

30/VIII-71

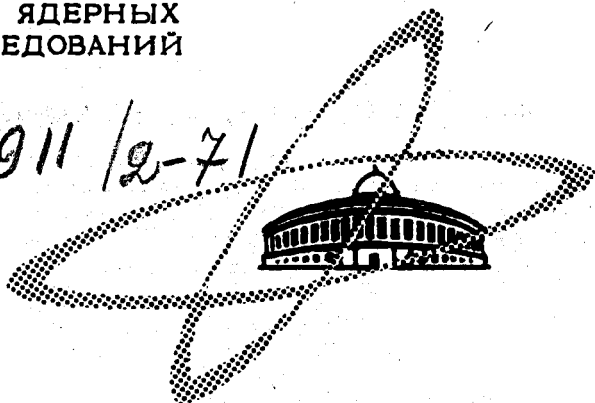
3-366

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна.

2911/2-71

P2 - 5934



ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Л. Г. Заставенко

ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ МНОГИХ БОЗОНОВ,
СВЯЗАННЫХ СИЛАМИ ТЯГОТЕНИЯ

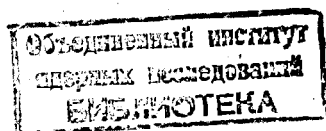
1971

P2 - 5934

Л.Г. Заставенко

**ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ МНОГИХ БОЗОНОВ,
СВЯЗАННЫХ СИЛАМИ ТЯГОТЕНИЯ**

Направлено в ТМФ



§1. Введение

Рассмотрим систему одинаковых бозонов, взаимодействующих между собой посредством парных сил с ньютоновым потенциалом $-I / |x_i - x_j|$. Такая система описывается в формализме вторичного квантования уравнением Шредингера

$$H \Omega = E \Omega \quad (1)$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{I}{2} \int \nabla \psi^+(x) \nabla \psi(x) dx - \frac{I}{2} \int \frac{dx dy}{|x-y|} \psi^+(x) \psi^+(y) \psi(y) \psi(x). \quad (2)$$

Здесь $\psi(x)$, $\psi^+(x)$ — операторы, удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$\psi(x) \psi(y) - \psi(y) \psi(x) = \psi^+(x) \psi^+(y) - \psi^+(y) \psi^+(x) = 0, \quad (3)$$

$$\psi(x) \psi^+(y) - \psi^+(y) \psi(x) = \delta(x-y).$$

Оператор числа частиц \hat{N} ,

$$\hat{N} = \int dx \psi^+(x) \psi(x) , \quad (4)$$

коммутирует с гамильтонианом. В настоящей работе мы получим энергию основного состояния уравнения (1) асимптотически точно, когда N , число частиц, неограниченно растет. В работе^{/1/} даны оценки для E_N , наименьшей энергии N -частичного состояния:

$$-\frac{N^2(N-1)}{6\pi} > E_N > -\frac{N^2(N-1)}{16} . \quad (5)$$

У нас

$$E_N = -0,0547N^3 + \dots , \quad (6)$$

что согласуется с (5); точками обозначены члены, малые по сравнению с N^3 .

§2. Минимизация гамильтониана

Мы выделим из $\psi(x)$ не операторную часть $f(x)$ и перейдем к новым операторам ϕ по формуле

$$\psi(x) = N^2 f(Nx) + N^{3/2} \phi(Nx) . \quad (7)$$

Здесь

$$[\phi(\xi), \phi(\eta)] = [\phi^+(\xi), \phi^+(\eta)] = 0 , \quad (8)$$

$$[\phi(\xi), \phi^+(\eta)] = \delta(\xi - \eta) .$$

Для операторов \hat{H} и \hat{N} получаем представления вида

$$\hat{H} = \hat{H}_0 N^3 + \hat{H}_1 N^{3/2} + \hat{H}_2 N^2 + \hat{H}_3 N^{3/2} + \hat{H}_4 N ,$$

$$\hat{N} = \hat{N}_0 N + \hat{N}_1 N^{1/2} + \hat{N}_2 \quad (9)$$

где операторы \hat{H}_i , \hat{N}_i явно от N не зависят и содержат операторы ϕ , ϕ^\dagger в степени i ;

$$\hat{N}_0 = \int f^2(\xi)^2 d\xi,$$

$$\hat{H}_0 = T + V, \quad (10)$$

$$T = \frac{1}{2} \int (\nabla f(\xi))^2 d\xi,$$

$$V = -\frac{1}{2} \int \frac{d\xi d\eta}{|\xi - \eta|} f(\xi)^2 f(\eta)^2.$$

2.1. Из (9) следует, что задача отыскания наименьшего значения математического ожидания оператора \hat{H} при данном значении N математического ожидания оператора \hat{N} в главном порядке по N сводится к задаче отыскания наименьшего значения функционала \hat{H}_0 при данном значении $\hat{N}_0 = I$ функционала N_0 . Последняя задача, в свою очередь, сводится к задаче отыскания значения $\lambda = \lambda_0$, такого, чтобы убывающее при $|\xi| \rightarrow \infty$ решение уравнения

$$\left[-\frac{1}{2} \Delta - \int \frac{d\eta f^2(\eta, \lambda)}{|\xi - \eta|} - \lambda \right] f(\xi, \lambda) = 0 \quad (11)$$

доставляло функционалу \hat{N}_0 значение $\hat{N}_0 = I$. После того, как величина λ_0 и функция $f(\xi, \lambda_0)$ найдены, интересующее нас значение наименьшей энергии N -частичного состояния E_N определяется равенством

$$E_N = \hat{H} [f(\xi, \lambda_0)] \cdot N^2. \quad (6')$$

Таким образом, при $N \rightarrow \infty$ в операторе $\psi(x)$ главной становится неоператорная часть $N^2 f(xN)$; она-то и определяет главный член в разложении E_N при $N \rightarrow \infty$.

2.2. Умножив (11) на $f(\xi, \lambda)$ и проинтегрировав по ξ , получим соотношение

$$T = -2V + \lambda \hat{N}_0.$$

Умножив (11) на $\xi \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi, \lambda)$ и проинтегрировав по ξ , получим

$$T = -5V + 3\lambda \hat{N}_0.$$

Исключая \hat{N}_0 , найдем

$$T = -\frac{1}{2}V.$$

Таким образом, для уравнения (11) имеет место теорема вириала, так что запись функционала \hat{H}_0 может быть упрощена до

$$\hat{H}_0 = -T = \frac{1}{2}V.$$

2.3. Проинтегрировав по направлению η , приведем уравнение (11) к виду

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2 U(r, \lambda')}{dr^2} + 4\pi U(r, \lambda') \int_0^r U^2(\rho, \lambda') \left[\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} \right] d\rho = \lambda' U(r, \lambda'); \quad (12)$$

здесь

$$U(r, \lambda') = r f(r, \lambda),$$

$$\lambda' = \lambda + 4\pi \int_0^\infty U^2(\rho, \lambda') d\rho / \rho.$$

Удобно интегрировать уравнение (12), задав начальные условия $U(0, \lambda') = 0$, $U'(0, \lambda') = 1$ и подбирая λ' таким образом, чтобы функция $U(r, \lambda')$ не имела нулей при $r > 0$, но стремилась к нулю при $r \rightarrow \infty$.

2.4. Переход от (6'') к (6') осуществляется с помощью свойства подобия уравнения (12), состоящего в том, что если $U(r, \lambda')$ есть решение уравнения (12), удовлетворяющего краевым условиям

$$U(0) = U(\infty) = 0,$$

то функция

$$U_1(r, \lambda') = CU(Cr, C\lambda')$$

для любого $C > 0$ тоже удовлетворяет уравнению (12) с $\lambda'_1 = C^2\lambda'$ и краевым условием

$$U_1(0) = U_1(\infty) = 0.$$

Энергия E_N находится при этом как отношение

$$E_N = N^3 \hat{H} \left(\frac{U(r, \lambda')}{r} \right) / \left\{ \hat{N} \left(\frac{U(r, \lambda')}{r} \right) \right\}^2. \quad (6'')$$

Численный расчёт дает (6).

2.5. Заметим, что результат (6) остается справедливым при замене в (2) потенциала взаимодействия $-1/|x-y|$ на любой потенциал $V(x-y)$, имеющий при $x-y$ ту же особенность; (6) определяется поведением потенциала на малых расстояниях и не зависит от скорости убывания $V(r)$ при $r \rightarrow \infty$.

В заключение выражаю благодарность М.А. Маркову за интерес к работе.

Литература

1. F. Calogero, S. Marchioro. J. Math. Phys., 10, 562 (1969).

Рукопись поступила в издательский отдел

14 июля 1971 года.