СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 5906

В.А. Мещеряков

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ УРАВНЕНИЯ ЧУ-ЛОУ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1971

P2 - 5906

В.А. Мещеряков

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ УРАВНЕНИЯ ЧУ-ЛОУ

В в е д е н и е

Уравнения Чу-Лоу представляют из себя простейший пример нетривиальной модели, в которой одновременно учитываются такие фундаментальные требования дисперсионного подхода, как аналитичность, унитарность и перекрестная симметрия. Эта особенность определяет как привлекательность уравнений, так и трудность их решения. Недавно для анализа решений уравнений Чу-Лоу стали применяться методы функционального анализа [2]. С их помощью было доказано существование решения при дополнительном ограничении на величину константы связи [3].

Ниже мы применим к анализу уравнений Чу-Лоу ряд понятий, выработанных в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого приведем уравнения Чу-Лоу к разностным нелинейным уравнениям. При анализе этих уравнений с успехом могут быть использованы понятия стационарной точки и инвариантного многообразия. Последнее было впервые введено Пуанкаре [4] и дало многочисленные полезные следствия[5].

Постановка задачи и обзор известных результатов

Переход от уравнений Чу-Лоу к нелинейной краевой задаче на матричные элементы S -матрицы неоднократно описан в работах [6,7,8]. Поэтому приведем окончательную формулировку задачи:

1) $S_l(z)$ - аналитические функции комплексного переменного (определенные в плоскости с разрезами $(-\infty,-1]$, $[+1,+\infty)$);

2) $S_l^*(z)=S_l(z^*)$;

3) $|S_l(\omega+i0)|=1$, $\omega\geq 1$;

4) $S_l(-z) = A_{ll} S_l(z)$;

5) $S_l(z) = 1 + O((z^2-1)^{\frac{2\ell+1}{2}})$;

6) $[S_l(z) - \frac{\lambda_l}{z}]$ регулярна в точке $z = 0$.

Матрица перекрестной симметрии A_{ll} и числа λ_l , ℓ равны:

$$A_{ll} = \frac{1}{9} \begin{Vmatrix} 1, & -8, & 16 \\ -2, & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \lambda_l = \begin{Vmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{Vmatrix}, \quad A_{ll}\lambda_l = -\lambda_l, \ \ell = 1. \tag{2}$$

Условия (1), 1)-4) позволяют установить характер точек ветвления при $z = \pm 1, \infty$ /6/. Ниже мы рассмотрим функции $S_l(z)$ на бесконечнолистной римановой поверхности с корневыми точками ветвления при $z = \pm 1$ и логарифмической точкой ветвления на бесконечности. Такая риманова поверхность подобна однолистной и отображается на нее с помощью функции

$$w = \frac{1}{\pi} \arcsin z . \tag{3}$$

В переменной w условия (1), 1)-4) принимают вид

$$\begin{aligned} &1)\ S_l(w) \text{ - мероморфные функции в плоскости } w\ ; \\ &2)\ S_l^*(w) = S_l(w^*); \\ &3)\ S_l(w) S_l(1-w) = 1; \\ &4)\ S_l(-w) = A_{ll} S_l(w). \end{aligned} \tag{4}$$

Для дальнейшего нет необходимости переписывать локальные условия (1), 5)-6) в терминах переменной w .

Условия (4), 1)-4) не определяют функций $S_l(w)$ однозначно. Если $S_l(w)$ - какие-либо функции, подчиняющиеся требованиям (4), то $S_l[w + \beta(w)] \cdot D(w)$ - также подчиняются этим требованиям при

$$D(w) D(1-w) = 1, \quad D(-w) = D(w), \quad D^*(w) = D(w^*); \tag{5}$$

$$\beta(w) = \beta(w+1), \ -\beta(-w) = \beta(w), \ \beta^*(w) = \beta(w^*). \tag{6}$$

Произвол (5) непосредственно следует из условий (4) и отражает линейность требования перекрестной симметрии. Происхождение произвола (6) легко понять, если придать условию перекрестной симметрии вид системы нелинейных разностных уравнений

$$S_l(w+1) = 1/A_{ll} S_l(w). \tag{7}$$

Известно, что решение автономных систем дифференциальных уравнений обладает свойством оставаться решением при сдвиге аргумента на постоянную величину. Для системы автономных разностных уравнений постоянная переходит в периодическую функцию, которая дает произвол (6).

Выясним, каков общий вид функций, удовлетворяющих условию (4), 4). Выделяя симметричные и антисимметричные части функций $S_l(w)$, получим

$$S(w) = s_1(w) \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix} + s_2(w) \begin{Vmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix} + \psi \begin{Vmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{Vmatrix}, \tag{8}$$

где

$$s_1(w) = s_1(-w), \quad s_2(w) = s_2(-w), \; \psi(w) = -\psi(-w). \tag{9}$$

Наличие произвола (5) делает удобным переход к проективным координатам /9/

$$X(w) = \frac{S_1(w)}{S_2(w)}, \quad Y(w) = \frac{S_3(w)}{S_2(w)}. \tag{10}$$

Уравнения (7) в этих переменных принимают вид

$$X(w+1) = \frac{-2X(w)+4Y(w)+7}{X(w)+16Y(w)-8}, \; Y(w+1) = \frac{-2X(w)+4Y(w)+7}{4X(w)+Y(w)+4}, \tag{11}$$

где

$$X(w)X(1-w) = 1, \quad Y(w)Y(1-w) = 1. \tag{12}$$

Уравнения (11), (12) не независимы: любое из уравнений (11) может быть получено из уравнений (12) и оставшегося из (11). Система уравнений (11), (12) удобна для нахождения стационарных точек $X(w+1)=X(w)$, $Y(w+1)=Y(w)$. Ниже мы ограничимся изучением стационарной точки $X=Y=1$. Важность ее определяется условием (1), 5).

Введем следующие переменные:

$$s_1(w),\ y(w)=\frac{s_2(w)}{s_1(w)},\quad x(w)=\frac{\psi(w)}{s_1(w)}. \tag{13}$$

В них уравнения (11) запишутся так:

$$\begin{gathered}
\frac{1-2y+x}{6y+3x}+\frac{1-2y'-x'}{6y'-3x'}+1=0,\quad y=y(w),\ y'=y(w+1);\\
\frac{1-2y+x}{3y-3x}+\frac{1-2y'-x'}{3y'+3x'}+1=0,\quad x=x(w),\ x'=x(w+1).
\end{gathered} \tag{14}$$

Разрешим систему (14) относительно y', x'. Теперь можно выписать окончательную систему уравнений, эквивалентную условиям (4), 3), 4), решения которой ищутся в классе функций (4), 1), 2).

$$\begin{gathered}
x'=F(x,y),\ F(x,y)=\frac{x+2x^2-xy-2y^2}{1+3x+3y-2x^2-3xy-2y^2},\\
y'=-F(y,x),\quad x(w)=-x(-w),\ y(w)=y(-w),
\end{gathered} \tag{15}$$

$$s_1 s_1'(1-2y+x)(1-2y'-x')=1,\quad s_1(w)=s_1(-w), \tag{16}$$

$$S(w)=s_1(w)\left\{\left\|\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}\right\|+y(w)\left\|\begin{matrix}4\\-2\\1\end{matrix}\right\|+x(w)\left\|\begin{matrix}-4\\-1\\2\end{matrix}\right\|\right\}. \tag{17}$$

Уравнения (15) независимы от уравнений (16), что допускает возможность решения их последовательно. Такой подход реализован в работах [8-10]. В них найдено уже известное решение уравнений Чу-Лоу[6-11]. Если в этом решении максимально уменьшить число полюсов с помощью произволов (5), (6), то полученное таким образом решение будем называть скелетным решением. Скелетное решение удобно рассматривать на фазовой плоскости x, y подобно тому, как решение автономных систем дифференциальных уравнений изучается в фазовых пространствах. Оно изображается на фазовой плоскости в виде кривой, все точки которой инвариантны относительно замены $(x,y)\to(x',y')$. Уравнение кривой следует из соотношения

$$y'-x'^2=-(y-x^2)\frac{(1+y-2x)(1+4y+4x)}{(1+3x+3y-2x^2-3xy-2y^2)^2} \tag{18}$$

и имеет вид

$$y-x^2=0. \tag{19}$$

Кривая (19) является аналогом инвариантной кривой, введенной Пуанкаре [4] для дифференциальных уравнений. Парабола (19) касается оси y в точке $y=0$. Направление касательной к инвариантной кривой в этой точке легко понять, исходя из линейного приближения уравнений (15)

$$x'=x\ ,\quad y'=-y\ .$$

Линейное приближение так же, как и исходные уравнения, можно рассматривать как преобразования фазовой плоскости x, y. Тогда единственными инвариантными прямыми, проходящими через начало координат, будут координатные оси. Помимо кривой (19), решение [6,11] характеризуется функцией

$$s_1(1-y)^2=1, \tag{20}$$

которая определяется из уравнения (17). Для геометрического изображения функции (20) уже недостаточно фазовой плоскости x, y и необходимо перейти к фазовому пространству x, y, s_1 системы уравний (15), (16). В фазовом пространстве уравнения (19), (20) представляют две поверхности. Их пересечение даст линию, изображающую скелентное решение. Одномерное пространство, связанное с этой линией, является простейшим не тривиальным инвариантным многообразием уравнения Чу-Лоу.

Инвариантная поверхность уравнения Чу-Лоу

После вышесказанного естественно поставить вопрос о существовании инвариантных многообразий высших размерностей. Из трех функций x, y, s_1, имеющихся в нашем распоряжении, две можно считать независимыми, т.е. инвариантное многообразие может быть поверхностью в трехмерном пространстве /8/. Уравнение поверхности выберем в форме

$$s_1 = \Phi(y, x^2). \tag{21}$$

Квадратичная зависимость функции Φ от x заранее учитывает инвариантность поверхности относительно преобразования перекрестной симметрии, чего можно, вообще говоря, не предполагать. В таком случае она будет следствием уравнения на функцию $\Phi(y,x)$. Положение касательной плоскости поверхности (21) в точке (0,0,1) устанавливается рассуждениями, аналогичными приведенным выше для определения направления касательной уравнения (19). Поверхность (21) в точке (0,0,1) может касаться координатной плоскости y, s_1 либо любой плоскости из пучка плоскостей, ортогональных координатной плоскости y, s_1, и содержащей точку (0,0,1). Уравнение, которому подчиняется функция Φ, имеет вид

$$\Phi(y, x^2)\Phi(y', x'^2)(1-2y+x)(1-2y'-x') = 1, \tag{22}$$

где y', x' заданы формулами (15).

Другая форма уравнения (22) такова:

$$\Phi(y,x^2)\Phi(y',x'^2) = \frac{1}{9}\left[\frac{1}{1+4y+4x} + \frac{4}{1-2y+x} + \frac{4}{1+y-2x}\right]. \tag{23}$$

Легко проверить, что на инвариантиой кривой (19) функция

$$\Phi(y,x^2) = \frac{1}{(1-y)^2} \tag{24}$$

является решением уравнения (22). Будем искать решение уравнения (22) в виде двойного ряда по x, y.

$$\Phi(y,x^2) = \sum_{m,n\geq 0} a_{2m,n} x^{2m} y^n .$$

При этом обнаруживается, что уравнения на неизвестные коэффициенты $a_{2m,n}$, возникающие от сравнения выражений перед членами $x^{2m}y^n$ с четными значениями суммы $2m+n$, определяют эти коэффициенты. Уравнения на коэффициенты $a_{2m,n}$, получающиеся аналогичной процедурой при нечетных значениях суммы $2m+n$, являются тождествами. Точнее, они суть линейные комбинации уравнений на коэффициенты $a_{2m,n}$ с меньшими значениями суммы $2m+n$. Ситуация идейно полностью аналогична той, которая встречалась в работе /6/ при использовании рядов по одной переменной. Технически она, конечно, сложнее. Поэтому в дальнейшем воспользуемся другим приемом. Здесь же приведем найденный нами результат:

$$\Phi^{-1}(y,x^2) = 1-2x^2-2y^2+\frac{4}{3}y^3+8yx^2+y^4-4y^2x^2-5x^4+\dots \tag{25}$$

Заменим уравнение (22) системой уравнений, каждое из которых учитывает ограничения на функцию Φ, накладываемые требованиями унитарности и перекрестной симметрии в отдельности. Для этого заметим, что согласно формулам (17), (21)

$$S_2(y,x) = \Phi(y,x^2)(1-2y-x),$$

т.е. имеют место следующие уравнения:

$$\bar{x} = F(-x,y), \quad \bar{y} = -F(y,-x), \quad S_2(y,x)S_2(\bar{y},\bar{x}) = 1, \tag{26}$$

$$\frac{S_2(y,x)}{1-2y-x} = \frac{S_2(y,-x)}{1-2y+x}. \tag{27}$$

Уравнение (26) может быть легко решено. Сначала упростим равенства (14) путем введения новых функций g_x и g_y :

$$g_x = \frac{2y-x}{1+y-\frac{5}{2}x}, \quad g_y = \frac{y+x}{1-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}x}, \tag{28}$$

$$g_x(y,x)+g_x(\bar{y},\bar{x})=0, \quad g_y(y,x)+g_y(\bar{y},\bar{x})=0. \tag{29}$$

Теперь легко проверить, что решение уравнения (26) имеет вид:

$$S_2(y,x)=\frac{1-a(g_x,g_y)}{1+a(g_x,g_y)}, \tag{30}$$

где

$$a(g_x,g_y)=-a(-g_x,-g_y).$$

Искомая функция $a(g_x,g_y)$ подчиняется уравнению

$$(a-\tilde{a})(1-2y)=x(1-a\tilde{a}), \tag{31}$$

где

$$a=a[g_x(y,x),g_y(y,x)], \quad \tilde{a}=a[g_x(y,-x),g_y(y,-x)].$$

Уравнение (31) будем решать с помощью разложения неизвестной функции в двойной ряд по g_x , g_y . Однако для дальнейшего удобно воспользоваться линейными комбинациями g_x , g_y . Условия, из которых находятся коэффициенты линейных комбинаций, определяются формулами:

$$G_x=\frac{1}{3}(-g_x+2g_y)=x+O(y,x); \quad G_y=\frac{1}{3}(g_x+g_y)=y+O(y,x). \tag{32}$$

Ясно, что функции G_x , G_y подчиняются уравнениям (29). Поэтому разложение функции a в двойной ряд имеет вид:

$$a=\sum_{\substack{m+n=2p+1\\ m,n,p\geq 0}} a_{m,n}G_x^m G_y^n . \tag{33}$$

Подставляя выражения для a, $\tilde{a}$ в уравнение (31) и приравнивая коэффициенты при $x^m y^m$ с одинаковыми значениями m, n, получим бесконечную систему уравнений на коэффициенты $a_{m,n}$. Заметим, что при четных значениях m эти уравнения будут тождествами. Действительно, легко увидеть, что обе части уравнения (31) являются нечетными функциями x. Сравнение линейных и квадратичных по x, y членов приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} &2a_{10} = 1, \\ &-2a_{10} + a_{01} = 0. \end{aligned} \tag{34}$$

Простой подсчет показывает, что при $m+n=2p+1$ неизвестные коэффициенты $a_{m,n}$ определятся из $2(p+1)$ уравнений. Эти уравнения линейны. Правые части зависят от коэффициентов $a_{m,n}$ с меньшим значением $m+n$. Запишем уравнения в матричном виде:

$$A_p a_p = F_p \; . \tag{35}$$

Здесь a_p – столбец с элементами $a_{2p+1-q,q}$, $0 \le q \le 2p+1$, а A_p – квадратная матрица (рис. 1). Определитель матрицы A_p отличен от нуля

$$Det\, A_p = 2^{2(p+1)} \prod_{\ell=0}^{p} (p+2+3\ell).$$

Это дает возможность построить пока формальный ряд (33). Для доказательства сходимости ряда воспользуемся частным решением (20) уравнения (22). Из него следует, что внутри сегмента $|x| < \dfrac{2}{1+\sqrt{5}}$ ряд по степеням x для функции $a[g_x(x^2,x), g_y(x^2,x)]$ сходится. Иными словами, двойной ряд сходится в точках сегмента $[\alpha, \beta]$ параболы $y = x^2$ (рис. 2). Отсюда уже легко установить сходимость ряда (33) в прямоугольнике

$$|x| < \frac{\sqrt{41}-5}{4}, \qquad |y| < \left|\frac{\sqrt{41}-5}{4}\right|^2.$$

Таким образом, доказано, что уравнения Чу–Лоу с трехрядной матрицей перекрестной симметрии (2) обладают двумерным локально-инвариантным многообразием – инвариантной поверхностью (21).

Обсуждение

Установленный выше факт существования инвариантной поверхности у решений уравнений Чу-Лоу, по-видимому, исчерпывает инвариантные многообразия с предельной точкой $X = Y = 1$.

Действительно, две независимые координаты инвариантной поверхности и произвол (5) приводят к тому, что общее решение будет зависеть от трех произвольных функций. Тем самым достигнутый произвол совпадает с произволом, предусмотренным условием перекрестной симметрии (8).

Ранее отмечалось /6/, что постановка задачи допускает простое обобщение на матрицы перекрестной симметрии произвольного порядка /6,8/. Изложенный выше подход также может применяться в этих обобщениях. Идейно он состоит в том, что инвариантные многообразия высших размерностей строятся исходя из свойств известных многообразий низших размерностей.

Автор благодарен В.И. Журавлеву за полезные обсуждения.

Литература

1. F. Low. Phys. Rev., 97, 1392 (1955).
2. R.L. Warnoock. Phys. Rev., 170, 1323 (1968); 174, 2169 (1969).
3. H. Mc Daniel, R.L. Warnoock. Nuovo Cim., 64, 905 (1969).
4. А. Пуанкаре. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. ГИТТЛ, М-Л., стр. 238, 1947.
5. Дж.Д. Биркгоф. Динамические системы, ОГИЗ, М-Л., 1941.
6. В.А. Мещеряков. Препринт ОИЯИ, Р-2369, Дубна, 1965.
7. Д.В. Ширков, В.В. Серебряков, В.А. Мещеряков. Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких энергиях. М., "Наука", 1967.
8. В.А. Мещеряков, К.В. Рерих. ТМФ, 3, 78 (1970).
9. В.И. Журавлев, В.А. Мещеряков, К.В. Рерих. ЯФ, 10, 168 (1968).

10. В.А. Мещеряков, К.В. Рерих. Препринты ОИЯИ, Р2-4377, Р2-4356, Дубна, 1968.
11. J. Rothleitner. Zeit. für Phys., 177, 287 (1964).

Рукопись поступила в издательский отдел
30 июня 1971 года.

$x^m y^n$ m,n \ $\alpha_{m,n}$ m,n	$2P+1,\ 0$	$2P+1-1,\ 1$	— —	$2P+1-2\ell,\ 2\ell$	$2P+1-(2\ell+1),\ 2\ell+1$
$2P+1,\ 1$	$-8(P+1)$	$2(P+2)$	— —	— —	— —
$2P+1-2,\ 3$	0	$4P$	— —	— —	— —
⋮	— —	— —	— —	— —	— —
$2P+1-2(\ell-1),\ 2\ell-1$	— —	— —	— —	-4ℓ	0
$2P+1-2\ell,\ 2\ell+1$	— —	— —	— —	$-8(P+1)+6\ell$	$2(P+3\ell+2)$
$2P+1-2(\ell+1),\ 2\ell+3$	— —	— —	— —	0	$4(P-\ell)$
⋮	— —	— —	— —	— —	— —
$1,\ 2P+1$	— —	— —	— —	— —	— —
$2P+1,\ 0$	2	— —	— —	— —	— —
$2P+1-2,\ 2$	— —	— —	— —	— —	— —
⋮	— —	— —	— —	— —	— —
$2P+1-2\ell,\ 2\ell$	— —	— —	— —	2	— —
⋮	— —	— —	— —	— —	— —

Рис. 1

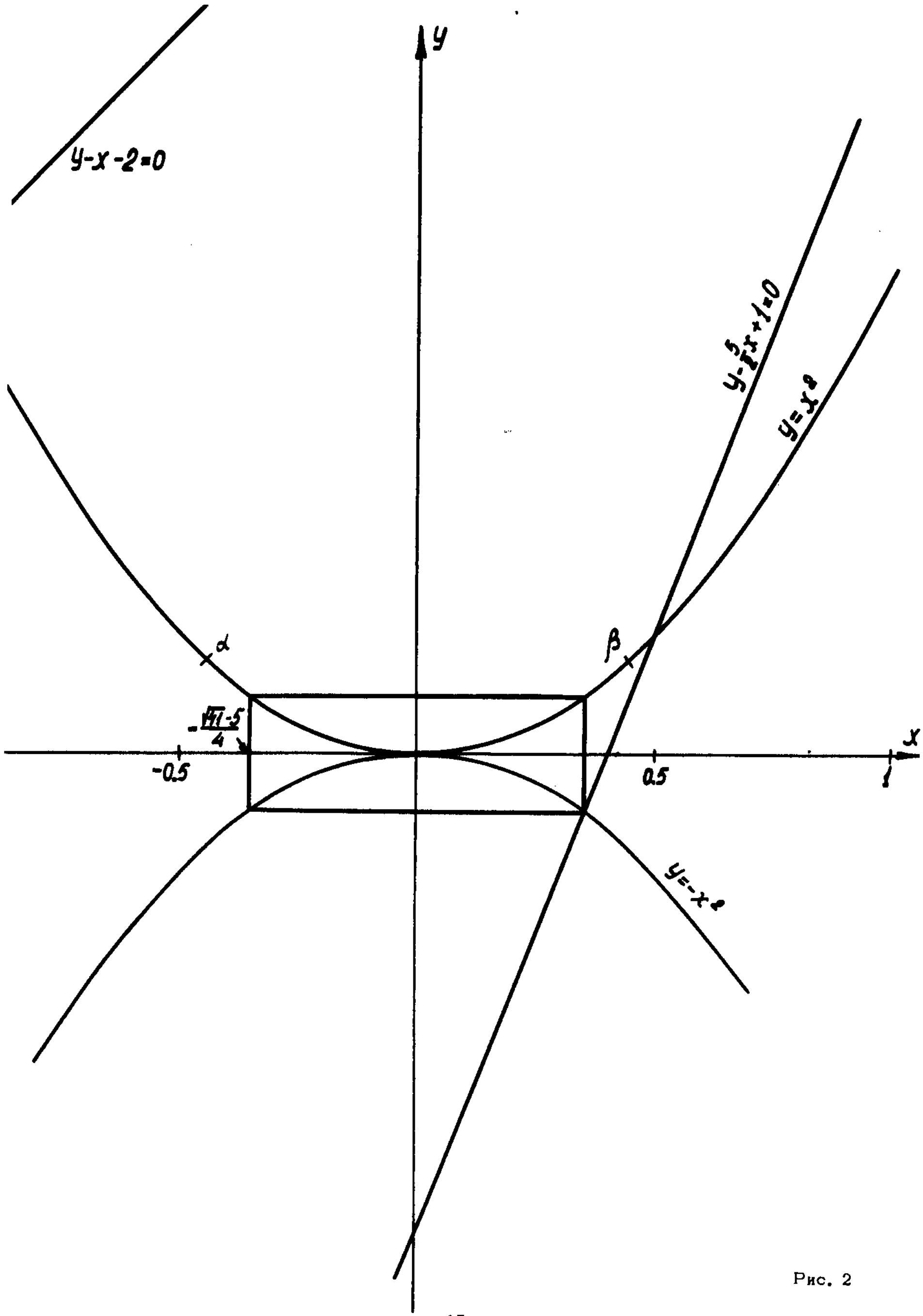

Рис. 2