Р2 - 5914

В.С. Барашенков, Х.М. Бештоев

ВЫЧИСЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ВЕСОВ В SU_6 -СИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВЕННОГО ОБРАЗОВАНИЯ ЧАСТИЦ

P2 - 5914

В.С. Барашенков, Х.М. Бештоев

ВЫЧИСЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ВЕСОВ В SU_6 -СИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВЕННОГО ОБРАЗОВАНИЯ ЧАСТИЦ

В области энергии $T \gg 10$ Гэв число частиц, рождающихся в одном акте неупругого взаимодействия, становится настолько большим, что вероятности различных каналов реакции можно достаточно эффективно вычислять, лишь учитывая SU_6-мультиплеты элементарных частиц (ср. работу /1/). Возникающие при этом в выражениях для статистических весов коэффициенты (так называемый "унитарный вес" и "зарядовые" коэффициенты) могут быть рассчитаны методом, который является обобщением метода, изложенного в нашей работе /2/, и основан на использовании интегральных соотношений для характеров группы.

Явный вид характеров группы можно получить, исходя из некоторых алгебраических соотношений для неприводимых представлений группы, если учесть, что характеры являются их шпурами.

Для того, чтобы установить требуемые алгебраические соотношения, обозначим через $D[M,N,K,L]$ представление группы SU_n, характеризуемое M симметричными, N антисимметричными контравариантными индексами и K симметричными, L антисимметричными ковариантными индексами. При этом для представлений, характеризуемых одним контравариантным индексом, условимся полагать $M=N=1$ (т.е. будем считать, что один индекс сам себе симметричен и антисимметричен). Соответственно для представлений с одним ковариантным индексом положим $K=L=1$. Полное число отличных от нуля контра- и ковариантных индексов $I=M+N-1$, $J=K+L-1$.

Нетрудно убедиться, что прямое произведение произвольного неприводимого представления $D[M,N,K,L]$ на неприводимое представление $D[1,1,0,0]$ может быть представлено в виде следующей суммы представлений:

$$D[M,N,K,L] \otimes D[1,1,0,0] = \underset{\text{для } K>0}{D[M,N,K-1,L]} + \underset{\text{для } L>1}{D[M,N,K,L-1]} +$$

$$\underset{\text{для } M=0}{D[1,1,K,L]} + \underset{\text{для } M>0}{D[M+1,N,K,L]} + \underset{\text{для } M>0}{D[M,N+1,K,L]} .$$

Формула приведения прямого произведения неприводимых представлений $D[M,N,K,L]$ и $D[0,0,1,1]$ получается из предыдущей с помощью комплексного сопряжения и замены $M \to K$ и $N \to L$:

$$D[M,N,K,L] = D^*[K,L,M,N] . \tag{2}$$

Разложение на компоненты прямого произведения неприводимых представлений $D[M,N,K,L]$ и $D[1,1,1,1]$ записывается в виде

$$D[M,N,K,L] \cdot D[1,1,1,1] = \tag{3}$$

$$= \Sigma \underset{\substack{\text{для M или } K>0 \\ \text{или если } N \text{ или } L>1}}{D[M,N,K,L]} + \underset{\text{для } M>0}{D[M,N+1,K+1,L]} + \underset{\text{для любых } M \text{ и } K}{D[M+1,N,K+1,L]} +$$

$$+ \underset{\text{для } K>0}{D[M+1,N,K,L+1]} + \underset{\text{для } M \text{ и } K>0}{D[M,N+1,K,L+1]} +$$

$$+ \underset{\text{для } L>1}{D[M,N,K+1,L-1]} + \underset{\text{для } M \text{ и } K\geq 1}{D[M-1,N,K-1,L]} + \underset{\text{для } N \text{ и } L>1}{D[M,N-1,K,L-1]} +$$

$$+ \underset{\text{для } M\geq 1 \text{ и } L>1}{D[M-1,N,K,L-1]} + \underset{\text{для } N>1 \text{ и } K\geq 1}{D[M,N-1,K-1,L]} +$$

$$+ \underset{\text{для } M>1}{D[M-1,N+1,K,L]} + \underset{\text{для } K>1}{D[M,N,K-1,L+1]} + \underset{\text{для } N>1}{D[M+1,N-1,K,L]}$$

Первое слагаемое здесь берется с коэффициентом 1,2,3 или 4, равным числу указанных условий. В соответствии с определением чисел M, N, K, L следует помнить, что $M+N=0$, если число контравариантных индексов $I=0$; аналогично $K+L=0$, когда число ковариантных индексов $J=0$ (в противном случае $I=M+N-1$, $J=K+L-1$).

В разложениях (1) и (3) не все представления являются неприводимыми. Некоторые из них имеют число антисимметричных индексов, равное порядку группы n или $n-1$ (напомним, что для группы SU_n числа $N,L \leq n$).

Используя свертку с n-мерным полностью антисимметричным тензором, эти представления можно разложить на неприводимые:

$$D[M,n,K,L] = D[M-1,1,K,L]\,; \tag{4}$$

$$D[M,n-1,K,L] = \tag{5}$$

$$= \underset{\text{для } M=1 \text{ и } K>0}{D[0,0,K+1,L]} + \underset{\text{для } M=1 \text{ и } K>0}{D[0,0,K,L+1]} +$$

$$+ \underset{\text{для } M=1 \text{ и } K=0}{D[0,0,1,1]} + \underset{\text{для } M=2}{D[0,0,K,L]} + \underset{\text{для } M=2 \text{ и } K>0}{D[1,1,K+1,L]} +$$

$$+ \underset{\text{для } M=2 \text{ и } K>0}{D[1,1,K,L+1]} + \underset{\text{для } M=2 \text{ и } K=0}{D[1,1,1,1]} + \underset{\text{для } M>2}{D[M-2,1,K,L]} +$$

$$+ \underset{\text{для } M>2 \text{ и } K=0}{D[M-1,1,1,1]} + \underset{\text{для } M>2 \text{ и } K>0}{D[M-1,1,K+1,L]} +$$

$$+ \underset{\text{для } M>2 \text{ и } K>0}{D[M-1,1,K,L+1]}$$

Аналогичные соотношения для случаев, когда $L = n$, $n-1$, получаются из двух предыдущих выражений с помощью преобразования (2).

Нетрудно убедиться также с справедливости следующих соотношений:

$$D[M,n,K,n] = D[M-1,1,K-1,1]\,; \tag{6}$$

$$D[M,n-1,K,n-1] = \tag{7}$$

$$= D[M-1,1,K-1,1] \odot D[1,1,1,1] + D[M-1,1,K-1,1] =$$
для $M>1$ и $K>1$

$$= D[0,0,K-1,1] \odot D[1,1,1,1] + D[0,0,K-1,1] =$$
для $M=1$ и $K>1$

$$= D[M-1,1,0,0] \odot D[1,1,1,1] + D[M-1,1,0,0] =$$
для $M>1$ и $K=1$

$$= D[1,1,1,1] + D[0,0,0,0].$$
для $M=1$ и $K=1$

Поскольку характер группы $\chi[M,N,K,L]$ является шпуром представления D, то соотношения (1) – (7) справедливы также для характеров группы SU_n; для этого нужно лишь заменить $D[M,N,K,L] \to \chi[M,N,K,L]$. (Напоминим, что шпур прямого произведения равен произведению шпуров).

Заметив теперь, что характер низшего неприводимого представления группы SU_6

$$\chi[1,1,0,0] = \chi^*[0,0,1,1] = \sum_{k=1}^{6} e^{ia_k} \equiv \sum_{k=1}^{6} \delta_k = \chi,$$

где

$$\delta_k = e^{ia_k}, \quad a_6 = -\sum_{k=1}^{5} a_k,$$

из соображений размерности и полной антисимметричности представления D нетрудно выписать выражения для всех характеров группы SU_6 типа $\chi[1,N,0,0]$:

$$\chi[1,2,0,0] = \sum_{i\neq j}^{6} \delta_i \delta_j \quad \{15\},$$

$$\chi[1,3,0,0] = \sum_{i\neq j\neq k}^{6} \delta_i \delta_j \delta_k \quad \{20\}, \tag{15}$$

$$\chi[1,4,0,0] = \sum_{i\neq j\neq k\neq \ell}^{6} \delta_i \delta_j \delta_k \delta_\ell = \sum_{m\neq n} \delta_m^{-1} \delta_n^{-1} = \chi[0,0,1,2] \quad \{15\},$$

$$\chi[1,5,0,0] = \sum_{i\neq j\neq k\neq \ell\neq m} \delta_i \delta_j \delta_k \delta_\ell \delta_m = \sum_{i=1}^{6} \delta_i^{-1} = \chi^*[1,1,0,0].$$

Числа в фигурных скобках – размерности соответствующих мультиплетов[x/].

Используя выражения для $\chi[1,N,0,0]$, мы можем из формул (1) – (7) найти явный вид характера любого неприводимого представления группы SU_6. Например, из формулы (1) следует, что

$$\chi^2 = \chi[2,1,0,0] + \chi[1,2,0,0];$$

[x/] Соотношения (1) – (7) можно непосредственно использовать для вычисления размерностей неприводимых представлений если заменить $\chi[M,N,K,L]$ на $N[M,N,K,L]$.

откуда

$$\chi[2,1,0,0] = \chi^2 - \chi[1,2,0,0] = \sum_{k=1}^{6} \delta_k^2 + \sum_{i \neq l}^{6} \delta_i \delta_l \ .$$

Аналогично

$$\chi[2,1,0,0]\chi[0,0,1,1] = \chi[2,1,1,1] + \chi[1,1,0,0] \ ,$$

откуда определяется

$$\chi[2,1,1,1] = \chi[2,1,0,0] \cdot \chi[0,0,1,1] - \chi[1,1,0,0]$$

и т.д.[x/]

Изложенный способ вычисления значений $\chi[M,N,K,L]$ является более простым, чем метод Вейля[3].

Характеры неприводимых представлений группы SU_6, необходимые для вычисления унитарных статистических весов, имеют вид:

$$\chi[1,1,1,1] = \chi\chi^* - 1 \qquad \{35\},$$

$$\chi[2,2,0,0] = \chi[1,2,0,0] \cdot \chi - \chi[1,3,0,0] \qquad \{70\},$$

$$\chi[3,1,0,0] = \chi^3 - 2 \cdot \chi[2,2,0,0] - \chi[1,3,0,0] \qquad \{56\},$$

$$\chi[2,1,2,1] = \chi[2,1,0,0] \cdot \chi[0,0,2,1] - \chi[1,1,1,1] - 1 \qquad \{405\},$$

$$\chi[1,2,1,2] = \chi[1,2,0,0] \cdot \chi[0,0,1,2] - \chi[1,1,1,1] - 1 \qquad \{189\},$$

$$\chi[1,2,2,1] = \chi^*[2,1,1,2] = \chi[2,1,0,0] \cdot \chi[0,0,2,1] - \chi[1,1,1,1] \qquad \{280\},$$

$$\chi[3,1,3,1] = \chi[2,2,0,0] \cdot \chi[0,0,3,1] - \chi[2,1,2,1] - \chi[1,1,1,1] - 1 \qquad \{2695\}.$$

После того, как установлен явный вид характеров, можно вычислить величину унитарного веса. В работе[2] было показано, что для

[x/] В тех случаях, когда встречаются произведения полностью ко- и контравариантных характеров $\chi[M,N,0,0] \otimes \chi[0,0,K,L]$, расчёты значительно упрощаются, если эти произведения заменить соответствующей суммой характеров. Проще всего это сделать с помощью сверток в произведениях $D[M,N,0,0] \cdot D[0,0,K,L]$ с последующей заменой $D \to \chi$; подробнее об этом см., например, в монографии[5].

случая, когда в конечном состоянии реакции с квантовыми числами N, N, K, L содержится n мультиплетов, унитарный вес

$$U[M,N,K,L;\dots M_i,N_i,k_i,L_i;n]= \tag{8}$$
$$=\int \chi^*[M,N,K,L]\prod_{i=1}^{n}\chi[M_i,N_i,K_i,L_i]\,dV,$$

где объем группы SU_6 с помощью метода, описанного в монографии/4/, записывается в виде

$$dV=\frac{5(2)^{10}}{6!\,\pi^5}\prod_{k=1}^{5}da_k\prod_{l=k+1}^{6}\sin^2\{1/2(a_k-a_l)\}. \tag{9}$$

Пределы интегрирования определяются неравенствами

$$-\pi<a_i\le\pi \qquad (i=1,2,\dots,5).$$

В таблицах 1-3 приведены вычисленные унитарные веса для практически важных случаев взаимодействий мезона с барионом, бариона с антибарионом и двух мезонов,

$$\Pi+B\to B+n\Pi, \tag{10а}$$

$$B+\bar{B}\to\begin{cases} n\,\Pi & (10б)\\ B+\bar{B}+n\Pi, & (10в)\end{cases}$$

$$\Pi+\Pi\to n\,\Pi, \tag{10г}$$

с образованием антибарионной пары (56 - и $\overline{56}$ - плета) и 1,2,...5 мезонов (35 - плетов)x/.

Полный унитарный вес, соответствующий случаю, когда в начальном состоянии реакции имеются два SU_6-мультиплета с характерами $\chi[M',N',K',L']$ и $\chi[M'',N'',K'',L'']$, а в конечном состоянии n SU_6 - мультиплетов,

$$U[M',N',LK',L';M'',N'',L'';\dots M_i,N_i,K_i,L_i,\dots;n]=$$
$$=\sum_{M,N,K,L}U[M',N',K',L';M'',N'',K'',L'';M,N,K,L].$$

---

x/ Для множественности вторичных частиц $n<5$ практически оказывается более удобным непосредственно использовать рекуррентным образом соотношения (1) -(7). Интегральные выражения эффективны для больших значений n.

$$\cdot U[M,N,K,L;\ \dots\ M_i, N_i, K_i, L_i, \dots; n] =$$

$$= \int \chi^*[M',N',K',L']\,\chi^*[M'',N'',K'',L'']\prod_{i=1}^{n}\chi[M_i,N_i,K_i,L_i]\,dV, \qquad (11)$$

где суммирование выполняется по всем неприводимым SU_6-состояниям, на которые разлагается произведение исходных мультиплетов $[M',N',K',L']$ и $[M'',N'',K'',L'']$ (ср. формулу (3) в работе/2/).

Если известны значения спина, изоспина и гиперзаряда начальных частиц, то в выражение для вероятности канала реакции входит "зарядовый коэффициент":

$$U = \int C_{In}\prod_{i=1}^{n}\chi[M_i,N_i,K_i,L_i]\,dV, \qquad (12)$$

где

$$C_{In} = \sum_{M,N,K,L}(K[M',N',K',L';M'',N'',K'',L'';M,N,K,L)^2\,\chi^*[M,N,K,L],$$

$K[\dots]$ - табулированные коэффициенты Клебша-Гордона.

Литература

1. V.S. Barashenkov, G.M. Sinovjev. Fort. d. Phys., 16, 719 (1968).
2. В.С. Барашенков, Х.М. Бештоев. Сообщение ОИЯИ, Р2-5729, Дубна, 1971.
3. Г. Вейль. Классические группы, их инварианты и представления, ИЛ., М., 1947.
4. F.D. Murnaghan. The Unitary and Rotation Groups, Washington, 1962.
5. Нгуен Ван Хьеу. Лекции по теории унитарной симметрии. Атомиздат, М., 1967.

Рукопись поступила в издательский отдел

2 июля 1971 года.

Таблица I

Унитарные веса (8) при $n = 2,3$ и (II) при $n = 4,5$ для реакции (10а)

[M,N,K,L] \ n	2	3	4	5
[2,2,0,0]	I	4		
[3,I,0,0]	I	4		
[3,2,I,I]	I	6	I07	759
[4,I,I,I]	I	4		

Таблица 2

Унитарные веса (8) для реакции (I0б) и (I0г)

[m,n,k,l] \ n	2	3	4	5
[0,0,0,0]	I	2	9	44
[I,I,I,I]	2	9	44	265
[2,I,I,2]	I	6	42	320
[I,2,I,2]	I	6	42	320
[2,I,2,I]	I	6	42	320
[I,2,2,I]	I	6	42	320
[3,I,3,I]	0	I	I2	I30

Таблица 3

Унитарные веса для реакции (10в)

[M, N, k, l] \ n	2	3	4	5
[0,0,0,0]	1	1	4	18
[1,1,1,1]	1	3	18	107
[2,1,1,2]	-	1	16	129
[1,2,1,2]	-	-	11	99
[2,1,2,1]	1	4	24	170
[1,2,2,1]	-	1	16	129
[3,1,3,1]	1	4	18	137