ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 5934

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Л.Г. Заставенко

ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ МНОГИХ БОЗОНОВ, СВЯЗАННЫХ СИЛАМИ ТЯГОТЕНИЯ

1971

P2 - 5934

Л.Г. Заставенко

ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ МНОГИХ БОЗОНОВ, СВЯЗАННЫХ СИЛАМИ ТЯГОТЕНИЯ

Направлено в ТМФ

§1. Введение

Рассмотрим систему одинаковых бозонов, взаимодействующих между собой посредством парных сил с ньютоновым потенциалом $-1/|x_i - x_j|$. Такая система описывается в формализме вторичного квантования уравнением Шредингера

$$H\Omega = E\Omega \tag{1}$$

с гамильтонианом

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\int \nabla\psi^+(x)\ \nabla\psi(x)\,dx \\ &-\frac{1}{2}\int \frac{dx\,dy}{|x-y|}\,\psi^+(x)\ \psi^+(y)\ \psi(y)\ \psi(x)\ . \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\psi(x)$, $\psi^+(x)$ – операторы, удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$\begin{aligned} &\psi(x)\ \psi(y) - \psi(y)\ \psi(x) = \psi^+(x)\ \psi^+(y) - \psi^+(y)\ \psi^+(x) = 0\ , \\ &\psi(x)\ \psi^+(y) - \psi^+(y)\ \psi(x) = \delta(x-y)\ . \end{aligned} \tag{3}$$

Оператор числа частиц $\hat{N}$,

$$\hat{N} = \int dx\ \psi^+(x)\ \psi(x)\ , \qquad (4)$$

коммутирует с гамильтонианом. В настоящей работе мы получим энергию основного состояния уравнения (1) асимптотически точно, когда N , число частиц, неограниченно растет. В работе /1/ даны оценки для E_N , наименьшей энергии N –частичного состояния:

$$-\frac{N^2(N-1)}{6\pi} > E_N > -\frac{N^2(N-1)}{16}\ . \qquad (5)$$

У нас

$$E_N = -0{,}0547N^3 + \ldots\ , \qquad (6)$$

что согласуется с (5); точками обозначены члены, малые по сравнению с N^3 .

§2. Минимизация гамильтониана

Мы выделим из $\psi(x)$ не операторную часть $f(x)$ и перейдем к новым операторам ϕ по формуле

$$\psi(x) = N^2 f(Nx) + N^{3/2}\ \phi(Nx)\ . \qquad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} &[\phi(\xi),\ \phi(\eta)] = [\phi^+(\xi),\ \phi^+(\eta)] = 0\ , \\ &[\phi(\xi),\ \phi^+(\eta)] = \delta(\xi-\eta)\ . \end{aligned} \qquad (8)$$

Для операторов $\hat{H}$ и $\hat{N}$ получаем представления вида

$$\hat{H} = \hat{H}_0 N^3 + \hat{H}_1 N^{5/2} + \hat{H}_2 N^2 + \hat{H}_3 N^{3/2} + \hat{H}_4 N\ ,$$

$$\hat{N} = \hat{N}_0 N + \hat{N}_1 N^{1/2} + \hat{N}_2 , \tag{9}$$

где операторы $\hat{H}_i$, $\hat{N}_i$ явно от N не зависят и содержат операторы ϕ , ϕ^+ в степени i ;

$$\hat{N}_0 = \int f^2(\xi)^2 \, d\xi ,$$

$$\hat{H}_0 = T + V , \tag{10}$$

$$T = \frac{1}{2} \int (\nabla f(\xi))^2 \, d\xi ,$$

$$V = -\frac{1}{2} \int \frac{d\xi \, d\eta}{|\xi - \eta|} f(\xi)^2 f(\eta)^2 .$$

2.1. Из (9) следует, что задача отыскания наименьшего значения математического ожидания оператора $\hat{H}$ при данном значении N математического ожидания оператора $\hat{N}$ в главном порядке по N сводится к задаче отыскания наименьшего значения функционала $\hat{H}_0$ при данном значении $\hat{N}_0 = 1$ функционала N_0 . Последняя задача, в свою очередь, сводится к задаче отыскания значения $\lambda = \lambda_0$, такого, чтобы убывающее при $|\xi| \to \infty$ решение уравнения

$$\left[-\frac{1}{2} \Delta - \int \frac{d\eta \, f^2(\eta, \lambda)}{|\xi - \eta|} - \lambda \right] f(\xi, \lambda) = 0 \tag{11}$$

доставляло функционалу $\hat{N}_0$ значение $\hat{N}_0 = 1$. После того, как величина λ_0 и функция $f(\xi, \lambda_0)$ найдены, интересующее нас значение наименьшей энергии N -частичного состояния E_N определяется равенством

$$E_N = \hat{H} \, [f(\xi, \lambda_0)] \, N^3 . \tag{6'}$$

Таким образом, при $N \to \infty$ в операторе $\psi(x)$ главной становится неоператорная часть $N^2 f(xN)$; она-то и определяет главный член в разложении E_N при $N \to \infty$.

2.2. Умножив (11) на $f(\xi, \lambda)$ и проинтегрировав по ξ, получим соотношение

$$T = -2V + \lambda \hat{N}_0 .$$

Умножив (11) на $\xi \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi, \lambda)$ и проинтегрировав по ξ, получим

$$T = -5V + 3\lambda \hat{N}_0 .$$

Исключая $\hat{N}_0$, найдем

$$T = -\frac{1}{2} V .$$

Таким образом, для уравнения (11) имеет место теорема вириала, так что запись функционала $\hat{H}_0$ может быть упрощена до

$$\hat{H}_0 = -T = \frac{1}{2} V .$$

2.3. Проинтегрировав по направлению η, приведем уравнение (11) к виду

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2 U(r,\lambda')}{dr^2} + 4\pi U(r,\lambda') \int_0^r U^2(\rho, \lambda')\left[\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right] d\rho = \lambda' U(r,\lambda'); \quad (12)$$

здесь

$$U(r,\lambda') = r f(r, \lambda),$$

$$\lambda' = \lambda + 4\pi \int_0^\infty U^2(\rho, \lambda')\, d\rho / \rho :$$

Удобно интегрировать уравнение (12), задав начальные условия $U(0,\lambda')=0$, $U'(0,\lambda')=1$ и подбирая λ' таким образом, чтобы функция $U(r, \lambda')$ не имела нулей при $r > 0$, но стремилась к нулю при $r \to \infty$.

2.4. Переход от (6'') к (6') осуществляется с помощью свойства подобия уравнения (12), состоящего в том, что если $U(r, \lambda')$ есть решение уравнения (12), удовлетворяющего краевым условиям

$$U(0) = U(\infty) = 0 ,$$

то функция

$$U_1(r, \lambda') = CU(Cr, C\lambda')$$

для любого $C > 0$ тоже удовлетворяет уравнению (12) с $\lambda_1' = C^2\lambda'$ и краевым условием

$$U_1(0) = U_1(\infty) = 0 .$$

Энергия E_N находится при этом как отношение

$$E_N = N^3 \hat{H} \left(\frac{U(r,\lambda')}{r}\right) / \{\hat{N} \left(\frac{U(r,\lambda')}{r}\right)\}^3 . \tag{6''}$$

Численный расчёт дает (6).

2.5. Заметим, что результат (6) остается справедливым при замене в (2) потенциала взаимодействия $-1/|x-y|$ на любой потенциал $V(x-y)$, имеющий при $x \to y$ ту же особенность; (6) определяется поведением потенциала на малых расстояниях и не зависит от скорости убывания $V(r)$ при $r \to \infty$.

В заключение выражаю благодарность М.А. Маркову за интерес к работе.

Литература

1. F. Calogero, C. Marchioro. J. Math. Phys., 10, 562 (1969).

Рукопись поступила в издательский отдел
14 июля 1971 года.