u(1+z_2)}{u(1+z_1+z_2) u(2+z_2)} (p_1^2 + i\epsilon)^{z_2-2} (p_2^2 + i\epsilon)^{z_1-2} \}.$$

Для случая безмассовых частиц (2.4) выражается в виде однократного ряда по степеням  $S$ , который сходится, если коэффициенты  $u(n)$  удовлетворяют условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(n)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}n\right)} = 0. \quad (2.5)$$

В  $F_\gamma^0(p_1, p_2)$  содержатся инфракрасные бесконечности логарифмического типа  $(\ln p_1^2)$ . На их устранении мы не будем здесь останавливаться, поскольку этот вопрос не решается нашим методом.

Рассмотрим теперь оставшуюся функцию

$$\bar{F}_\gamma(p_1, p_2) = F_\gamma(p_1, p_2) - F_\gamma^0(p_1, p_2). \quad (2.6)$$

Эта функция дает основной вклад в асимптотическое поведение амплитуды рассеяния при больших  $s$ . Интеграл по  $d^4q$  сходится и равен

$$-is^{z_1+z_2+z_3-4} \frac{\sin \pi z_1 \sin \pi z_2 \Gamma(z_1-1) \Gamma(z_2-1) \Gamma(z_1+z_3-2) \Gamma(z_2+z_3-2)}{\sin \pi (z_1+z_2+z_3) \Gamma(z_1+z_2+z_3-2) \Gamma(z_1+z_2+z_3-3)}. \quad (2.7)$$

Подставляя (2.7) в (2.3), получаем

$$\begin{aligned} \bar{F}(p_1, p_2) = & -i \frac{\pi}{2^7} \int_L \int_L dz_1 dz_2 dz_3 \times \\ & \times \frac{\left[\frac{s}{(4\pi)^2}\right]^{z-4} e^{-imz} \operatorname{ctg} \pi z_1 \operatorname{ctg} \pi z_2 \operatorname{ctg} \pi z_3}{\sin \pi z_3 \sin \pi z \Gamma(z_1) \Gamma(z_1+1) \Gamma(z_2) \Gamma(z_2+1) \Gamma(z_3-1) \Gamma(z_3) \Gamma(z_3+1)} \times \\ & \times \frac{\Gamma(z_1+z_3-2) \Gamma(z_2+z_3-2)}{\Gamma(z-2) \Gamma(z-3)} u(2+z_1+z_2) u(1+z_1+z_3) u(1+z_2+z_3). \end{aligned} \quad (2.8)$$

$(z = z_1 + z_2 + z_3)$

Здесь контуры интегрирования по  $z$ , деформированы так, что они идут над и под реальной положительной осью, обходя точку  $+1$  слева, и параметры  $\gamma_j$  устремлены к единице. Интегралы по  $dz$  легко вычислить с помощью вычетов в целочисленных точках на реальной оси, и если выполнено условие (2.5), то полученные после интегрирования ряды сходятся.

Для иллюстрации вычислим асимптотику мнимой части  $\bar{F}(s)$  при больших значениях  $s$  для двух типов коэффициентов  $u(n)$ .

а)  $u(n) = g^n$ .

Из (2.8) для мнимой части  $\bar{F}(s)$  получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \bar{F}(s) = & \left[ \frac{8\pi^2 g}{s} \right]^4 \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_3=2}^{\infty} \frac{\partial}{\partial n_3} (-1)^{n_3} \times \\ & \times \frac{(\kappa s)^n \Gamma(n_1+n_3-2) \Gamma(n_2+n_3-2)}{\Gamma(n_1) \Gamma(n_1+1) \Gamma(n_2) \Gamma(n_2+1) \Gamma(n_3-1) \Gamma(n_3) \Gamma(n_3+1) \Gamma(n-2) \Gamma(n-3)} + \\ & + a(s), \quad (n = n_1 + n_2 + n_3), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где  $\kappa = \left(\frac{g}{4\pi}\right)^2$ , а  $a(s)$  - часть  $\operatorname{Im} \bar{F}(s)$ , когда  $n_3 = 1$ . В асимптотику она вносит несущественный вклад, и ею можно пренебречь.

Приближенное суммирование (2.9) при больших значениях  $n_1$  приводит к следующему выражению:

$$\operatorname{Im} \bar{F}(s) \approx \phi(s) \cos \left[ \frac{3\sqrt{3}}{2} (\kappa s)^{1/3} \right] \exp \left\{ \frac{11}{2} (\kappa s)^{1/3} \right\}. \quad (2.10)$$

Здесь  $\phi(s)$  - слабо меняющаяся по сравнению с экспонентой функция, зависящая от  $s$  степенным и логарифмическим образом.

б)  $u(n) = \Gamma(\lambda n) g^n \quad (\lambda < 3/2)$ .

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im} \bar{F}(s) \approx & \left( \frac{\sqrt{\kappa}}{s} \right)^4 \ln(\kappa s) \sum_2^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-1)\Gamma(n)\Gamma(n+1)} \sum_n^{\infty} \frac{\Gamma(m-2)\Gamma(\lambda(m+2))}{\Gamma(m-n)\Gamma(m-n+1)} \times \\
 & \times \sum_m^{\infty} (\kappa s)^k \frac{\Gamma(k+n-m-2)\Gamma(\lambda(k+n-m+1))\Gamma(\lambda(k-n+1))}{\Gamma(k-2)\Gamma(k-3)\Gamma(k-m)\Gamma(k-m+1)}. \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

Суммируя ряды, получаем

$$\operatorname{Im} \bar{F}(s) \approx \phi_{\lambda}(s) \cos \left[ \frac{3\sqrt{3}}{2} (\kappa s)^{\frac{1}{3-2\lambda}} \right] \exp \left\{ \left( \frac{11}{2} - 3\lambda \right) (\kappa s)^{\frac{1}{3-2\lambda}} \right\}. \quad (2.12)$$

Интересно отметить, что степени роста амплитуд, вычисленных в третьем порядке по  $G$ , совпадают со степенями роста суперпропагаторов, из которых строится искомая амплитуда.

### 3. Конечность теории в высших порядках по $G$

Покажем теперь, что теория, построенная на основе лагранжиана (2.1) с использованием нашего метода, остается конечной в любом порядке по  $G$ .

В работах /1,2/ мы получили следующее условие отсутствия ультрафиолетовых расходимостей в  $N$  порядке теории возмущений по  $G$ :

$$\operatorname{Re} z_i < \frac{4}{N}, \quad (3.1)$$

где  $N$  — порядок теории возмущений, а  $z_i$  — степень квадрата импульса, стоящего под знаком  $z$ -представления в суперпропагаторе (см., например, (2.3)). Поскольку  $0 < \operatorname{Re} z < 1$ , то условие (3.1) всегда можно выполнить.



Мы хотим привести здесь несколько иной вывод условия (3.1), чем в /1,2/. А именно, мы выведем это условие на основе конкретного рассмотрения диаграммы  $N$ -порядка по  $G$ . Этой диаграмме можно поставить в соответствие следующую функцию, описывающую амплитуду рассеяния частиц:

$$F_{\gamma}^{(N)} = \delta^{(4)} \left( \sum_1^n p_i \right) \prod_1^L \left[ i \int_{a_\ell - i\infty}^{a_\ell + i\infty} dz_\ell \frac{e^{-i \frac{\pi}{2} z_\ell} \cos \pi z_\ell}{\sin \pi \gamma_\ell z_\ell \Gamma(z_\ell) \Gamma(z_\ell + 1)} \int_0^\infty d\beta_\ell \beta_\ell^{i-z_\ell} \right] \times \\ \times u(m_1 + \sum_{(1k)} z_k) \dots u(m_N + \sum_{(Nk)} z_k) C^{-2}(\beta) \exp i \left\{ \frac{D(\beta, p)}{C(\beta)} + i \epsilon \sum_1^L \beta_k \right\}. \quad (3.2)$$

Здесь  $0 < a_\ell < 1$ ,  $n$  - количество внешних импульсов,  $m_i$  - число внешних линий, выходящих из  $i$ -й вершины,  $L = \frac{N(N-1)}{2}$  - число внутренних линий,  $\sum_{(ik)}$  - суммирование по всем линиям, связанным с  $i$ -ой вершиной и  $C(\beta)$  и  $D(\beta, p)$  - детерминанты некоторых матриц, конкретный вид которых не интересует нас здесь (см., например, /4/).

Рассмотрим область переменных  $\beta_\ell$ , где

$$0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_L, \quad (3.3)$$

и перейдем в этой области к новым переменным  $t_1, \dots, t_L$ , следуя работе Е. Спира /4/:

$$\beta_\ell = t_L t_{L-1} \dots t_\ell, \\ 0 \leq t_L \leq \infty, \\ 0 < t_\ell < 1, \quad \ell = 1, 2, \dots, L-1. \quad (3.4)$$

Тогда в новых переменных для  $C(\beta)$  и  $D(\beta, p)$  можно записать

$$C(\beta) = \prod_1^L t_\ell^{c_\ell} E(t_1, \dots, t_{L-1}),$$

$$D(\beta, p) = t_L \prod_1^L t_\ell^{c_\ell} Q(t_1, \dots, t_{L-1}, p), \quad (3.5)$$

где  $E$  и  $Q$  — полиномы по  $t_i$ , и  $E$  не исчезает нигде в рассматриваемой области переменных  $t_i$ ;  $c_\ell$  — число петель в диаграмме с  $\ell$  внутренними линиями <sup>/4/</sup>. Имея в виду, что якобиан при такой замене переменных равен  $\prod_1^L t_\ell^{\ell-1}$ , в новых переменных получаем (перепишем лишь интегралы по  $d\beta_\ell$  из (3.2)):

$$\int_0^\infty dt_L t_L^{2(L-c_L) - \sum_1^L z_\ell^{-1} - \sum_1^{L-1} z_k^{-1}} \int_0^1 dt_\ell t_\ell^{2(\ell-c_\ell) - \sum_1^{\ell-1} z_k^{-1}} E^{-2}(t_1, \dots, t_{L-1}) \times$$

$$\times \exp i t_L \left\{ \frac{Q(t_1, \dots, t_{L-1}, p)}{E(t_1, \dots, t_{L-1})} + i \epsilon (1 + t_{L-1} + \dots) \right\}. \quad (3.6)$$

Из полученного выражения видно, что для сходимости интеграла по  $t_L$  необходимо выполнение условия

$$2(L - c_L) - \sum_1^L \text{Re} z_\ell > 0. \quad (3.7)$$

Числа  $L$ ,  $c_L$  и  $N$  связаны равенством

$$N - L + c_L = 1, \quad (3.8)$$

из которого следует, что  $L - c_L = N - 1$ . Подставляя это в (3.7) и полагая все  $\text{Re} z_\ell$  равными друг другу, немедленно приходим к условию (3.1).

Покажем теперь, что условие (3.1) обеспечивает сходимость и всех остальных интегралов по  $t_\ell$ . Для них условие сходимости имеет вид

$$2(\ell - c_\ell) - \sum_1^\ell \operatorname{Re} z_k > 0, \quad (3.9)$$

или, приравнивая все  $\operatorname{Re} z_k$  друг к другу,

$$\operatorname{Re} z_\ell < 2 \frac{\ell - c_\ell}{\ell}. \quad (3.10)$$

Заметим теперь, что

$$\ell - c_\ell = N_\ell - 1, \quad \ell \leq \frac{N_\ell(N_\ell - 1)}{2}. \quad (3.11)$$

$N_\ell$  - число вершин в подграфе с  $\ell$  внутренними линиями. Последнее неравенство есть следствие того факта, что в подграфе с  $\ell$  внутренними линиями могут быть не все вершины попарно соединены. Используя (3.11), нетрудно видеть, что

$$2 \frac{\ell - c_\ell}{\ell} \geq \frac{4}{N_\ell} \geq \frac{4}{N}. \quad (3.12)$$

Но  $\frac{4}{N} > \operatorname{Re} z_\ell$ , как гласит условие (3.1). Значит, условие (3.9) выполнено, если выполнено условие (3.1). Тем самым доказано, что (3.1) обеспечивает сходимость всех интегралов в (3.6).

Оценим теперь асимптотическое поведение амплитуды рассеяния двух скалярных частиц в  $N$ -ом порядке теории возмущений по  $G$ . Мы найдем порядок роста амплитуды по переменной  $s = (p_1 + p_2)^2$  при  $s \rightarrow \infty$  для случая экспоненциального взаимодействия частиц.

Выделяя члены, зависящие от  $s$  в функции  $Q(t_1, \dots, t_{L-1}, p)$  и проводя интегрирование по переменной  $t_L$ , выражение (3.2) можно привести к виду

$$F_Y^{(N)} = \frac{\pi(-1)^N}{s^{2(N-1)}} \prod_1^L \left[ i \int_{\alpha_\ell + i\infty}^{\alpha_\ell - i\infty} dz_\ell \frac{\cos \pi z_\ell [\kappa \operatorname{se}^{-\pi}]^{z_\ell}}{\sin \pi y_\ell z_\ell \Gamma(z_\ell) \Gamma(z_\ell + 1)} \right] \times$$

$$\times \frac{f(z_1, \dots, z_L)}{\sin \pi \sum_1^L z_\ell \Gamma(\sum_1^L z_\ell - 2N + 3)} \quad (3.13)$$

где

$$f(z_1, \dots, z_L) = \prod_1^{L-1} \int_0^1 dt_\ell t_\ell^{z(\ell - c_\ell) - \sum_1^{\ell} z_k - 1} E^{-2}(t_1, \dots, t_{L-1}) \times$$

$$\times \left[ \frac{A(t_1, \dots, t_{L-1})}{E(t_1, \dots, t_{L-1})} + \frac{B(t_1, \dots, t_{L-1}, p)}{s} + i\epsilon \right] \prod_1^L z_\ell^{-2(N-1)} \quad (3.14)$$

Функция  $A(t_1, \dots, t_{L-1})$  не зависит от импульсов, а функция  $B(t_1, \dots, t_{L-1}, p)$  не зависит от  $s$ . В середине интервала интегрирования по  $t_\ell$  квадратная скобка в (3.14) может обращаться в нуль, что не опасно ввиду наличия слагаемого  $i\epsilon$ .

Ниже мы докажем, что функция  $f(z_1, \dots, z_L)$  удовлетворяет условию

$$\lim_{z_i \rightarrow \infty} \frac{f(z_1, \dots, z_L)}{\Gamma(z_i)} = 0, \quad (3.15)$$

т.е. является медленно растущей функцией по сравнению с гамма-функциями, стоящими в знаменателе формулы (3.13). Функция  $f(z_1, \dots, z_L)$  содержит полюсные особенности по некоторым комбинациям из  $z_i$  и может влиять на знаки слагаемых в рядах, получающихся после интегрирования по  $z_i$ . Но в силу условия (3.15) она не влияет на порядок роста  $F^{(N)}(s)$ , и поэтому ею можно пренебречь в дальнейших расчетах. (Напомним, что нас интересует лишь определение порядка роста  $F^{(N)}(s)$ ). Оставшиеся интегралы легко вычисляются, и, например, для мнимой части амплитуды мы получаем

$$\operatorname{Im} F^{(N)}(s) = \prod_1^L \left[ \sum_{n_\ell=1}^{\infty} \frac{(\kappa s)^{n_\ell}}{\Gamma(n_\ell)\Gamma(n_\ell+1)} \right] \frac{\phi_N(s)}{\Gamma\left(\sum_1^L n_\ell - 2N + 3\right)} \approx$$

$$\approx a_N(s) \exp\{b_N(\kappa s)^{1/3}\}. \quad (3.16)$$

Здесь  $a_N(s)$  зависит от  $s$  степенным и логарифмическим образом, а  $b_N$  — константа.

Докажем теперь справедливость условия (3.15). Для этого вместо функций  $f(z_1, \dots, z_L)$  рассмотрим функцию  $\bar{f}(z_1, \dots, z_L, z'_1, \dots, z'_{L-1})$ , равную первоначальной при  $z'_i = z_i$ ,

$$\bar{f}(z_1, \dots, z_L, z'_1, \dots, z'_{L-1}) = \prod_1^{L-1} \left[ \int_0^1 dt \rho^\ell \right]^{L-1} \frac{2(\ell - c_\ell) - \sum_1^{\ell} z'_k{}^{-1}}{E^{-2} \left[ \frac{A}{E} + \frac{B}{s} + i\epsilon \right]} \sum_1^L z_k^{-2(N-1)}. \quad (3.17)$$

Нас интересует поведение функции  $f(z_1, \dots, z_L)$  при больших положительных значениях  $z_i$ . Чтобы найти это поведение, мы произведем сначала оценку интеграла (3.17) в области, где  $z_i$  имеют большие положительные значения, а  $z'_k$  лежат в области сходимости интеграла (3.17), т.е.  $0 < \operatorname{Re} z'_k < 1$ . После оценки интеграла в указанной области мы сделаем аналитическое продолжение полученного выражения по параметрам  $z'_k$  к значениям, совпадающим с  $z_k$ , т.е. вернемся к функции  $f(z_1, \dots, z_L)$  при больших положительных значениях аргументов  $z_i$ .

Поскольку  $E(t_1, \dots, t_{L-1})$  нигде не обращается в нуль, то существует такое достаточно большое положительное число  $C$ , что

$$E^{-2}(t_1, \dots, t_{L-1}) < C \quad (3.18)$$

при любых значениях  $t_i$  из области интегрирования. В силу того же свойства  $E(t_1, \dots, t_{L-1})$  для квадратной скобки из (3.17) справедливо неравенство

$$\left[ \frac{A}{E} + \frac{B}{s} + i\epsilon \right] < D, \quad (3.19)$$

где  $D$  — также достаточно большая положительная величина. Поскольку в интересующей нас области

$$\frac{L}{\sum_1^L z_k} - 2(N-1) \gg 1, \quad (3.20)$$

то для интеграла (3.17) справедлива следующая оценка сверху:

$$\begin{aligned} \bar{f}(z) &< CD \frac{L}{\sum_1^L z_k} - 2(N-1) \prod_1^{L-1} \int_0^1 dt \frac{t^{2(\ell - c_\ell) - \sum_1^L z'_k - 1}}{t^\ell} = \\ &= C \cdot D \frac{L}{\sum_1^L z_k} - 2(N-1) \prod_1^{L-1} \left| \left( 2(\ell - c_\ell) - \sum_1^L z'_k \right)^{-1} \right|. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Из полученного неравенства следует, что и для функции  $f(z_1, \dots, z_L)$  можно написать

$$f(z_1, \dots, z_L) < \phi(z_1, \dots, z_L) D \frac{L}{\sum_1^L z_k}, \quad (3.22)$$

где  $\phi(z_1, \dots, z_L)$  — степенная функция от  $z_i$ . Из (3.22) следует справедливость равенства (3.15).

Итак, мы видим, что степень роста амплитуд рассеяния не меняется при переходе от порядка к порядку. Меняются лишь величины  $b_N$  и предэкспоненциальные функции  $a_N(s)$ . В функциях  $a_N(s)$  заложена вся информация о каждой конкретной диаграмме, в то время как экспоненциальный рост должен скомпенсироваться при полном суммировании ряда теории возмущений в силу условия унитарности  $S$ -матрицы.

#### 4. Проверка унитарности $S$ -матрицы (третий порядок)

Имея в виду, что  $S$ -матрица записывается в виде ряда

$$S = 1 + \sum_1^{\infty} \frac{G^N}{N!} \int dx_1 \dots dx_N S_N(x_1, \dots, x_N), \quad (4.1)$$

условие унитарности  $S$ -матрицы  $SS^+ = 1$  в третьем порядке по  $G$  можно записать в форме

$$S_3 + S_3^+ = -3[S_1 S_2^+ + S_2 S_1^+]. \quad (4.2)$$

Рассмотрим опять диаграмму, изображенную на рис. 1. Матричный элемент, соответствующий этой диаграмме, имеет вид

$$\begin{aligned} \langle 34 | S_3 | 12 \rangle &= i^3 \langle \alpha_{p_3} \alpha_{p_4} | \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 \sum_0^{\infty} \frac{u(n_1)u(n_2)u(n_3)}{n_1! n_2! n_3!} \times \\ &\times T(\phi^{n_1}(x_1) \phi^{n_2}(x_2) \phi^{n_3}(x_3)) | \alpha_{p_1}^+ \alpha_{p_2}^+ \rangle \rightarrow \frac{3i^3 \sum_0^{\infty} \frac{u(2+n_1+n_2)u(1+n_2+n_3)u(1+n_3+n_1)}{n_1! n_2! n_3!}}{2(2\pi)^6} \times \\ &\times \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 \frac{e^{i(p_3+p_4)x_3 - ip_1 x_1 - ip_2 x_2}}{\sqrt{p_1^0 p_2^0 p_3^0 p_4^0}} [-i\Delta^c(x_1, -x_2)]^{n_3} \times \\ &\times [-i\Delta^c(x_1, -x_3)]^{n_2} [-i\Delta^c(x_2, -x_3)]^{n_1}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Это формально записанное выражение содержит в себе ультрафиолетовые расходимости. Чтобы получить конечное выражение, необходимо использовать для суперпропагаторов, входящих в (4.3),  $x$ -представление (см. (2.3)). С помощью этого представления, а также используя формулу

$$-\pi(p^2 + i\epsilon)^{z-1} \frac{e^{-i\pi z}}{\sin \pi z} = \int_0^{\infty} d\mu^2 \frac{\mu^{2(z-1)}}{\mu^2 - p^2 - i\epsilon}, \quad (4.4)$$

формальное выражение (4.3) можно записать в форме сходящихся интегралов

$$\frac{3\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)/1}{2(2\pi)^6 \sqrt{p_1^0 p_2^0 p_3^0 p_4^0}} \left( \frac{1}{2i} \right)^3 \int_{a+i\infty}^{a-i\infty} dz_1 dz_2 dz_3 \times$$

$$\times \frac{\cos \pi z_1 \cos \pi z_2 \cos \pi z_3 (4\pi)^{-2(z_1+z_2+z_3)} u(4+z_1+z_2) u(3+z_2+z_3) u(3+z_3+z_1)}{\sin \pi z_1 z_1 \sin \pi z_2 z_2 \sin \pi z_3 z_3 \Gamma(z_1) \Gamma(z_1+1) \Gamma(z_1+2) \dots \Gamma(z_3) \Gamma(z_3+1) \Gamma(z_3+2)} \quad (4.5)$$

$$\times \prod_1^3 \left[ \int_0^\infty d\mu_i \mu_i^{2(z_i-1)} \right] \int_0^\infty d^4 q \frac{1}{(\mu_1^2 - (p_2 + q)^2 - i\epsilon)(\mu_2^2 - (p_1 - q)^2 - i\epsilon)(\mu_3^2 - q^2 - i\epsilon)}$$

Здесь для простоты отброшены члены, соответствующие значениям  $z_i = -0, 1$ . Включить в рассмотрение эти члены не представляет труда, но делает весьма громоздкими выражения типа (4.5). Поэтому мы будем опускать их.

Заметим теперь, что

$$\langle 34 | S_3 | 12 \rangle + \langle 34 | S_3^+ | 12 \rangle = \langle 34 | S_3 | 12 \rangle + [\langle 12 | S_3 | 34 \rangle]^* =$$

$$= \langle 34 | S_3 | 12 \rangle + [\langle 34 | S_3 | 12 \rangle]^* = 2 \operatorname{Re} \langle 34 | S_3 | 12 \rangle. \quad (4.6)$$

Это следует, например, из (4.3). Реальной части матричного элемента от  $S_3$  соответствует реальная часть интеграла по  $d^4 q$  в (4.5), которая, в свою очередь, распадается на три части:

$$\operatorname{Re} \int d^4 q (\mu_1^2 - (p_2 + q)^2 - i\epsilon)^{-1} (\mu_2^2 - (p_1 - q)^2 - i\epsilon)^{-1} (\mu_3^2 - q^2 - i\epsilon)^{-1} =$$

$$= -2\pi^2 \int d^4 q \{ [\alpha(p_2^0 + q^0) \theta(p_1^0 - q^0) + \theta(-p_2^0 - q^0) \theta(q^0 - p_1^0)] \delta(\mu_1^2 - (p_2 + q)^2) \times$$

$$\times \delta(\mu_2^2 - (p_1 - q)^2) P(\mu_3^2 - q^2)^{-1} + [\theta(q^0) \theta(p_1^0 - q^0) + \theta(-q^0) \theta(q^0 - p_1^0)] \times \quad (4.7)$$

$$\times \delta(\mu_2^2 - (p_1 - q)^2) \delta(\mu_3^2 - q^2) P(\mu_1^2 - (p_2 + q)^2)^{-1} + [\theta(-q^0) \theta(p_2^0 + q^0) + \theta(q^0) \theta(-p_2^0 - q^0)] \times$$

$$\times \delta(\mu_1^2 - (p_2 + q)^2) \delta(\mu_3^2 - q^2) P(\mu_2^2 - (p_1 - q)^2)^{-1} \}.$$



Здесь  $P$  - знак главного значения. Укажем сразу, что для  $p_1^0 > 0$  и  $p_2^0 > 0$

$$\theta(-p_2^0 - q^0) \theta(q^0 - p_1^0) = \theta(-q^0) \theta(q^0 - p_1^0) = \theta(q^0) \theta(-p_2^0 - q^0) = 0. \quad (4.8)$$

Подставляя (4.7) в (4.5), мы видим, что реальная часть матричного элемента, соответствующего диаграмме рис. 1, распадается на три части, каждая из которых соответствует одной из рассеченных диаграмм, изображенных на рис. 2. Рассеченным линиям будут соответствовать в мат-

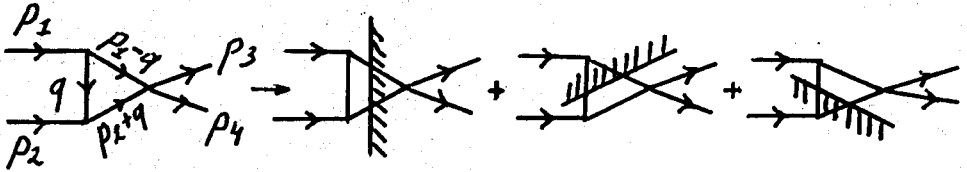


Рис. 2

ричных элементах фазовые объемы частиц, пересекающих линию сечения, а нерассеченной линии соответствует реальная часть суперпропатора, соединяющего неразделенные вершины.

Покажем теперь, что полученное выражение в точности равно матричному элементу от правой части (4.2). Тем самым будет завершено доказательство унитарности  $S$ -матрицы в третьем порядке по  $G$ . Матричные элементы от  $S_1 S_2^+$  и  $S_2 S_1^+$  распадаются на шесть частей, половина которых равна нулю в силу (4.8).

$$\langle 34 | S_1 S_2^+ | 12 \rangle \Rightarrow A_1 + A_2 + A_3,$$

$$\langle 34 | S_2 S_1^+ | 12 \rangle \Rightarrow \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3,$$

(4.9)

$$A_1 = \frac{i}{2(2\pi)^6 \sqrt{p_1^0 p_2^0 p_3^0 p_4^0}} \sum_0^\infty \frac{u(n_1)u(n_2)u(n_3)}{(n_1-1)!(n_2-1)!(n_3-2)!} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 \times$$

$$\times e^{i(p_3+p_4)x_3 - i p_1 x_1 - i p_2 x_2} \langle 0 | : \phi^{n_3-2}(x_3) : T : \phi^{n_2-1}(x_2) : : \phi^{n_1-1}(x_1) : | 0 \rangle \quad (4.9a)$$

$$A_2 = \frac{i}{2(2\pi)^6 \sqrt{p_1^0 p_2^0 p_3^0 p_4^0}} \sum_0^\infty \frac{u(n_1)u(n_2)u(n_3)}{(n_1-1)!(n_2-2)!(n_3-1)!} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 \times$$

$$\times e^{i(p_3+p_4)x_2 - i p_1 x_1 - i p_2 x_3} \langle 0 | : \phi^{n_3-1}(x_3) : T : \phi^{n_2-2}(x_2) : : \phi^{n_1-1}(x_1) : | 0 \rangle \quad (4.9b)$$

Член  $A_3$  получается из  $A_2$  заменой  $p_1 \leftrightarrow p_2$ . Подобные же выражения имеют место и для  $\bar{A}_1$ ,  $\bar{A}_2$ ,  $\bar{A}_3$ .

Производя  $T$ -упорядочивание в (4.9a) и вводя систему промежуточных состояний между точками  $x_3$  и  $(x_1, x_2)$ , получаем

$$A_1 = \frac{i}{2(2\pi)^6 \sqrt{p_1^0 p_2^0 p_3^0 p_4^0}} \sum_0^\infty \frac{1}{m!} \sum_0^\infty \frac{u(n+2)}{(2\pi)^{3n}} \sum_0^n \frac{u(\ell+m+1)u(n+m-\ell+1)}{\ell!(n-\ell)!} \prod_1^n \int \frac{d^3k}{2\omega_1} \times$$

$$\times \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 \exp \{ i(p_3 + p_4 - \sum_1^n k_1)x_3 + (\sum_1^\ell k_1 - p_2)x_2 +$$

$$+ (\sum_{\ell+1}^n k_1 - p_1)x_1 \} [-i\Delta^c(x_2 - x_1)]^m \quad (4.10)$$

Представим теперь сумму по  $m$  от степеней причинных пропагаторов в виде

$$i \sum_2^{\infty} \frac{u(\ell+m+1)u(n+m-\ell+1)}{m!} [-i\Delta^c(x_2-x_1)]^m = \lim_{\gamma \rightarrow 1} (2\pi)^{-4} \int d^4 q e^{-iq(x_2-x_1)} \quad (4.11)$$

$$\times \frac{1}{2i} \int_{\alpha+i\infty}^{\alpha-i\infty} dz \frac{\cos \pi z (4\pi)^{-2z} u(z+\ell+1)u(z+n-\ell+1)}{\sin \pi \gamma z \Gamma(z)\Gamma(z+1)\Gamma(z+2)} \int_0^{\infty} d\mu^2 \frac{\mu^{2(z-1)}}{\mu^2 - q^2 - i\epsilon}$$

Подставляя (4.11) в (4.10), получаем

$$A_1^\gamma = \frac{\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4)}{2(2\pi)^4 \sqrt{p_1^0 p_2^0 p_3^0 p_4^0}} \sum_2^{\infty} \frac{u(n+\ell+2)}{n!\ell!} \frac{1}{2i} \int_{\alpha+i\infty}^{\alpha-i\infty} dz \frac{\cos \pi z (4\pi)^{-2z} u(z+n+2)u(z+\ell+2)}{\sin \pi \gamma z \Gamma(z)\Gamma(z+1)\Gamma(z+2)} \times \quad (4.12)$$

$$\times \int_0^{\infty} d\mu^2 \mu^{2(z-1)} \int d^4 q (\mu^2 - q^2 - i\epsilon)^{-1} \Omega_n(p_2+q) \Omega_\ell(p_1-q) + A_1',$$

где  $A_1'$  соответствует части  $A_1$  со значениями  $n$ ,  $\ell$  и  $z$ , равными 0 и 1, которую мы не будем рассматривать, как и раньше.  $\Omega_n(p)$  - фазовый объем  $n$ -скалярных безмассовых частиц

$$\Omega_n(p) = (4\pi)^{-2} \left[ \frac{p^2}{(4\pi)^2} \right]^{n-2} \frac{\theta(p^2)\theta(p^0)}{(n-1)!(n-2)!} \quad (4.13)$$

Сравнивая  $-3A_1$  с реальной частью (4.5), легко убедиться, что она равна первой из трех частей, на которые распадаются  $2\text{Re} < 34 | S_3 | 12 >$  (см. (4.7)).  $\text{Im} A_1 = 0$  в силу равенства нулю интеграла по  $d^4 q$  от соответствующего мнимой части выражения.

Подобным же способом для  $A_2$  можно получить выражение

$$A_2^\gamma = \frac{\delta^4 (p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{2(2\pi)^4 \sqrt{p_1^0 p_2^0 p_3^0 p_4^0}} \sum_2^\infty \frac{\alpha(n + \ell + 1)}{n! \ell!} \frac{1}{2i} \int_{\alpha + i\infty}^{\alpha - i\infty} dz \frac{\cos \pi z (4\pi)^{-2z} u(z + \ell + 3) u(z + n + 2)}{\sin \pi y z \Gamma(z) \Gamma(z + 1) \Gamma(z + 2)} \times$$

$$\times \int_0^\infty d\mu^2 \mu^{2(z-1)} \int d^4 q (\mu^2 - (p_1 - q)^2 - i\epsilon)^{-1} \Omega_n(q) \Omega_\ell(-p_2 - q) + A_2' \quad (4.14)$$

$A_2'$  также соответствует части  $A_2^\gamma$  с  $n$ ,  $\ell$ , и  $z$ , равными 0 и 1. Для  $p_2^0 > 0$   $A_2^\gamma = 0$  в силу (4.8).

Точно так же можно доказать, что  $A_3 = 0$ ,  $\bar{A}_1 = 0$  в силу равенства нулю произведений  $\theta(-q^0) \theta(q^0 - p_1^0)$  и  $\theta(-p_2^0 - q^0) \theta(q^0 - p_1^0)$ , а  $\bar{A}_2$  и  $\bar{A}_3$  являются чисто вещественными и равны оставшимся частям  $2\text{Re} < 34 || S_3 || 12 >$ , деленным на  $(-3)$ . Тем самым мы доказали унитарность  $S$ -матрицы в третьем порядке по  $G$ .

Равенства, подобные (4.7), будут иметь место и в более высоких порядках теории возмущений по  $G$ , и они будут обеспечивать унитарность  $S$ -матрицы в этих порядках. Однако даже в четвертом порядке вывод равенства, подобного (4.7), весьма затруднителен. Но эти трудности чисто технического характера.

### З а к л ю ч е н и е

Итак, мы показали, что использование наших методов позволяет построить теорию с неполиномиальными лагранжианами без ультрафиолетовых расходимостей в любом порядке теории возмущений. При этом  $S$ -матрица остается унитарной, что явно видно из рассмотрения третьего порядка, и нет оснований ожидать нарушения унитарности в бо-

лее высоких порядках. В  $x$ -пространстве унитарность  $S$ -матрицы легко доказывается в любом порядке с помощью так называемой "разрезающей формулы" Вельтмана /5,2/. Однако при переходе к импульсному пространству мы опять сталкиваемся с необходимостью использования равенства типа (4.7).

Интересно, что степень роста амплитуд рассеяния не меняется от порядка к порядку. Этот экспоненциальный рост создает как бы некоторый "фон" в каждом порядке теории возмущений и должен исчезать при полном суммировании всех порядков в силу условия унитарности  $S$ -матрицы.

В заключение автор благодарит Д.И. Блохинцева, А.В. Ефремова, В.А. Мещерякова за полезные обсуждения.

#### Л и т е р а т у р а

1. Нелокальные, нелинейные и неренормируемые теории поля. Препринт ОИЯИ, 2-5400, Дубна, 1970, стр. 167.
2. M.K. Volkov. Commun.Math.Phys., 7, 289 (1968);  
A. Salam. J. Strathdee. Phys.Rev., D1, 3296 (1970);  
J.G. Taylor. Preprint University of Southampton, April, 1971.
3. M.K. Volkov. Ann.Phys. (N.Y.), 49, 202 (1968).
4. E.R. Speer. Journal Math.Phys., 9, 1404 (1968).
5. M. Veltman. Physica, 29, 186 (1963).

Рукопись поступила в издательский отдел

12 августа 1971 года.