СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 5990

В.Н.Первушин

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА В.К.Б. К ВЫЧИСЛЕНИЮ АМПЛИТУД ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО РАССЕЯНИЯ НА ГЛАДКИХ ПОТЕНЦИАЛАХ

1971

Р2 - 5990

В.Н. Первушин

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА В.К.Б. К ВЫЧИСЛЕНИЮ АМПЛИТУД ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО РАССЕЯНИЯ НА ГЛАДКИХ ПОТЕНЦИАЛАХ

Первушин В.Н. Р2-5990

О применении метода В.К.Б. к вычислению амплитуд высокоэнергетического рассеяния на гладких потенциалах

В обзоре рассматривается применение квазиклассического метода В.К.Б. к вычислению амплитуд рассеяния частиц на гладких потенциалах. Основное внимание обращено на качественное описание квазиклассического взаимодействия в различных областях изменения динамических и кинематических параметров рассеяния, а также на физическую интерпретацию приведенных результатов с точки зрения известных классических принципов.

Сообщения Объединенного института ядерных исследований

Дубна, 1971

§1. Введение

Нерелятивистская квантовая механика является простейшей динамической моделью, которая воспроизводит основные черты высокоэнергетических реакций адронов /1-8/ и дает эффективные методы анализа эксперимента, весьма близкие методам квантовой теории поля /9-11/. Тем не менее до сих пор не существует еще достаточно полного обзора по высокоэнергетическому поведению амплитуд рассеяния на гладких потенциалах в нерелятивистской теории.

Задача настоящей статьи - дать по возможности краткий обзор результатов применения метода В.К.Б. к проблемам высокоэнергетического рассеяния частиц на гладких потенциалах. Мы не будем вдаваться в сложные математические детали расчетов /4,12,13/ и в подробные количественные сравнения с экспериментом /1,2,10/. Главное внимание обращено на качественное описание квазиклассического взаимодействия в различных областях изменения динамических и кинематических параметров рассеяния, а также на физическую интерпретацию приведенных результатов с точки зрения известных классических принципов.

В настоящем обзоре под методом В.К.Б. понимается приближение, согласно которому фаза рассеяния пропорциональна классической функции действия [5,12-15]. Отметим, что в литературе термин "метод приближения В.К.Б." часто употребляют в другом, более узком, смысле квазиклассического предела $\hbar \to 0$ [2,8,16]. Будем различать "метод В.К.Б." и "предел $\hbar \to 0$", в противном случае нам не избежать недоразумений относительно их областей применимости.

В обзоре приняты следующие обозначения: V_0 – порядок величины потенциала в основной области его существования, R – размер этой области, k – модуль начального импульса, $\frac{\hbar}{k} = \lambda\!\!\!^{-}$ – де-бройлевская длина волны, $E = \frac{k^2}{2}$ – начальная кинетическая энергия. (массу рассеивающейся частицы положим равной единице), θ – угол рассеяния.

Будем считать, что V_0 и R феноменологически зависят от энергии.

Потенциальное рассеяние характеризуется тремя безразмерными параметрами: динамическими, $\frac{\lambda\!\!\!^{-}}{R}$ и $\frac{V_0}{E}$, и кинематическим, θ. В квазиклассическом пределе, $\frac{\lambda\!\!\!^{-}}{R} \ll 1$, мы рассмотрим следующие четыре области изменения параметров $\frac{V_0}{E}$, θ.

$$\left|\frac{V_0}{E}\right| \gg \frac{\lambda\!\!\!^{-}}{R};\ \theta \gg \frac{\lambda\!\!\!^{-}}{R} \qquad \text{("сильные" потенциалы, большие углы)} \tag{1.1}$$

$$\left|\frac{V_0}{E}\right| \lessapprox \frac{\lambda\!\!\!^{-}}{R};\ \theta \lessapprox \frac{\lambda\!\!\!^{-}}{R} \qquad \text{("слабые" потенциалы, малые углы)} \tag{1.2}$$

$$\left|\frac{V_0}{E}\right| \lessapprox \frac{\lambda\!\!\!^{-}}{R},\ \theta \gg \frac{\lambda\!\!\!^{-}}{R} \qquad \text{("слабые" потенциалы, большие углы)} \tag{1.3}$$

$$\left|\frac{V_0}{E}\right| \gg \frac{\lambda\!\!\!^{-}}{R};\ \theta \lessapprox \frac{\lambda\!\!\!^{-}}{R} \qquad \text{("сильные" потенциалы, малые углы)} \tag{1.4}$$

Содержание параграфов следующее. В §2 кратко даны основные пункты классической теории рассеяния. В §3 излагается суть метода В.К.Б. и делается переход к классической теории рассеяния, который возможен лишь при условиях (1.1). Это единственная из вышеуказанных четырех областей, где термины "метод В.К.Б." и "предел $\hbar$, $(\lambda\!\!\!^{-}) \to 0$" полностью адекватны.

В §4 рассмотрены области (1.2) и (1.3). Обсуждаются эйкональные модели, для которых выполняется условие:

$$\lim_{E\to\infty} \frac{V_0(E)\,R(E)}{E\ \lambda\!\!\!^{-}} \to 0.$$

§5 посвящен вопросу об энергетических границах применимости эйконального приближения и обсуждению физической картины рассеяния в области (1.4).

В заключении кратко перечислены характерные черты, присущие рассеянию на гладких потенциалах и основные качественные изменения, возникающие с ростом потенциальной энергии.

§2. Классическая механика

Теория рассеяния классических частиц строится на основе представления о траекториях движения, которые определяются с помощью характеристической функции Гамильтона $S(\rho,\theta)$, являющейся решением уравнения Гамильтона-Якоби и зависящей от угла рассеяния θ и начальных условий: импульса k и прицельного параметра ρ:

$$S(\rho,\theta) = \pm\frac{\theta}{2}k\rho + S_{\text{кл}}(\rho). \tag{2.1}$$

Радиальную часть функции Гамильтона

$$S_{кл}(\rho) = k\int_{r_0}^{\infty} dr\sqrt{1-\frac{V(r)}{E}-\frac{\rho^2}{r^2}} - k\int_{\rho}^{\infty} dr\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}} \qquad (2.2)$$

в дальнейшем будем называть классической функцией действия. Здесь r_0 – классическая точка поворота, являющаяся корнем уравнения

$$1-\frac{V(r_0)}{E}-\frac{\rho^2}{r_0^2}=0. \qquad (2.3)$$

Уравнение для траектории получается из выражения (2.1) путем дифференцирования его по прицельному параметру

$$\pm\theta(\rho) = 2\frac{d}{d\rho}S_{кл.}(\rho). \qquad (2.4)$$

В поле отталкивания это уравнение имеет корень лишь при знаке минус перед θ, а в поле притяжения – при знаке плюс.

Дифференциальное сечение рассеяния частицы, пролетающей с прицельным параметром ρ, задается формулой

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\rho}{\sin\theta}\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right|, \quad (d\Omega = 2\pi\sin\theta\, d\theta), \qquad (2.5)$$

из которой следует, что для гладких потенциалов $V(r)$, обращающихся в нуль только при $r\to\infty$, полное сечение рассеяния равно бесконечности:

$$\sigma_t = \int\frac{d\sigma}{d\Omega}\,d\Omega = 2\pi\int_0^{\theta_{max}} d\theta\,\rho\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right| \approx \pi\rho^2(0);\quad \rho(0)=\infty. \qquad (2.6)$$

В дальнейшем этот факт будет важен при анализе квазиклассического рассеяния на малые углы в области (1.4).

§3. Суть метода В.К.Б. и предельный переход к классической теории рассеяния

Амплитуда рассеяния в квантовой механике, разложенная по парциальным волнам, имеет вид:

$$f(\theta)=\frac{\hbar}{2ik}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)P_\ell(\cos\theta)(e^{2i\delta_\ell}-1). \qquad (3.1)$$

Согласно методу В.К.Б. /4, 12–15/ фаза δ_ℓ в квазиклассическом приближении, $\frac{\bar\lambda}{R}\ll 1$, может быть записана как предел, к которому стремится при $r\to\infty$ разность фазы квазиклассической волновой функции в поле $V(r)$ и фазы волновой функции свободного движения. Этот предел с точностью до несущественных деталей равен отношению классической функции действия (2.2) к постоянной Планка:

$$\delta_\ell^{В.К.Б.}\Big|_{\ell=\frac{\rho}{\bar\lambda}} = \frac{S_{кл}(\rho)}{\hbar}. \qquad (3.2)$$

В сумму (1.3) при $\frac{\bar\lambda}{R}\ll 1$ вносит вклад большое число парциальных волн. Поэтому с достаточно хорошей точностью эту сумму можно заменить интегралом по прицельному параметру $\rho=\bar\lambda\,\ell$. Тогда с учетом (3.2) амплитуда (3.1) принимает вид:

$$f(\theta)=\frac{k}{i\hbar}\int_0^{\infty}\rho\,d\rho\,P_{\rho/\bar\lambda}(\cos\theta)\left(\exp\left\{2i\frac{S_{кл}(\rho)}{\hbar}\right\}-1\right). \qquad (3.3)$$

Формула (3.3) будет для нас исходной в дальнейшем изложении.

Проследим теперь, каким образом происходит предельный переход от квантово-механической теории рассеяния к классической. Говорить о таком переходе имеет смысл лишь в области (1.1). Ограничения (1.1)

$$\left|\frac{V_0}{E}\right| \gg \frac{\lambda\!\!\!^{-}}{R}, \qquad \theta \gg \frac{\lambda\!\!\!^{-}}{R} \tag{3.4}$$

равносильны пределу $\hbar$, $\lambda\!\!\!^{-} \to 0$ при фиксировании всех остальных параметров рассеяния и означают, что порядок классической функции действия много больше постоянной Планка, а угол рассеяния много больше, чем квантовая неопределенность в угле.

Достаточно хорошим приближением для полиномов Лежандра при $\frac{\rho}{\lambda\!\!\!^{-}} \gg 1$ и $\frac{\rho}{\lambda\!\!\!^{-}} \sin\theta \gtrsim 1$ является выражение /13/

$$P_{\frac{\rho}{\lambda\!\!\!^{-}}}(\cos\theta) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{\rho}{\lambda\!\!\!^{-}}\sin\theta}}\left[e^{i\frac{\rho k\theta}{\hbar} - i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\rho k\theta}{\hbar} + i\frac{\pi}{4}}\right]. \tag{3.5}$$

Подставляя (3.5) в интеграл (3.3) и вычисляя его методом стационарной фазы /13-15/, справедливым при $\hbar \to 0$, для амплитуды рассеяния получим выражение

$$i\lambda\!\!\!^{-} f(\theta) = \sqrt{\frac{\lambda\!\!\!^{-}}{2\pi\sin\theta}}\int_0^\infty \rho^{1/2}\, d\rho\left[\exp\left\{i\frac{k\rho\theta + 2S_{\text{кл}}(\rho)}{\hbar} - i\frac{\pi}{4}\right\} + \exp\left\{i\frac{-k\rho\theta + 2S_{\text{кл}}(\rho)}{\hbar} + i\frac{\pi}{4}\right\}\right] \tag{3.6}$$

$$= \sqrt{\frac{d\sigma_{\text{кл}}}{d\Omega}}\exp\left\{\pm\frac{ik\tilde{\rho}_\pm\,\theta + i2S_{\text{кл}}(\tilde{\rho}_\pm)}{\hbar} \pm i\frac{\pi}{4}\left(1 - \operatorname{sign}\frac{d\theta}{d\rho}(\tilde{\rho})\right)\right\}, \tag{3.7}$$

где

$$\frac{d\sigma_{\text{кл}}}{d\Omega} = \frac{\tilde{\rho}_\pm(\theta)}{\left|\frac{d\theta(\tilde{\rho}_\pm)}{d\tilde{\rho}_\pm}\right|\sin\theta}. \tag{3.8}$$

$\tilde{\rho}_\pm$ – экстремальное значение прицельного параметра, определяемое из уравнения x/

$$\frac{d}{d\tilde{\rho}_\pm}\left[\pm k\tilde{\rho}_\pm\,\theta - 2S_{\text{кл}}(\tilde{\rho}_\pm)\right] = 0. \tag{3.9}$$

Знак плюс или минус в уравнении (3.9) выбирается в зависимости от того, какая из двух экспонент в (3.6) имеет экстремум. Если потенциал и экстремальное значение $\tilde{\rho}$ действительны, то квантовое дифференциальное сечение

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |\lambda\!\!\!^{-} f(\theta)|^2$$

совпадает с классическим, $\frac{d\sigma_{\text{кл.}}}{d\Omega}$.

§4. "Слабые" потенциалы

В случае "слабых" потенциалов

$$\left|\frac{V_0}{E}\right| \lesssim \frac{\lambda\!\!\!^{-}}{R} \ll 1 \tag{4.1}$$

для фазы рассеяния (3.2) справедлив первый член разложения ее в ряд по малому параметру $\frac{V_0}{E}$:

$$2\delta^{\text{В.К.Б.}}_{\rho/\lambda\!\!\!^{-}} = 2\chi_0(\rho) = -\frac{1}{\lambda\!\!\!^{-}}\int_\rho^\infty \frac{V(r)}{E\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}}}\,dr = \tag{4.2}$$

$$= -\frac{1}{\lambda\!\!\!^{-}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{V(\sqrt{\rho^2 + z^2})}{2E}\,dz \approx \frac{R}{\lambda\!\!\!^{-}}\frac{V_0}{E} \lesssim 1. \tag{4.3}$$

---

x/ Будем считать для простоты, что существует единственное решение уравнения (3.9).

Из (4.3) следует, что по порядку величины классическая функция действия в области (4.1) меньше или равна постоянной Планка.

Полиномы Лежандра при малых углах рассеяния и больших прицельных параметрах, $\rho \gg \lambdabar$, $\theta\rho \lessapprox \lambdabar$, асимптотически можно представить в виде [13]

$$P_{\rho/\lambdabar}(\cos\theta) = J_0\left(\frac{\rho\theta}{\lambdabar}\right). \tag{4.4}$$

Для амплитуды рассеяния в этом случае имеет место так называемое оптическое [11], или эйкональное [17,2], представление

$$f(\theta) = \frac{1}{i\lambdabar}\int_0^\infty \rho\,d\rho\, J_0\left(\frac{\rho\theta}{\lambdabar}\right)\left(e^{i2\chi_0(\rho)} - 1\right). \tag{4.5}$$

О справедливости метода В.К.Б. в области (1.2) говорит тот факт, что аналогичное представление

$$f(\theta) = \frac{1}{i\lambdabar}\int_0^\infty \rho\,d\rho\, J_0\left(2\frac{\rho}{\lambdabar}\sin\frac{1}{2}\theta\right)\left(e^{2i\chi_0(\rho)} - 1\right) \tag{4.6}$$

в работах [2,18] получено непосредственно из уравнения Шредингера и без разложения по парциальным волнам. При этом даются следующие пределы применимости эйконального представления [18]:

$$\theta \ll \sqrt{\frac{\lambdabar}{R}}, \tag{4.7}$$

$$\left|\frac{V_0}{E}\right| \ll \sqrt{\frac{\lambdabar}{R}}. \tag{4.8}$$

Эти условия фактически означают, что

$$\left|\max\frac{S_{\text{кл}}}{\hbar}\right| - \left|\max\chi_0\right| \ll 1 \quad \text{и} \quad J_0\left(\frac{2R}{\lambdabar}\sin\frac{1}{2}\theta\right) \cong J_0\left(\frac{R\theta}{\lambdabar}\right),$$

т.е. выражения (4.5) и (4.6) совпадают.

В работах [19] (см. также [13]) делается утверждение, что выражение (4.6) с фазой, найденной по методу В.К.Б., справедливо для любых энергий и углов. Отметим, что указанное представление в отличие от (3.3) при углах рассеяния, где существенна разница между величинами θ и $2\sin\frac{1}{2}\theta$, не будет удовлетворять принципу соответствия с классической механикой.

Для представления амплитуды в виде (4.5), (4.6), так же как и для выражений (3.1) и (3.3), справедливо соотношение, связывающее полное сечение с мнимой частью амплитуды рассеяния,

$$\sigma_t = 4\pi\lambdabar\, \mathrm{Im}\, f(0). \tag{4.9}$$

Представление амплитуды, аналогичное эйкональному с изменениями, соответствующими релятивистской двухчастичной кинематике, возникает при решении квазипотенциального уравнения Логунова-Тавхелидзе с гладким комплексным потенциалом [9,10], а также при суммировании графов Фейнмана в некоторых моделях квантовой теории поля [11].

В настоящее время эйкональное представление и его модификации интенсивно используются для анализа экспериментальных данных по адронному и ядерному [2,20] рассеянию. Исторически к высокоэнергетическому рассеянию адронов оно впервые было применено в работах [1]. Основная идея работ [1] заключалась в рассмотрении нуклона как некоторой оптической среды, поглощающей или преломляющей падающие на нее квантово-механические волны. Современной теоретической реализацией этой идеи является модель Чу-Янга /21/.

Представление (4.6) так же широко используется, как один из основных способов унитаризации (4.9) редже-полюсной модели /22/. В данном случае комплексный потенциал интерпретируется как результат взаимодействия, возникающего при обмене реджионами.

В работах /5,6/ для анализа эксперимента был применен эффективный метод, в основе которого лежит представление фазы рассеяния в выражении (3.1) в борновском виде. Известно /14/, что области применимости борновского и квазиклассического приближений пересекаются и, как показано в работе /23/, в квазиклассическом пределе борновское приближение для фазы совпадает с эйкональным. Поэтому при $\frac{\lambdabar}{R} \ll 1$ метод, изложенный в работах /5/, находится в весьма близком отношении к методу В.К.Б. с фазой в первом приближении по потенциалу (4.3).

В большинстве методов анализа экспериментов по сильным взаимодействиям, использующих эйкональное представление для амплитуды, зависимость $V(E)$ и $R(E)$ выбирается (или обусловлена соответствующей теорией) таким образом, чтобы фаза рассеяния (4.3) с ростом энергии медленно, логарифмически, убывала так, чтобы при энергиях 10-20 Гэв она становилась много меньше единицы: $|\max S_{\text{кл}}| \approx 0{,}1\hbar$ /5,10,22/.

Поэтому основной вклад в амплитуду при малых углах рассеяния $\theta \lessapprox \frac{\lambdabar}{R}$ дает первое борновское приближение (фурье-образ гауссовского потенциала), описывающее дифракционный пик. Вся дифракционная картина возникает за счет перерассеяний, т.е. учета следующих членов разложения $(e^{2i\chi_0} - 1)$ в ряд по χ_0 в (4.6).

С ростом угла рассеяния дифракционный режим сменяется орировским

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx e^{-bk\theta} \quad . \tag{4.10}$$

В работе [3] предложена квазиклассическая интерпретация этого режима как рассеяния в классически запрещенную угловую область.

Действительно, как мы видели в §3, при больших углах рассеяния,

$$\theta \gg \frac{\lambda\!\!\!^{-}}{R}, \tag{4.11}$$

для амплитуды справедлива квазиклассическая формула (3.7) с экстремальным значением прицельного параметра, определяемым с учетом (4.3) из уравнения

$$\frac{R\theta}{\lambda\!\!\!^{-}} = R\frac{d}{d\rho}2\chi_0(\rho). \tag{4.12}$$

Поскольку левая часть этого равенства согласно (4.11) много больше единицы, а правая часть, $R\frac{d}{d\rho}2\chi_0(\rho) \approx 2\chi_0(\rho)$, согла́сно (4.1), при действительных значениях ρ много меньше единицы, то экстремум достигается лишь при малых значениях прицельного параметра. Например, в случае действительного гауссовского потенциала

$$V(r) = \frac{2V}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{r^2}{k^2}} \tag{4.13}$$

фаза и экстремальное значение $\tilde{\tilde{\rho}}$ имеют вид

$$2\chi_0(\rho) = \frac{R}{\lambda\!\!\!^{-}}\frac{V_0}{E}e^{-\frac{\rho^2}{R^2}}, \tag{4.14}$$

$$\tilde{\tilde{\rho}} \cong iR\sqrt{\ln\frac{2E}{V_0}\theta}, \qquad \frac{E}{V_0}\theta \gg 1.$$

В отличие от классического выражения для сечения в (3.10) возникает экспоненциальный фактор (4.9).

Более подробное, математически строгое и точное вычисление амплитуды рассеяния на гауссовском потенциале в данной области с помощью метода В.К.Б. и с использованием комплексной плоскости радиуса-вектора проведено в работе [4].

Следует отметить, что комплексное значение ρ возникает также при произвольном по величине комплексном потенциале. Для таких потенциалов уже нет четкой разницы между классически достижимыми и недостижимыми углами рассеяния.

Поскольку в рассматриваемом здесь случае $\left|\frac{V_0}{E}\right| \ll \frac{\hbar}{R}$ амплитуда рассеяния вперед определяется борновским приближением, то от величины мнимой части потенциала существенно зависит отношение упругого сечения к неупругому и действительной части амплитуды вперед к мнимой. Последнее отношение представляет интерес в связи с установленными в работе [24] общими критериями нарушения теоремы Померанчука об асимптотическом равенстве полных сечений взаимодействия частицы и античастицы. А именно, нарушение имеет место, если для амплитуды вперед выполняется соотношение

$$\frac{Re\, f(E,0)}{Im\, f(E,0)}\,\frac{1}{\ln E} \to 0. \qquad (4.15)$$

Подробное рассмотрение этого вопроса для потенциальной модели, где выполняется асимптотически условие $\frac{V_0(E)}{E} \ll \frac{\hbar}{R(E)}$, проведено в работе [6].

§5. "Сильные" потенциалы и малые углы рассеяния [x/]

В рамках квазиклассического метода В.К.Б. менее всего исследована область больших классических функций действия $|\max S_{кл}| \gg \hbar$ или "сильных" потенциалов

$$\left|\frac{V_0}{E}\right| \gg \frac{\hbar}{R} \qquad (5.1)$$

и малых углов рассеяния

$$\theta \lesssim \frac{\hbar}{R}. \qquad (5.2)$$

Результаты, которые имеются в литературе, получены в основном с помощью эйконального приближения, являющегося, как мы уже отмечали, частным случаем метода В.К.Б. Однако вопрос об энергетических границах справедливости эйконального приближения не совсем ясен. Чаще всего считают [2], что приближение справедливо при условии

$$\left|\frac{V_0}{E}\right| \ll 1. \qquad (5.3)$$

Приближенная оценка членов эйконального разложения [18] дает ограничение:

$$\left|\frac{V_0}{E}\right| \ll \sqrt{\frac{\hbar}{R}}, \qquad (5.4)$$

которое с точки зрения классического предела $\hbar \to 0$ принципиально отличается от первого. С другой стороны, имеется ряд работ, где применение эйконального приближения в случае [26] $\sqrt{\frac{\hbar}{R}} \ll \frac{V_0}{E} \ll 1$ или

---

x/ В изложении §5 мы будем следовать работам [25-30].

при [27] $V_0(E) \approx E$ находится в согласии с физическими результатами, полученными в рамках других, более общих методов. В частности, полное сечение рассеяния на юкавском потенциале при $V_0 \approx E$ совпадает с границей Фруассара [28].

Отметим, что метод стационарной фазы (см. §3) хотя и неприменим для вычисления квазиклассической амплитуды рассеяния на малые углы, но приблизительно указывает, куда смещается область прицельных параметров, которые дают основной вклад в интеграл (3.3). Из равенства (2.4) следует, что при $\frac{R\theta}{\lambdabar} \ll 1$ точка экстремума смещается в область, где $R\frac{d}{d\rho}|S_{кл}(\rho)| \approx |S_{кл}(\rho)| < \hbar$. Последнее неравенство (см. §4) означает, что в данной области квазиклассическую фазу рассеяния можно аппроксимировать "борновским" приближением (4.3). Поэтому следует ожидать, что условия (5.3) и (5.4) являются лишь достаточными и эйкональное приближение для амплитуды рассеяния на гладких потенциалах справедливо в дифракционной области малых углов при любых потенциальных энергиях.

Вычислим в квазиклассическом приближении (3.3) полное сечение рассеяния:

$$\sigma_t = 4\pi\lambdabar \, Im\, f(\theta) = Im\left[\frac{4\pi}{i}\int_0^\infty \rho\, d\rho\,\left(e^{2i\delta^{ВКБ}(\rho)} - 1\right)\right] \tag{5.5}$$

на гауссовском потенциале: $V(r) = \frac{2V_0}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{r^2}{R^2}}$ в асимптотике (5.1).

Прибавляя и вычитая в выражении (5.5) под знаком круглых скобок функцию $\exp\{i2\chi_0(\rho)\}$, представим полное сечение в виде

$$\sigma_t = \sigma_{t\,эйк.} + \Delta\sigma_t\,, \tag{5.6}$$

где

$$\sigma_{t\,эйк.} = 4\pi\, Im\left[i\int_0^\infty \rho\, d\rho\,\left(1 - e^{2i\chi_0(\rho)}\right)\right]; \quad 2\chi_0(\rho) = -\frac{R}{\lambda}\frac{V_0}{E}\, e^{-\frac{\rho^2}{R^2}}, \tag{5.7}$$

$$\Delta\sigma_t = 4\pi\, Im\left[i\int_0^\infty \rho\, d\rho\, e^{2i\chi_0(\rho)}\left(1 - \exp\{2i\delta^{ВКБ}(\rho) - 2i\chi_0(\rho)\}\right)\right]. \tag{5.8}$$

Асимптотика эйконального выражения при $\left|\frac{V_0}{E}\right|\frac{R}{\lambdabar} \gg 1$ легко вычисляется [2] с помощью замены

$$e^{-\frac{\rho^2}{R^2}} = x, \tag{5.9}$$

$$\sigma_{t\,эйк.} = 2\pi\, Im\left[iR^2\int_0^1 \frac{dx}{x}\left(1 - e^{-i\frac{RV_0}{\lambda E}x}\right)\right] \simeq 2\pi\rho_{max}^2\,, \tag{5.10}$$

$$\rho_{max} = R\sqrt{\ln\left|\frac{RV_0}{\lambdabar E}\right|}\,. \tag{5.11}$$

Важно подчеркнуть, что основной вклад в интеграл (3.7) дают большие прицельные параметры $\rho \approx \rho_{max}$, которые определяются из условия $2\chi_0(\rho) \approx 1$.

После замены, аналогичной (5.9), выражение (5.8) для $\Delta\sigma_t$ принимает вид

$$\Delta\sigma_t = 4\pi\, Im\int_0^1 dx\, e^{i2\chi_0(0)x}\, g(x). \tag{5.12}$$

Здесь

$$g(x) = \frac{1}{ix}\left[\exp\{2i[\delta^{ВКБ}(\rho) - \chi_0(\rho)]\} - 1\right]\Big|_{\rho = R\sqrt{\ln\frac{1}{x}}} \tag{5.13}$$

-дифференцируемая и несингулярная функция на интервале $[0,1]$. Выполняя в (5.12) интегрирование по частям, получим:

$$\Delta\sigma_t = -4\pi R^2\, Im\,\Big[\frac{e^{2i\delta^{ВКБ}(0)} - e^{2i\chi_0(0)}}{2\chi_0(0)} - \frac{1}{2\chi_0(0)}\int_0^1 dx\, e^{i2\chi_0(0)x}\frac{dg(x)}{dx}\Big]. \qquad (5.14)$$

Из последнего выражения виден знакопеременный характер эйконального разложения в ряд по

$$[\delta^{ВКБ}(0) - \chi_0(0)] \approx \frac{R}{\bar\lambda}\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\frac{V_0}{E}\Big)^n C_n .$$

Оценка первых членов этого ряда с целью выяснить границы применимости эйконального приближения (5.7) приводит к ограничениям сверху на величину $\frac{V_0}{E}$ /18/: $\frac{V_0}{E} \ll \sqrt{\frac{\bar\lambda}{R}}$.

Используя разложение классической функции действия

$$2\delta^{ВКБ}(\rho)\Big|_{\rho=\sqrt{\ln\frac{1}{x}}\,R} = -\frac{R}{\bar\lambda}\Big[x\frac{V_0}{E} + x^2\Big(\frac{V_0}{E}\Big)^2\frac{1}{2\sqrt{\pi}}(1+\sqrt{\pi}\,\ln x)+\dots\Big] \qquad (5.15)$$

и полагая $x = y\left|\frac{V_0}{E}\right|\sqrt{\frac{R}{\bar\lambda}}$, для поправки $\Delta\sigma_t$ получим при $\left|\frac{V_0}{E}\right| \gg \frac{\bar\lambda}{R} \to 0$ следующую оценку:

$$\lim_{\sqrt{\frac{R}{\bar\lambda}}\left|\frac{V_0}{E}\right| \gg \sqrt{\frac{\bar\lambda}{R}} \to 0} \Delta\sigma_t \approx \int_0^{\left|\frac{V_0}{E}\right|\sqrt{\frac{R}{\bar\lambda}}} dy\, e^{-i\sqrt{\frac{R}{\bar\lambda}}\,y}\,\frac{\exp\{-iy^2[1+O(\sqrt{\frac{\bar\lambda}{R}}\,y)]\}-1}{iy} \qquad (5.16)$$

$$\approx O\Big(\int_0^{\infty} dy\, y\, e^{-i\sqrt{\frac{R}{\bar\lambda}}\,y}\Big) \approx O\Big(\frac{\bar\lambda}{R}\Big).$$

Заметим, что области $\left|\frac{V_0}{E}\right| \ll \sqrt{\frac{\bar\lambda}{R}}$ и $\frac{V_0}{E} \gg \frac{\bar\lambda}{R}$ частично пересекаются. Следовательно, эйкональное приближение применимо для гауссовских потенциалов произвольной величины.

Причина справедливости эйконального приближения амплитуды рассеяния на малые углы для любых потенциальных энергий, как и следовало ожидать, в том, что в интеграле (5.5) быстро осциллирующая функция $\exp\{i\frac{2S_{кл}(\rho)}{\hbar}\}$ начинает давать вклад, сравнимый с единицей лишь в области прицельных параметров $\rho \approx \rho_{max}$, где $\frac{2S_{кл}(\rho)}{\hbar}$ – порядка единицы и, следовательно, совпадает с эйкональной фазой (см. §4).

Такое поведение подынтегральной функции в (5.5) физически означает сильную интерференцию дифрагирующих участков плоской волны рассеивающейся частицы, для которой $\rho < \rho_{max}$ (а также частичное или полное поглощение, если потенциал – комплексная величина).

Подробное исследование эйконального представления в случае "сильных" потенциалов (5.1) было проведено в недавних работах /27,29,30/, посвященных асимптотическому поведению амплитуд рассеяния в некоторых моделях квантовой теории поля. Примером такого потенциала в редже-эйкональной модели /22/ при $E \to \infty$ может служить обмен ультрапомероном /30/, т.е. полюсом Редже, траектория которого лежит выше траектории полюса Померанчука. Подобная ситуация возникает также при рассеянии частиц в гравитационном поле /27/.

Согласно физической интерпретации, изложенной выше, при $\left|\frac{V_0}{E}\right|\frac{R}{\bar\lambda} \to \infty$ справедлива типично оптическая картина рассеяния света на черной сфере /31/ с растущим радиусом (дифракция Фраунгофера). Амплитуду рассеяния нетрудно получить /30/ из (4.5), подставляя вместо $(e^{i2\chi_0}-1)$ ступенчатую функцию

$$\Theta(\rho_{max}-\rho) = \begin{cases} 1, & \rho \le \rho_{max}, \\ 0, & \rho > \rho_{max}, \end{cases}$$

$$f_{\text{эйк.}}(\theta) \cong i \frac{\rho_{max}}{2\theta} J_1\left(\frac{\rho_{max}}{\lambda}\theta\right). \qquad (5.17)$$

При $\left|\frac{V_0(E)}{E}\frac{R(E)}{\lambda}\right| \approx E^n$, $n > 0$, в асимптотике $E \to \infty$, которая совпадает с пределом $\hbar \to 0$, из (5.11) и (5.17) следуют результаты работ /27,29,30/:

I . σ_t стремится к бесконечности,

II . Отношение реальной части к мнимой амплитуды вперед стремится к нулю.

III . $\frac{\sigma_{el}}{\sigma_{in}} \to \frac{1}{2}$.

IV . Дифракционный пик сужается таким образом, что произведение его ширины на σ_t есть константа.

Стремление к бесконечности (1) полного сечения и дифракционной амплитуды в классическом пределе $\hbar \to 0$ связано с тем, что в классической механике во всяком поле, обращающемся в нуль только при $r \to \infty$, полное сечение рассеяния оказывается бесконечным (см. §1). Отсюда следует, что основной вклад в полное сечение при $\left|\frac{V_0}{E}\right| \gg \frac{\lambda}{R}$, так же как и в случае $\left|\frac{V_0}{E}\right| < \frac{\lambda}{R}$, дает дифракционная область углов. При этом характерный угол рассеяния определяется величиной

$$\theta \lesssim \frac{\lambda}{\rho_{max}}. \qquad (5.18)$$

Таким образом, при любых потенциальных энергиях квантовые эффекты рассеяния на гладких потенциалах значительно интенсивнее классических. Поэтому здесь неприменима часто используемая оценка для характерных углов квазиклассического рассеяния /2,13,16/

$$\theta \approx \frac{\Delta k}{k} \approx \frac{\Delta F \Delta t}{k} \approx \frac{\left|\frac{V_0}{R}\right|\left(\frac{R}{k}\right)}{k} \approx \frac{V_0}{E}, \qquad (5.19)$$

с помощью которой в монографии /13/ объясняется преимущественное рассеяние вперед при $k \to \infty$, $\frac{V_0}{E} \to 0$. Из неравенства (5.18) мы видим, что в области $\left|\frac{V_0}{E}\right| \gg \frac{\lambda}{R}$ с уменьшением $\frac{V_0}{E}$ происходит даже расширение дифракционного пика.

Результаты *II* , *III* не зависят от величины абсорбционной части потенциала, в отличие от случая "слабых" потенциалов, рассматривавшегося в §4. Согласно работе /24/, см. (4.15), теорема Померанчука о равенстве полных сечений частицы и античастицы в такой модели будет выполняться, несмотря на рост полного сечения.

Результат *III* , $\sigma_{el} = \sigma_{in} = \pi\rho^2_{max}$, легко понять из принципа Бабине /31/, который гласит: "Дополнительные по отношению друг к другу экраны дают одинаковое распределение дифрагирующего света". Отсюда нетрудно сделать заключение, что полное количество света, рассеянного на черном теле, равно количеству света, падающего на его поверхность и поглощенного им.

Результат *IV* есть следствие того, что при рассеянии на черной сфере полное сечение и размер дифракционного пика определяются одной и той же величиной – радиусом сферы.

Мы рассмотрели здесь лишь частный случай гладкого потенциала – гауссовский потенциал.

Тем не менее физическая интерпретация полученных результатов в работах /25,27,29,30/ позволяет думать, что описанная выше качественная картина рассеяния в основных чертах справедлива для всех "сильных" потенциалов, достаточно быстро убывающих на бесконечности.

Если это так, что значительные по величине потенциалы могут быть аппроксимированы черной сферой с радиусом, энергетическая зависимость которого определяется из поведения соответствующей эйкональной фазы на бесконечности. В частности, из поведения фазы типа

$se^{-(\rho/R)^N}$, $s \to \infty$, следует оценка для полного сечения: $\sigma_t \approx (\ln s)^{\frac{2}{N}}$.
Отметим, что нарушение теоремы Фруассара /28/ для $N < 1$ (дальнодействующие потенциалы) есть следствие невыполнения условия этой теоремы в формулировке Мартена /32/.

Заключение

В настоящем обзоре рассматривалось применение квазиклассического метода В.К.Б. к вычислению амплитуды рассеяния на гладких потенциалах в различных областях изменения динамических и кинематических параметров рассеяния.

Особенностью квазиклассического взаимодействия в случае гладких потенциалов произвольной величины является преимущественное рассеяние в дифракционной области углов $\theta \lesssim \frac{\lambda}{R}$.

С ростом потенциальной энергии, $\left|\frac{V_0}{E}\right|\frac{R}{\lambda} \to \infty$, при переходе из области $\left|\frac{V_0}{E}\right| < \frac{\lambda}{R}$ в область $\frac{V_0}{E} \gg \frac{\lambda}{R}$ обменный механизм рассеяния сменяется чисто оптическим и возникают следующие качественные изменения:

1. Логарифмический рост полного сечения и сужение дифракционного пика.

2. Отношения реальной части амплитуды вперед к мнимой и упругого сечения к неупругому не зависят от величины абсорбционной части потенциала.

3. Наличие поглощения существенно влияет на смену режимов рассеяния с ростом потенциала в области больших углов. А именно: для мнимых потенциалов орировский режим сохраняется, для действительных сменяется классическим и при $V_0 \gtrsim E$ вообще исчезает.

Рассеяние на "сильном" гладком потенциале в области малых углов, $\lim\limits_{E\to\infty} \frac{R(E)}{\lambda}\frac{V_0(E)}{E} \to \infty$, физически адекватно дифракции света на черном шаре с растущим радиусом. Рост радиуса и полного сечения обусловлен постепенным убыванием потенциала при $r \to \infty$. Отражением этого факта, в частности, является бесконечная величина полного сечения в классической теории.

Следует отметить, что верхние границы сечений взаимодействий при высоких энергиях, установленные из общих принципов квантовой теории поля, также согласуются с полуклассическими представлениями о рассеянии на сильно поглощающем шаре /33/.

Автор выражает глубокую благодарность Д.И.Блохинцеву за стимулирующие обсуждения и ценные замечания и Б.М. Барбашову за постоянное внимание к работе, а также искреннее благодарит А.А.Архипова, В.А.Матвеева, М.А.Мествиришвили, Л.И.Пономарева, В.И.Саврина, А.Н.Сисакяна, Н.Е. Тюрина за полезные дискуссии.

Литература

1. D.I. Blokhintsev, V.S. Barashenkov, V.G. Grishin. Nuovo Cim., 9, 249 (1958);
D.I. Blokhintsev, V.S. Barashenkov, B.M. Barbashov. Nuovo Cim., 12, 602 (1959);
D.I. Blokhintsev. Nucl.Phys., 31, 628 (1962).
2. R.I. Clauber. Lectures in Theoretical Physics, vol. 1, N.Y.(1959).
3. S.P. Alliluyev, S.S. Gerstein and A.A. Logunov. Phys. Letters, 18, 195 (1965).
4. Ю.Ф. Пирогов. ЖЭТФ, 55, 854 (1968).

5. В.И. Саврин, О.А. Хрусталев. Препринт ИФВЭ, 68-19-К, Серпухов 1968;
О.А. Khrustalev, V.I. Savrin, N.Ye. Tyurin. JINR Preprint, E2-4479, Dubna, 1969.
В.И. Саврин, И.Е. Тюрин, О.А. Хрусталев. ТМФ, 4, 322 (1970).
6. В.И. Саврин, И.Е. Тюрин, О.А. Хрусталев. ТМФ, 7, 30 (1971).
7. М.М. Мествиришвили, Г.Л. Рчеулишвили. Препринт ИФВЭ, СТФ 70-72, Серпухов, 1970.
8. H. Cheng, T.T. Wu, DESY 70367, Hamburg (1970).
9. A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze. Nuovo Cim., 29, 380. (1963).
10. V.R. Garsevanishvili, V.A. Matveev, L.A. Slepchenko, A.N. Tavkhelidze. Phys. Lett., 29B, 191n (1969).
11. B.M. Barbashov, S.P. Kuleshov, V.A. Matveev, V.N. Pervushin, A.N. Sissakian, A.N. Tavkhelidze. Phys.Lett., 33B, 484 (1970);
H. Cheng, T.T. Wu. Phys.Rev., 186, 1611 (1969).
12. Дж. Хединг. Введение в метод фазовых интегралов, "Мир", 1965.
13. Р. Ньютон. Теория рассеяния волн и частиц, "Мир", М., 1969.
14. Д.И. Блохинцев. Основы квантовой механики. Высшая школа, М., 1963.
15. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Квантовая механика, "Наука", М., 1963.
16. А.И. Москалев, Материалы V школы физики, ФТИ, ч. 1, т. 1, Ленинград, 1970.
17. G. Moliere. Z. Naturforsch, 2A, 133 (1947).
18. L.I. Schiff. Phys.Rev., 103, 443 (1956);
P.S. Saxon, L.I. Schiff. Nuovo Cim., 6, 614 (1957).
19. E. Predazzy. Ann. of Phys., 36, 228, 250 (1966).
20. В.С. Барашенков, В.А. Тонеев. УФН, 100, 425 (1970).
21. T.T. Chou, C.M. Yang. Phys.Rev., 170, 1591 (1968).

22. S.C. Frautschi, B. Margolis. Nuovo. Cim., 56A, 1155 (1968);
А.А. Ансельм, И.Т. Дятлов. ЯФ, 9, 416 (1969).
23. А.В. Матвеенко, Л.И. Пономарев. ЖЭТФ, 57, 2084 (1969).
24. Г.Г. Волков, А.А. Логунов, М.А. Мествиришвили. ТМФ, 4, 196 (1970).
25. V.I. Pervushin. JINR Preprint, E2-5938, Dubna, 1971.
26. И.Б. Хриплович. ЯФ, 1, 912 (1965).
27. И.В. Андреев. ФИАН, Краткие сообщения по физике, №6, 34, М., 1970.
28. M. Froissart. Phys.Rev., 123, 1053 (1961).
29. H. Cheng, T.T. Wu. Phys.Rev.Lett., 24, 1456 (1970).
30. S.I. Chang, T.M. Yau. Phys.Rev.Lett., 25, 1586 (1970).
31. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля, М., "Наука", 1967.
32. A. Martin. Phys.Rev., 129, 1432 (1963); 142, 930 (1966).
33. А.А. Логунов, Нгуен Ван Хьеу, О.А. Хрусталев. Сб. "Проблемы теоретической физики", М., "Наука", 1969.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 августа 1971 года.