СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

P2 - 5823

В.Н. Стрельцов

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГАЛИЛЕЯ

1971

P2 - 5823

В.Н. Стрельцов

ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГАЛИЛЕЯ*

* В порядке обсуждения.

S U M M A R Y

Basing on the requirement of the invariance of the Schrödinger's relativistic equation relatively the Galilean transformations, the procedure of the proof of the nonrelativistic wave equation invariance relatively approximate transformations of the type of Galilean ones is introduced.

It is shown that the Schrödinger's equation is invariant relatively the Galilean transformations.

It is also shown that on the basis of the transformation formulae for the energy and the momentum of plane wave and on condition that there exists a limiting transition from quantum mechanics to classics the statement of the problem on the Schrödinger equation invariance relatively space-like transformations is correct. In this case it should be noted that the considered equation corresponds to the so-called properly nonrelativistic approximation; in the Galilean approximation it has a trivial form. As for the nonrelativistic invariance requirement, not the Schrödinger equation, but another nonlinear equation different from the Schrödinger's by the form of the time term satisfies it.

Some difficulties of quantum mechanics should be taken into account. The elimination of these difficulties may be apparently connected only with the rejection from the Ehrenfest's theorem.

In particular, it is shown that the transformed wave function of the plane wave does not assume additional phase in the nonrelativistic approximation.

Прежде чем перейти к непосредственному рассмотрению вопроса, сформулированного в заглавии, мы затронем вспомогательную проблему, которой будут посвящены следующие ниже рассуждения.

§1. Об инвариантности релятивистского уравнения Шредингера относительно преобразований Галилея

Коль скоро преобразования Галилея

$$x' = x - \beta c t, \quad t' = t \tag{1}$$

вытекают из преобразований Лоренца при условии, что величинами порядка β^2 (и меньше) можно пренебречь по сравнению с 1, то мы вправе утверждать следующее.

Релятивистское уравнение Шредингера

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{m^2c^2}{h^2}\psi, \tag{2}$$

удовлетворяющее требованию инвариантности относительно преобразований Лоренца, (при достаточно малых скоростях) должно быть инвариантно и относительно вытекающих из формул Лоренца преобразований Галилея.

Перейдем на основании формул (1) к другой (штрихованной) системе отсчёта. При этом уравнение (2) перейдет в следующее выражение

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi'}{\partial t'^2} - \frac{\beta}{c}\frac{\partial^2\psi'}{\partial t'\partial x'} + \beta^2\frac{\partial^2\psi'}{\partial x'^2} = \frac{\partial^2\psi'}{\partial x'^2} - \frac{m^2c^2}{h^2}\psi', \tag{2'}$$

которое отличается от уравнения (2) наличием двух последних членов в левой части.

Что касается самого последнего из упомянутых членов, то его сразу можно отбросить, т.к. он мал (порядка β^2) по отношению к первому члену правой части. Что касается оставшегося члена, то на основании сформулированного выше утверждения, он тоже должен быть малым по отношению к максимальным членам уравнения, т.е. должно выполняться условие

$$\frac{\partial^2\psi'}{\partial x'\partial t'} \approx \beta c \frac{\partial^2\psi'}{\partial x'^2} \tag{3}$$

или условие

$$\frac{\partial^2\psi'}{\partial x' dt'} \approx \frac{\beta}{c} \frac{\partial^2\psi'}{\partial t'^2} .$$

То, что одно из этих условий действительно имеет место, может быть доказано независимо.

Чтобы сделать это, выпишем формулы преобразования производных $\partial^2\psi / \partial x^2$ и $\partial^2\psi / \partial x \partial t$, опираясь на формулы преобразований Лоренца

$$x' = (x - \beta c t)\gamma, \quad t' = (t - \frac{\beta}{c} x)\gamma \tag{4}$$

и Галилея.

В результате будем иметь

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial t} = [\frac{\partial^2\psi'}{\partial x'\partial t'}(1+\beta^2) - \beta c \frac{\partial^2\psi'}{\partial x'^2} - \frac{\beta}{c}\frac{\partial^2\psi'}{\partial t'^2}]\gamma^2 , \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2\psi'}{\partial x'\partial t'} - \beta c \frac{\partial^2\psi'}{\partial x'^2} \tag{5'}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = (\frac{\partial^2\psi'}{\partial x'^2} - 2\frac{\beta}{c}\frac{\partial^2\psi'}{\partial x'\partial t'} + \frac{\beta^2}{c^2}\frac{\partial^2\psi'}{\partial t'^2})\gamma^2 , \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi'}{\partial x'^2} . \tag{6'}$$

Далее рассуждаем следующим образом.

Коль скоро переход от релятивистского случая к галилееву приближению связан с отбрасыванием членов порядка β^2 (и меньше) по сравнению с 1, то мы вправе связывать исчезновение третьего члена в формуле (5) при переходе к (5') с выполнением или условия (опускаем штрихи)

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \approx \beta c \frac{\partial^2\psi}{\partial x\, \partial t}, \tag{7}$$

или условия

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \approx \beta^2 c^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \tag{8}$$

или их обоих одновременно.

Привлечение формул (6) и (6') приводит нас к последней возможности. В результате имеем:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \approx \beta c \frac{\partial^2\psi}{\partial x\; \partial t} \approx \beta^2 c^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}. \tag{9}$$

Последнее выражение, очевидно, включает как раз требуемое условие (3). Кроме того, оно содержит условие

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \approx \beta^2 c^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \tag{10}$$

которое понадобится нам в дальнейшем.

Суммируя сказанное выше, следует подчеркнуть, что и в процессе изучения вопросов инвариантности нерелятивистских уравнений относительно приближенных преобразований координат (типа преобразований Галилея) при переходе к другой системе отсчета могут появиться дополнительные члены. Если при этом указанные члены на основании условий типа (3) и (10) оказываются малыми (порядка β^4) по отношению к максимальному, то их надо отбросить, а рассматриваемое уравнение следует считать инвариантным относительно данных преобразований.

§2. Об инвариантности уравнения Шредингера относительно преобразований Галилея

Возьмем уравнение Шредингера в форме

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{ih}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{imc^2}{h} \psi , \qquad (11)$$

которое получается из обычного уравнения Шредингера с помощью известной замены

$$\psi_{\text{ш.}} = \psi \exp\left(\frac{imc^2}{h} t \right)$$

и упростит нам последующее рассмотрение.

Кроме того, мы выпишем формулы преобразований для $\partial \psi / \partial t$ и $\partial \psi / \partial x$ в релятивистском случае и в галилеевом приближении. При этом будем иметь:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \psi'}{\partial t'} - \beta c \frac{\partial \psi'}{\partial x'} \right) \gamma , \qquad (12)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi'}{\partial t'} - \beta c \frac{\partial \psi'}{\partial x'} \qquad (12\ )$$

и

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \left(\frac{\partial \psi'}{\partial x'} - \frac{\beta}{c} \frac{\partial \psi'}{\partial t'} \right) \gamma , \qquad (13)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi'}{\partial x'} . \qquad (13\ )$$

Отсюда на основании рассуждений, аналогичных вышеизложенным, мы можем заключить о справедливости следующего условия:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t'} \approx \beta c \frac{\partial \psi'}{\partial x'} . \qquad (14)$$

Теперь мы имеем все необходимое, чтобы перейти к непосредственному рассмотрению вопроса об инвариантности уравнения Шредингера относительно преобразований Галилея.

Совершив переход в другую (штрихованную) систему отсчета на основании (6) и (12), для уравнения (11) будем иметь

$$\frac{\partial\psi'}{\partial t'} - \beta c \frac{\partial\psi'}{\partial x'} = \frac{ih}{2m} \frac{\partial^2\psi'}{\partial x'^2} - \frac{imc^2}{h} \psi' .$$

Полученное таким образом уравнение отличается от уравнения Шредингера наличием второго члена в левой части, причем имеющееся в нашем распоряжении условие (14) не позволяет его отбросить. Более того, оно говорит, что указанный член по порядку величины равен максимальному члену - первому члену в левой части, но коль скоро мы не можем отбросить этот дополнительный член, мы вынуждены сказать, что уравнение Шредингера не инвариантно относительно преобразований Галилея.

2. Следует отметить, что при обычной трактовке данного вопроса (см., например, /1/) принимается, что преобразованная волновая функция преобретает дополнительную фазу

$$\psi' = \psi \exp\left[i(m\beta cx - \frac{1}{2} m\beta^2 c^2 t + C)\right].$$

Однако такой шаг вряд ли можно считать последовательным. Дело в том, что галилеева инвариантность является частным случаем лоренц-инвариантности (при малых скоростях). А как мы знаем, в релятивистском случае преобразованная (скалярная) волновая функция никакой дополнительной фазы не приобретает . Поэтому никакой дополнительной фазы у нее не должно возникать и в галилеевом приближении *).

Больше того, если последовательно придерживаться указанной точки зрения, то при доказательстве инвариантности нерелятивистского уравнения Гамильтона- Якоби относительно преобразований Галилея в классике мы вынуждены будем допустить, что при переходе к другой системе

---

*) Но если это верно, то мы должны отказаться от правила Баргмана /2/, которое гласит, что не существует нерелятивистских квантовомеханических состояний, которые описываются линейными суперпозициями ψ -функций, отвечающих частицам разных масс.

отсчёта функция действия $S'(x',t')$ будет преобразовываться по формуле

$$S' = S - m v x - \frac{m v^2}{2} t .$$

Но коль скоро это противоречит релятивистской формуле преобразования $S' = S$, то мы должны поставить под сомнение и правильность подобных рассуждений в случае квантовой механики[x].

3. Кроме того, мы особенно хотим обратить внимание на следующий факт.

Использование преобразований Галилея для координат приводит к тому, что первые производные от волновой функции преобразуются по формулам (12') и (13'). Для плоской волны это приводит к следующим формулам преобразований для импульса и энергии:

$$p_x = p'_x , \quad E = E' + \beta c \, p'_x , \tag{15}$$

которые, очевидно, отличаются от требуемых формул преобразований

$$p_x = p'_x + \frac{\beta}{c} E' , \quad E = E' . \tag{16}$$

Вместе с тем, если учесть, что, например, в релятивистском уравнении Шредингера член $\partial^2\psi/\partial t^2$ соответствует квадрату полной энергии, а член $\partial^2\psi/\partial x^2$ – квадрату импульса, то как тогда понимать условие (10), из которого следует, что в галилеевом приближении второй член много больше первого?

Оказывается, что указанные трудности снимутся, если вместо преобразований Галилея мы будем оперировать с так называемыми пространственно-подобными преобразованиями/3/.

§3. Об инвариантности уравнения Шредингера относительно пространственно-подобных преобразований

1. Итак, рассмотрим пространственно-подобные преобразования в галилеевом приближении/4/

---

x/ В этой связи см. также Дополнение.

$$x' = x, \quad t' = t - \frac{\beta}{c} x. \tag{17}$$

В этом случае для формул преобразований первых производных от волновой функции будем иметь следующие выражения:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi'}{\partial x'} - \frac{\beta}{c} \frac{\partial \psi'}{\partial t'}, \tag{18}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi'}{\partial t'}, \tag{19}$$

которые, как легко видеть, действительно обеспечивают нужные формулы преобразований (16) для импульса и энергии плоской волны.

При этом для вторых производных вместо условий (9) также получим требуемые условия вида:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \approx \frac{\beta}{c} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \, \partial t} \approx \frac{\beta^2}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \tag{20}$$

Но прежде чем сделать дальнейшие шаги, мы хотим напомнить следующее.

Галилеево приближение соответствует тому случаю, когда членами порядка β^2 можно пренебречь по сравнению с 1. Поэтому в данном приближении в уравнении Шредингера (11) первый член в правой части, имеющий величину порядка β^2, например, по отношению ко второму члену правой части, следует отбросить как малый. В результате будем иметь

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{imc^2}{h} \psi = 0. \tag{21}$$

Последнее выражение будет представлять собою уравнение Шредингера в галилеевом приближении и, как легко видеть на основании (21), будет инвариантно относительно преобразований (17).

Следует, однако, заметить, что ведь нас, в конце концов, интересует проблема инвариантности уравнения Шредингера (11), а не уравнения (21).

Как же подойти к данной проблеме?

Чтобы сделать это, мы должны иметь в виду следующее.

Как известно, уравнение Шредингера отражает собою структуру нерелятивистской формулы для энергии. А последняя формула соответствует тому приближению, когда членами порядка β^4 следует пренебречь, сохранив (в отличие от галилеева приближения) члены порядка β^2. Иными словами, корректное решение затронутой проблемы заключается в поиске ответа на вопрос об инвариантности уравнения Шредингера относительно нерелятивистских пространственно-подобных преобразований /3/:

$$x' = x\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right)-\beta c t, \quad t' = \left(t-\frac{\beta}{c}x\right)\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right). \tag{22}$$

Указанные преобразования так же, как и преобразования (17), обеспечивают нужные формулы преобразований для импульса и энергии плоской волны, а также выполнение условий (20).

2. Итак, перейдем к рассмотрению вопроса об инвариантности уравнения Шредингера относительно преобразований (22). В этом случае после перехода в другую систему отсчёта для уравнения (11) получим следующее выражение:

$$\frac{\partial\psi'}{\partial t'}\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right)-\beta c\,\frac{\partial\psi'}{\partial x'}=\frac{ih}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi'}{\partial x'^2}-2\frac{\beta}{c}\frac{\partial^2\psi'}{\partial x'\partial t'}+\frac{\beta^2}{c^2}\frac{\partial^2\psi'}{\partial t'}\right)\times$$
$$\times\left(1+\beta^2\right)-\frac{imc^2}{h}\psi',$$

которое после отбрасывания заведомо малых членов может быть переписано, например, в виде:

$$\frac{\partial\psi'}{\partial t'}=\frac{ih}{2m}\frac{\partial^2\psi'}{\partial x'^2}-\frac{imc^2}{h}\psi'+\frac{h^2\beta}{2m^2c}\left(\frac{\partial^3\psi'}{\partial x'^3}-\frac{1}{2}\frac{\beta}{c}\frac{\partial^3\psi'}{\partial x'\partial t'}\right) \tag{23}$$

Последнее выражение, как легко видеть, отличается от уравнения Шредингера наличием последнего слагаемого в правой части. Но коль скоро мы не имеем в своем распоряжении условий, которые бы позволили отбросить его как малое, нам остается заключить, что уравнение Шредингера не инвариантно относительно нерелятивистских преобразований.

В свое время автором было предложено нерелятивистское волновое уравнение[5]:

$$-\left(\psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)^{1/2} = \frac{ih}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{imc^2}{h}\psi , \tag{24}$$

удовлетворяющее требованию нерелятивистской инвариантности.

Уравнение (24), очевидно, отличается от уравнения Шредингера (11) формой временного члена. В стационарном случае они совпадают друг с другом.

Мы не будем сейчас обсуждать вопросы, связанные с трудностями решения этого нелинейного уравнения в нестационарных случаях[x], а подчеркнем следующее.

Если опираться на требование "кинематической" инвариантности (будь то релятивистская инвариантность или, как здесь, ее частный случай – нерелятивистская инвариантность), то мы должны предпочесть уравнение (24) уравнению Шредингера.

Прежде чем перейти далее к обсуждению некоторых следствий, вытекающих из последнего положения, мы хотим напомнить, что применение преобразований (22) в случае механики показало, что нерелятивистское уравнение Гамильтона-Якоби как в свободном случае, так и при наличии электромагнитного поля удовлетворяет требованию нерелятивистской инвариантности[3,6].

§4. Некоторые следствия, вытекающие из предыдущего рассмотрения

Итак, выберем в качестве нерелятивистского уравнения выражение в форме (24).

---

[x] По нашему мнению, для ряда уравнений физики может оказаться нецелесообразным (а может быть и невозможным) переход к нерелятивистскому пределу. В этом случае ответ на вопрос о поведении данного физического объекта при малых скоростях можно будет получить только после решения релятивистского уравнения с последующим переходом к нерелятивистскому пределу для полученного решения.

Коль скоро данное уравнение нелинейно, то сразу же можно сказать, что в этом случае становится невозможным вывод некоторых равенств для средних величин, известных под названием теорем Эренфеста.

Казалось бы, последний результат является серьезным аргументом против введения указанного уравнения.

Однако прежде чем делать какие-то выводы из этого факта, мы хотим обратить внимание на следующее.

В любой последовательной теории нерелятивистское приближение должно с необходимостью вытекать из релятивистского рассмотрения. Поэтому, в частности, и в квантовой механике, если она претендует на роль последовательной теории, обычные теоремы Эренфеста должны, в конце концов, вытекать из " релятивистских" теорем Эренфеста.

Но коль скоро в релятивистском случае аналогичных теорем мы не имеем, то существование (нерелятивистских) теорем Эренфеста является поэтому своего рода непоследовательностью, которая, по-видимому, может быть устранена только в результате отказа от упомянутых теорем.

Последующие рассуждения подкрепляют последний шаг.

Так, ранее было указано/7/, что на основании теорем Эренфеста средние значения (пространственных) координат должны удовлетворять преобразованиям Галилея. Однако, как следует, в частности, из предыдущего рассмотрения, уравнение Шредингера соответствует, вообще говоря, не галилеевому, а собственно нерелятивистскому приближению. Поэтому средние значения координат должны были бы скорее удовлетворять нерелятивистским формулам преобразований типа

$$\bar{x}' = (\bar{x} - \beta c t)(1 + \frac{1}{2}\beta^2), \quad t' = t(1 + \frac{1}{2}\beta^2) - \frac{\beta}{c}\bar{x},$$

включающим в себя отмеченные формулы преобразования Галилея.

Однако я не вижу, как можно (следуя рассмотренным ранее соображениям/7,8/) доказать справедливость этих формул, предполагая, что квантовые координаты также подчиняются нерелятивистским формулам преобразования, даже при условии, что вычисление $\bar{x}$ мы будем проводить при фиксированном времени.

Кроме того, нужно обратить внимание и на следующий факт.

Как известно, существует основанный на теоремах Эренфеста предельный переход от квантовой механики к классике. Его существование связано с тем, что согласно теоремам Эренфеста квантово-механические средние удовлетворяют классическим уравнениям движения. Поэтому, естественно, мы можем трактовать указанные величины как соответствующие классические. Однако, как показало детальное рассмотрение/9/, на этом пути встречаются серьезные трудности, связанные с трактовкой выражения для полной энергии и ставящие под сомнение правомерность данного предельного перехода. Таким образом, и в этом случае отказ от теорем Эренфеста приводит к устранению возникающих трудностей.

Дополнение

Обычная процедура преобразования (см., например,/10/) волновой функции плоской волны

$$\psi = C\, exp\,(i\, s\,) = C\, exp\,[\,\frac{i}{h}\,(p\,x - E\,t\,)\,]$$

при переходе к другой системе отсчёта в нерелятивистском случае приводит к появлению дополнительной фазы s_1

$$\Psi = \Psi'\, exp\,[\,\frac{i}{h}\, m\, V\,(x' + \frac{V\,t}{2}\,)\,] = \Psi'\, exp\,(i\, s_1\,).$$

Этот результат является следствием прямой подстановки формул преобразования для координат, импульса и энергии вида:

$$p = p' + m\,V\,, \quad E = E' + V p' + \frac{m\,V^2}{2}\,,$$

$$x = x' + V\,t'\,, \quad t = t'\,.$$

Однако с таким результатом вряд ли можно согласиться.

Дело в том, что применение точных релятивистских формул преобразований свидетельствует о том, что величина s инвариант. Но точные релятивистские формулы описывают, в частности, и случай малых скоростей. Поэтому правильное использование вытекающих из релятивистских приближенных формул преобразований не должно приводить к возникновению дополнительной фазы s_1 и в нерелятивистском случае.

Чтобы проиллюстрировать это, возьмем (с учётом результатов §3) в собственно нерелятивистском приближении формулы преобразований в следующем виде:

$$p = (p' + \frac{V}{c^2} E')(1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}), \quad E = E'(1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}) + Vp', \qquad (N_1)$$

$$x = x'(1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}) + Vt, \quad t = (t' + \frac{V}{c^2}x')(1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}). \qquad (N_2)$$

Прямая подстановка их в выражение для s дает:

$$px - Et = (p'x' - E't')(1 - \underline{\frac{1}{4}\frac{V^4}{c^4}}).$$

Коль скоро переход к рассматриваемому приближению связан с отбрасыванием членов порядка V^4/c^4, то подчеркнутый член следует отбросить. В результате придем к требуемому равенству $s = s'$.

В галилевом приближении вместо формул (N_1) и (N_2) будем иметь

$$p = p' + \frac{V}{c^2} E', \qquad E = E', \qquad (G_1)$$

$$x = x', \qquad t = t' + \frac{V}{c^2} x'. \qquad (G_2)$$

Подставляя их в выражение для s, получим

$$px - Et = p'x' - E't'.$$

Результат не изменится, если вместо формул (N_2) и (G_2) мы будем использовать обычные нерелятивистские и галилеевы формулы для координат.

Что касается обычного вывода, то он, в частности, обусловлен тем, что формула преобразования для энергии берется в ином приближении, чем другие формулы преобразований.

Литература

1. Д. Кемпфер. Основные положения квантовой механики. Изд. "Мир", М. (1967), стр. 384.
2. V. Bargmann, Ann. Math., 59, 1 (1954).
3. В.Н. Стрельцов. Сообщение ОИЯИ, Р2-5131, Дубна, 1970.
4. J.-M. Levy-Leblond. Ann. Inst. Henri Poincare 3, 1 (1965), N.D. Sen Gupta. Nuovo Cim., 44, 512 (1966).

   В.Н. Стрельцов. Препринт ОИЯИ, Р2-3482, Дубна, 1967.
5. В.Н. Стрельцов. Сообщение ОИЯИ, Р2-4462, Дубна, 1969.
6. В.Н. Стрельцов. Сообщение ОИЯИ, Р2-4461, Дубна, 1969, Р2-5373, Дубна, 1970.
7. В.Н. Стрельцов. Сообщение ОИЯИ, Р2-4945, Дубна, 1970.
8. В.Н. Стрельцов. Сообщение ОИЯИ, Р2-5523, Дубна, 1970.
9. В.Н. Стрельцов. Сообщение ОИЯИ, Р2-4944, Дубна, 1970.
10. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Квантовая механика, ГИФМЛ, М., (1963) §15, стр. 66.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 мая 1971 года.