С322
С-844

30/VIII-71

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

2913/2-71

P2 - 5936

В.Н. Стрельцов

НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1971

Р2 - 5936

В.Н. Стрельцов

НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ*

* В порядке обсуждения.

Объединенный институт ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

1. Существует целый круг физических задач, в которых скорости движения (v) изучаемых материальных объектов достаточно малы по сравнению со скоростью света (c). При этом, может быть, особого внимания заслуживает так называемое (собственно) нерелятивистское приближение, в рамках которого учитываются только малые величины порядка v^2/c^2, тогда как величины порядка v^4/c^4 и выше отбрасываются как бесконечно малые.

Если мы рассмотрим релятивистскую формулу преобразования для энергии

$$E = (E' + \beta c p'_x)(1 - \beta)^{-1/2},$$

где $\beta = v/c$, то в нерелятивистском приближении, например для покоящейся в системе K' частицы, указанная формула, очевидно, будет иметь вид

$$E = E'\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right). \qquad (1)$$

Откуда с учётом того, что для данной частицы $E' = mc^2$, можно получить известную формулу

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2.$$

С другой стороны, если $p'_x\, c / E' = v'/c = \beta' \neq 0$ и

$$\beta' \approx \beta\ , \tag{2}$$

то вместо (1) будем иметь

$$E = (E' + \beta c p'_x)(1 + \frac{1}{2}\beta^2) = E'(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \beta\beta' + \frac{1}{2}\beta^3\beta').$$

Но в рамках рассматриваемого приближения в последнем выражении 4-ый член в скобках бесконечно мал. Его следует отбросить.

В результате формула преобразования для энергии в нерелятивистском приближении будет иметь вид[x/]

$$E = E'(1 + \frac{1}{2}\beta^2) + \beta c p'_x\ . \tag{3}$$

По аналогии с этим для соответствующей формулы преобразования импульса будем иметь следующее выражение:

$$p_x = (p'_x + \frac{\beta}{c}E')(1 + \frac{1}{2}\beta^2)\ . \tag{3'}$$

Опираясь на формулы (3) и (3'), рассмотрим теперь процедуру преобразования величины $E^2 - c^2 p_x^2$ при переходе к другой системе отсчёта.

После подстановки указанных формул и отбрасывания членов порядка β^4 на основании условия (2) получим

$$E^2 - c^2 p_x^2 = E'^2(1 + \beta\ ) + 2E'\beta c p' - c^2(p'_x + \frac{\beta}{c}E')^2\ . \tag{4}$$

Преобразуя далее правую часть выражения (4), как и в релятивистском случае, получим равенство

$$E^2 - c^2 p_x^2 = E'^2_x - c^2 p'^2_x\ .$$

[x/] С учётом того, что в рассматриваемом приближении $E' = mc^2(1 + \frac{1}{2}\beta'^2)$ и $p'_x = m\beta' c(1 + \frac{1}{2}\beta^2)$, формула (3) может быть, в частности, переписана в виде

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}m(v' + v\ )^2\ . \tag{3a}$$

2. Итак, мы получили формулы преобразований для энергий и импульса в нерелятивистском приближении.

Совершенно естественно задать теперь вопрос:

А как преобразуются в рассматриваемом приближении пространственно-временные координаты изучаемых материальных объектов?

С целью ответа на него возьмем формулу преобразования Лоренца для координаты x

$$x = (x' + \beta c t')(1 - \beta^2)^{-1/2} . \tag{5}$$

На основании предыдущих результатов сразу можно сказать, что в нерелятивистском приближении (где члены порядка β^2 сохраняются) вытекающая из (5) формула преобразования для координаты x должна отличаться от соответствующей формулы Галилея. Именно, она должна иметь вид

$$x = (x' + \beta c t')\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right) . \tag{6}$$

При этом соответствующая формула преобразования времени также в отличие от подобной формулы Галилея будет даваться (по аналогии с (3)) выражением

$$t = t'\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right) + \frac{\beta}{c}x' . \tag{6'}$$

Качественно такой вид последней формулы определяется тем, что в частном случае входящие в нее координаты x' и t' могут описывать движение некоторого объекта в системе K' x/.

Здесь можно отметить также, что, например, потенциалы электромагнитного поля будут преобразовываться в рассматриваемом приближении по формулам

$$A_x = (A'_x + \beta\phi')\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right), \quad A_{y,z} = A'_{y,z} \quad , \phi = \phi'\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right) + \beta A'_x .$$

---

x/ Более строгий вывод формул (6) и (6') содержится в п.1 [1]. Процедура доказательства неизменности пространственно-временного интервала обсуждается в [2].

3. Полученные выше результаты указывают на то, что рассмотренное собственно нерелятивистское и галилеево приближения суть совершенно различные приближения. При этом, естественно, должен возникнуть следующий вопрос:

Каким формулам преобразований будут удовлетворять энергия и импульс в том случае, если соответствующие формулы преобразований для координат имеют вид

$$x = x' + \beta c\, t', \qquad t = t' \,? \tag{7}$$

Коль скоро в галилеевом приближении фактически сохраняются только члены нулевого порядка по β, то вместо (3) и (3') в этом случае мы, очевидно, будем иметь

$$E = E'$$

и (8)

$$p_x = p'_x + \frac{\beta}{c} E' .$$

Учитывая далее, что в галилеевом приближении $E' = mc^2$, последнее выражение можно также переписать в форме

$$p_x = p'_x + m\beta c .$$

Таким образом, как показало предыдущее рассмотрение, при решении физических задач для достаточно малых скоростей движения материальных объектов в зависимости от требуемой точности мы можем пользоваться или собственно нерелятивистским, или галилеевым приближением. При этом, естественно, нельзя считать корректным совместное применение формул (например, (3а) и (7)), относящихся к различным приближениям.

Литература

1. В.Н. Стрельцов. Сообщение ОИЯИ, Р2-5313, Дубна, 1970.
2. В.Н. Стрельцов. Сообщение ОИЯИ, Р2-5363, Дубна, 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел

15 июля 1971 года.