СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 5809

В.Л. Любошиц, М.И. Подгорецкий

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

СИММЕТРИЗАЦИЯ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ И ПРИНЦИП ИНТЕРФЕРЕНЦИИ КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКИХ АМПЛИТУД

1971

P2 - 5809

В.Л. Любошиц, М.И.Подгорецкий

СИММЕТРИЗАЦИЯ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ И ПРИНЦИП ИНТЕРФЕРЕНЦИИ КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКИХ АМПЛИТУД

1. Обычная формулировка постулата симметризации, согласно которой волновая функция двух тождественных частиц должна быть симметричной или антисимметричной относительно перестановки координат первой и второй частиц, является на наш взгляд неудачной. Речь, конечно, идет не о самом математическом соотношении

$$\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \pm\psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1), \tag{1}$$

а только об интерпретации его смысла. Ввиду неразличимости тождественных частиц не вполне последовательно приписывать этим частицам номера. Нумеруя частицы и говоря об их перестановке, мы тем самым как бы допускаем возможность различия между ними. При таком подходе симметризация выглядит как чисто формальная операция, которая лишь постфактум учитывает неразличимость частиц и приводит к правильным результатам. Создается также впечатление, что симметризация волновых функций тождественных частиц представляет собой дополнительный принцип, не связанный с другими принципами квантовой механики.

В данной заметке мы рассмотрим иную, на наш взгляд менее формальную и более соответствующую духу квантовой механики, интерпретацию смысла волновой функции тождественных частиц. Будет также показано, что конкретная структура волновой функции тождественных частиц непосредственно следует из общей идеи интерференции амплитуд, соответствующих неразличимым путям /1,2/. Хотя многое из того, о чем будет идти речь, кажется тривиальным, такой подход, насколько нам известно, в существенных чертах отличается от общепринятого и может способствовать более точному пониманию проблемы тождественности микрочастиц.

2. Прежде всего остановимся на физическом смысле волновой функции двух тождественных частиц. Поскольку обе частицы неразличимы, $\psi(\vec{x}_1,\vec{x}_2)$ есть амплитуда вероятности того, что приборы зарегистрируют одну из частиц (неважно какую!) в точке $\vec{x}_1$, а другую – в точке $\vec{x}_2$. На языке Дирака /3/ $\psi(\vec{x}_1,\vec{x}_2)$ – это амплитуда перехода из некоторого начального состояния $|\psi\rangle$ в конечное состояние $|\vec{x}_1\rangle\times|\vec{x}_2\rangle$ в результате измерения. Таким образом, индексы 1 и 2 нумеруют не частицы, а квантовые числа одночастичных состояний, которые фиксируются приборами. В дальнейшем под $\vec{x}_1(\vec{x}_2)$ мы будем понимать не только координаты частицы, но и любую совокупность непрерывных или дискретных квантовых чисел, характеризующих одночастичное состояние (например, проекции импульса, энергию, квадрат углового момента и проекцию углового момента на выделенную ось) x/. В соответствии с этим равенство $\vec{x}_1=\vec{x}_2$ означает полное совпадение состояний $|\vec{x}_1\rangle$ и $|\vec{x}_2\rangle$ $(\langle\vec{x}_1|\vec{x}_2\rangle=1)$, а неравенство $\vec{x}_1\neq\vec{x}_2$ равносильно ортогональности указанных состояний $(\langle\vec{x}_1|\vec{x}_2\rangle=0)$. Во избежание недоразумений подчеркнем, что речь пока идет об "истинно" тождественных частицах (см. /2/), у которых все внутренние квантовые числа (в частности, проекции спина) одинаковы.

На основе такой трактовки легко доказать соотношение (1), не пользуясь операциями "перестановки" и "двойной перестановки" первой и второй частиц, не имеющими ввиду неразличимости этих частиц четкого смысла. Действительно, так как, согласно вышеизложенному, величины $\psi(\vec{x}_1,\vec{x}_2)$ и $\psi(\vec{x}_2,\vec{x}_1)$ представляют собой амплитуды одного и того же процесса – а именно – регистрации двух тождественных частиц в точках $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$, имеет место равенство

$$|\psi(\vec{x}_1,\vec{x}_2)|=|\psi(\vec{x}_2,\vec{x}_1)|. \tag{2}$$

Соотношение (2) должно выполняться для любой суперпозиции двух состояний тождественных частиц с волновыми функциями $\psi(\vec{x}_1,\vec{x}_2)$ и

x/ Число независимых квантовых чисел, описывающих движение частицы, очевидно, равно трем. Поэтому можно всегда рассматривать $\vec{x}$ как вектор в некотором трехмерном абстрактном пространстве.

$\phi(\vec{x}_1,\vec{x}_2)$. Ясно также, что это соотношение справедливо для волновых функций в любом представлении (независимо от типа регистрирующих приборов). Отсюда сразу следует (ср. /4/), что

$$\psi(\vec{x}_1,\vec{x}_2) = e^{i\epsilon}\psi(\vec{x}_2,\vec{x}_1). \tag{3}$$

где ϵ – универсальная действительная константа, не зависящая от состояния ψ и от переменных $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$. Заметим теперь, что мы можем всегда ввести функцию $\psi'(\vec{x}_1,\vec{x}_2)=\psi(\vec{x}_2,\vec{x}_1)$ и в соответствии с вышеизложенным написать для нее равенство (3). Это означает, что

$$\psi(\vec{x}_2,\vec{x}_1) = e^{i\epsilon}\,\psi(\vec{x}_1,\vec{x}_2). \tag{4}$$

Сравнивая (3) и (4), получаем:

$$\eta = e^{i\epsilon} = \pm 1\,. \tag{5}$$

Аналогичные рассуждения можно было бы провести и в случае системы нескольких тождественных частиц. Таким образом, волновая функция тождественных частиц должна быть либо симметричной, либо антисимметричной относительно перестановки любой пары аргументов, соответствующих показаниям двух измерительных приборов. Именно в этом состоит смысл симметризации.

Как известно, нерелятивистская квантовая механика не позволяет сделать выбор между знаками "+" и "–" в формуле (1). В рамках теории поля можно далее показать, что волновые функции частиц с целым спином всегда симметричны, а частиц с полуцелым спином – всегда антисимметричны /4/.

3. Рассмотрим вопрос о нормировке волновой функции тождественных частиц. Если фиксировать показания первого и второго приборов в неперекрывающихся интервалах Δ_1 и Δ_2, суммарная вероятность регистрации двух тождественных частиц (при непрерывных значениях x_1 и x_2) равна

$$P = \int\limits_{\Delta_1} \int\limits_{\Delta_2} |\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)|^2 \, d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 . \tag{6}$$

Если интервалы Δ_1 и Δ_2 совпадают, в интеграле (6), в соответствии с изложенным выше (см. раздел 2), дважды учитывается вероятность перехода в одно и то же состояние $|\vec{x}_1> \times |\vec{x}_2>$. Поэтому в этом случае суммарная вероятность регистрации, очевидно, равна

$$P = \frac{1}{2} \int\limits_{\Delta_1} \int\limits_{\Delta_1} |\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)|^2 d\vec{x}_1 \; d\vec{x}_2 . \tag{7}$$

Из (7) следует, что условие нормировки волновой функции двух тождественных частиц должно иметь вид:

$$\frac{1}{2} \int\int |\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)|^2 d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 = 1 . \tag{8}$$

В формуле (8) интегрирование распространяется на все возможные значения x_1 и x_2 .

Если квантовые числа x_1 и x_2 принимают дискретный ряд значений, вместо (8) следует написать

$$\sum_{\vec{x}} |\psi(\vec{x}, \vec{x})|^2 + \frac{1}{2} \sum \sum_{\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2}{}' |\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)|^2 = 1 . \tag{9}$$

Величина $\psi(\vec{x}, \vec{x})$ в формуле (9) есть амплитуда вероятности регистрации двух тождественных частиц в состояниях с одинаковыми наборами квантовых чисел (т.е. в одинаковых родночастичных состояниях). В случае системы нескольких (N) тождественных частиц волновая функция $\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_N)$ равна амплитуде вероятности зарегистрировать частицы в состояниях с квантовыми числами $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_N$, причем индексы 1,2 ... опять-таки нумеруют не частицы, а квантовые числа одночастичных состояний. Условие нормировки волновой функции N тождественных частиц при непрерывных значениях переменных должно иметь вид

$$\frac{1}{N!} \underbrace{\int\int \ldots \int}_{N} |\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_N)|^2 d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 \ldots d\vec{x}_N = 1 . \tag{10}$$

При дискретных значениях $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \dots \vec{x}_N$ вместо (10) следует написать

$$\sum_{\vec{x}} |\psi(\vec{x}, \vec{x} \dots \vec{x})|^2 + \frac{1}{2!} \sum_{\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2} \sum |\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x} \dots \vec{x})|^2 +$$

$$+ \frac{1}{3!} \sum_{\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2 \neq \vec{x}_3} \sum \sum |\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x} \dots \vec{x})|^2 + \dots \qquad (11)$$

$$+ \frac{1}{N!} \sum_{\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2 \neq \vec{x}_3 \neq \dots \vec{x}_N} \sum \sum \dots \sum |\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \dots \vec{x}_N)|^2 = 1 .$$

4. Проследим теперь связь структуры волновой функции системы тождественных частиц с принципом интерференции квантово-механических амплитуд. Предположим сначала, что одна из частиц находится в состоянии $|a\rangle$, а другая – в ортогональном к нему состоянии $|b\rangle$. В этом случае вектор двухчастичного состояния $|c\rangle$ представляет собой прямое произведение векторов одночастичных состояний $|a\rangle$ и $|b\rangle$. Чтобы построить волновую функцию в $\vec{x}$ -представлении, соответствующую состоянию $|c\rangle$, применяют обычно следующий прием: сначала пишут выражение для волновой функции в предположении, что частицы нетождественны, а после этого симметризуют (или антисимметризуют) полученное выражение. Следует отметить, что указанный рецепт не вполне логичен, и, строго говоря, не следует из соотношения (1). Действительно, в чисто логическом плане волновая функция могла бы быть симметричной (антисимметричной), но иметь совсем другую структуру [x/]. Поэтому при обычном изложении процедура симметризации выглядит как неявный дополнительный постулат. Мы видим обоснование этой процедуры в общей идее интерференции амплитуд, соответствующих неразличимым путям.

Действительно, переход из состояния $|c\rangle = |a\rangle \times |b\rangle$ в состояние $|\vec{x}_1\rangle \times |\vec{x}_2\rangle$ в результате измерения может идти по двум путям: 1) состояние $|a\rangle$ переходит в $|\vec{x}_1\rangle$, а состояние $|b\rangle$ – в $|\vec{x}_2\rangle$, 2) состояние $|a\rangle$ переходит в $|\vec{x}_2\rangle$, а состояние $|b\rangle$ – в $|\vec{x}_1\rangle$. С точностью до постоянного фазового множителя (см. /1/) амплитуда вероятности, соответствующая первому пути перехода, равна

[x/] По существу мы здесь снова сталкиваемся с непоследовательным подходом, когда в начале рассуждения частицы считаются различимыми, а в конце – неразличимыми.

$$A_1(\vec{x}_1,\vec{x}_2)=\langle\vec{x}_1|a\rangle\langle\vec{x}_2|b\rangle, \qquad (12)$$

а амплитуда вероятности, соответствующая второму пути перехода,

$$A_2(\vec{x}_1,\vec{x}_2)=\langle\vec{x}_2|a\rangle\langle\vec{x}_1|b\rangle. \qquad (13)$$

Здесь $\langle\vec{x}_1|a\rangle=\phi_a(\vec{x}_1)$, $\langle\vec{x}_2|b\rangle=\phi_b(\vec{x}_2)$ – нормированные волновые функции одночастичных состояний в x-представлении.

Ввиду тождественности частиц оба пути неразличимы, поэтому должна иметь место интерференция амплитуд A_1 и A_2. Если учесть, что соотношения (12) и (13), как мы уже говорили, определяют A_1 и A_2 с точностью до независящих от $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ фазовых множителей, волновая функция в x-представлении должна иметь вид

$$\psi_{ab}(\vec{x}_1,\vec{x}_2)=e^{i\delta_1}\langle\vec{x}_1|a\rangle\langle\vec{x}_2|b\rangle+e^{i\delta_2}\langle\vec{x}_2|a\rangle\langle\vec{x}_1|b\rangle. \qquad (14)$$

Из равенства (1) далее следует, что

$$e^{i(\delta_2-\delta_1)}=\pm 1. \qquad (15)$$

Фаза δ_1 может быть произвольной и без потери общности можно положить $\delta_1=0$. Учитывая, что знак "+" в формуле (15) всегда соответствует частицам с целым спином, а знак "–" – частицам с полуцелым спином, мы можем записать окончательно:

$$\psi_{ab}(\vec{x}_1,\vec{x}_2)=\langle\vec{x}_1|a\rangle\langle\vec{x}_2|b\rangle+(-1)^{2s}\langle\vec{x}_2|a\rangle\langle\vec{x}_1|b\rangle. \qquad (16)$$

Здесь s – спин каждой из тождественных частиц.

5. Выше неявно предполагалось, что векторы $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ соответствуют неодинаковым наборам квантовых чисел (т.е., что $\langle\vec{x}_1|\vec{x}_2\rangle=0$). Ясно, однако, что при непрерывных значениях $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ ввиду непрерывности волновой функции соотношение (16) должно быть справедливым

и в пределе $\vec{x}_1=\vec{x}_2$. Подчеркнем, что в случае непрерывных значений $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ автоматически выполняется равенство (8), т.е. волновая функция, определенная по формуле (16), является нормированной x/.

Будем считать, что величина $\vec{x}$ принимает дискретные значения. Если наборы $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ не совпадают, то из вышеизложенного ясно, что структура волновой функции по-прежнему определяется формулой (16). Однако при $\vec{x}_1=\vec{x}_2$ рассуждения с интерференцией двух амплитуд теряют свой смысл, и формула (16) становится, вообще говоря, неверной. В этом случае для определения структуры волновой функции следует воспользоваться условием нормировки (9).

Поскольку амплитуда $\langle \vec{x},\vec{x} \,|\, c\rangle = \langle \vec{x},\vec{x} \,|\, ab\rangle$, вообще говоря, не равна функции $\psi_{ab}(\vec{x},\vec{x})$, которая получается, если подставить в (16) значения $\vec{x}_1=\vec{x}_2=\vec{x}$, введем новое обозначение

$$\langle \vec{x}\times\vec{x} \,|\, a\times b\rangle = \phi_{ab}(\vec{x},\vec{x}) .$$

Тогда равенство (9) запишется в виде:

$$\frac{1}{2}\sum_{\vec{x}_1\neq\vec{x}_2}\sum |\psi_{ab}(\vec{x}_1,\vec{x}_2)|^2+\sum_{\vec{x}}|\phi_{ab}(\vec{x},\vec{x})|^2=1 \tag{17}$$

или

$$\frac{1}{2}\Big[\sum_{\vec{x}_1}\sum_{\vec{x}_2}|\psi_{ab}(\vec{x}_1,\vec{x}_2)|^2-\sum_{\vec{x}}|\psi_{ab}(\vec{x},\vec{x})|^2\Big]+\sum_{\vec{x}}|\phi_{ab}(\vec{x},\vec{x})|^2=1 . \tag{17a}$$

Легко видеть, что с учетом равенств

$$\langle a|a\rangle=\sum_{\vec{x}}\langle \vec{x}|a\rangle\langle \vec{x}|a\rangle^*=1,\quad \langle b|b\rangle=\sum_{\vec{x}}\langle \vec{x}|b\rangle\langle \vec{x}|b\rangle^*=1,$$

$$\langle a|b\rangle=\sum_{\vec{x}}\langle \vec{x}|a\rangle^*\langle \vec{x}|b\rangle=0,$$

---

x/ В большинстве учебников и монографий (см., например, /4/) выражение для волновой функции двух тождественных частиц отличается от (16) множителем $1/\sqrt{2}$. Это связано с тем, что обычно на волновую функцию тождественных частиц накладывается стандартное условие нормировки $\iint|\psi(\vec{x}_1,\vec{x}_2)|^2\,d\vec{x}_1 d\vec{x}_2=1$, не совпадающее с (8). Заметим, что при такой нормировке вероятность регистрации двух тождественных частиц в точках $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ равна $2|\psi(\vec{x}_1,\vec{x}_2)|^2$, а не $|\psi(\vec{x}_1,\vec{x}_2)|^2$, как у нас.

сумма

$$\sum_{\vec{x}_1} \sum_{\vec{x}_2} |\psi_{ab}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)|^2 = 1 .$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{\vec{x}} |\phi_{ab}(\vec{x}, \vec{x})|^2 = \frac{1}{2} \sum |\psi_{ab}(\vec{x}, \vec{x})|^2 . \qquad (18)$$

Для частиц с целым спином

$$\psi_{ab}(\vec{x}, \vec{x}) = 2 < \vec{x} \mid a > < \vec{x} \mid b > ,$$

для частиц с полуцелым спином $\psi_{ab}(\vec{x}, \vec{x}) = 0$.

Заметим теперь, что амплитуда перехода из состояния $|a>\times|b>$ в состояние $|\vec{x}>\times|\vec{x}>$ по своему смыслу должна быть пропорциональна величине $<\vec{x}|a><\vec{x}|b>$. В соответствии с этим мы можем написать

$$\phi_{ab}(\vec{x}, \vec{x}) = < \vec{x} \times \vec{x} \mid a \times b > = \beta < \vec{x} \mid a > < \vec{x} \mid b > . \qquad (19)$$

Сопоставляя (18) и (19), получим

$$\beta = \sqrt{2} \qquad \text{(для бозонов)} \qquad (20а)$$

$$\beta = 0 \qquad \text{(в случае фермионов)} \qquad (20б)$$

При полуцелых значениях спина $\phi_{ab}(\vec{x}, \vec{x}) = 0$, что является математическим выражением принципа Паули.

6. Мы рассмотрели случай, когда.. $|a>$ и $|b>$ – ортогональные друг другу состояния. Важно подчеркнуть, что если $0 < |<a|b>| < 1$, состояние $|a>\times|b>$ вообще не может быть реализовано. Последнее утверждение становится очевидным после конкретного анализа любого реального способа приготовления исходного состояния, если учесть, что всякое устройство взаимодействует с обеими частицами совершенно одинаково. С другой стороны, при $<b|a> = 0$ состояние $|a>\times|b>$ может быть в принципе создано, и вектор $|a>\times|b>$ имеет вполне определенный смысл, который мы выяснили в предыдущих разделах.

Можно также рассмотреть случай, когда две частицы находятся в одном и том же исходном состоянии $|a>$. Вектор соответствующего двухчастичного состояния будет иметь вид $|a>\times|a>$. Очевидно, что такая ситуация может быть реализована только для бозонов.

Из равенств (19) и (20а) следует, что в этом случае

$$\psi_{aa}(\vec{x}_1,\vec{x}_2)=<\vec{x}_1\times\vec{x}_2\;|\;a\times a>=<a\times a\;|\;\vec{x}_1\times\vec{x}_2>^*=$$
$$=\sqrt{2}<a\;|\;\vec{x}_1>^*<a|\vec{x}_2>^*=\sqrt{2}<\vec{x}_1|a><\vec{x}_2|a>. \tag{21}$$

При непрерывных значениях $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ функция $\psi_{aa}(\vec{x}_1,\vec{x}_2)$ автоматически удовлетворяет условию нормировки. При дискретных значениях x_1 и $\vec{x}_2$ формула (21) справедлива только в случае, когда $\vec{x}_1\neq\vec{x}_2$. Если же $\vec{x}_1=\vec{x}_2$, то, опираясь на условие нормировки (ср. с.п. 5), легко показать, что

$$\phi_{aa}(\vec{x},\vec{x})=<\vec{x}\times\vec{x}\;|\;a\times a>=<\vec{x}|a><\vec{x}|a>. \tag{22}$$

Общий случай, когда исходное двухчастичное состояние представляется в виде суммы произведений векторов одночастичных состояний, может быть проанализирован аналогичным образом.

Окончательно мы можем утверждать, что принцип интерференции амплитуд неразличимых процессов в сочетании с условием нормировки вероятностей однозначно определяет структуру волновых функций тождественных частиц. Хотя мы ограничились случаем двух тождественных частиц, ясно, что аналогичный подход применим к волновой функции многих тождественных частиц.

7. До сих пор речь шла об "истинно" тождественных частицах, у которых все внутренние квантовые числа одинаковы. Под $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ мы понимали совокупности "внешних" квантовых чисел, характеризующих движение частицы как целого.

"Внутренние" квантовые числа (которые всегда дискретны) по определению характеризуют структуру частицы. К внутренним квантовым числам относятся проекции спина на выделенную ось, странность, изотопический спин, заряд, масса и т.д. Важно то, что в природе реализуются суперпозиции состояний с разными значениями внутренних квантовых

вых чисел. Например, состояние электрона с проекцией +1/2 на ось x представляет собой суперпозицию состояний с проекциями +1/2 и -1/2 на ось z . Долгоживущий нейтральный K-мезон (K^0_L) есть суперпозиция K^0 и $\bar{K}^0$. Указанные суперпозиции могут быть неортогональными друг другу. Степень неортогональности внутренних состояний C и D является, по-видимому, универсальным непрерывным параметром различимости этих состояний /5/. Если $\langle C|D\rangle=0$, частицы ведут себя как различные, при $\langle C|D\rangle=1$ – как "истинно" тождественные частицы. В случае $0<|\langle C|D\rangle|<1$ состояния C и D являются "частично различимыми", и их поведение носит промежуточный характер. В этой связи следует подчеркнуть условность общепринятой классифкации, согласно которой состояния с разными проекциями спина относят к одинаковым частицам, а состояния с разными странностями – к разным. И те, и другие состояния могут "объединяться" в суперпозиции, вид которых определяется условиями генерации или детектирования. С этой точки зрения "истинно" различными следовало бы считать частицы, суперпозиции которых в принципе не реализуются в природе x/.

Легко понять, что если под x_1 и x_2 понимать всю совокупность квантовых чисел – как внешних, так и внутренних – все соотношения настоящей работы для волновой функции (амплитуды регистрации) двух частиц остаются в силе. При этом принцип интерференции позволяет однозначно определить структуру волновой функции (амплитуды регистрации) для частиц с неодинаковыми внутренними состояниями.

Рассмотрим в этой связи выражение (16). Вводя внутренние и внешние векторы состояний, определенные в разных подпространствах, мы можем написать для векторов состояний, фигурирующих в (16), равенства:

$$|\vec{x}_1\rangle=|\vec{X}_1\rangle\times|m\rangle,\quad |\vec{x}_2\rangle=|\vec{X}_2\rangle\times|n\rangle,$$

$$|a\rangle=|A\rangle\times|C\rangle,\qquad |b\rangle=|B\rangle\times|D\rangle. \tag{23}$$

---

x/ Как известно, "правила суперотбора" запрещают существование суперпозиций частиц с разными электрическими или барионными зарядами и частиц с целым или полуцелым спином.

Здесь $\vec{X}_1$, $\vec{X}_2$, A , B соответствуют "внешним" квантовым числам одночастичных состояний, m , n , C и D – внутренним. Будем считать, что $\langle\vec{X}_1|\vec{X}_2\rangle=\langle A|B\rangle=0$ (так что, как и прежде, $\langle a|b\rangle=0$, $\langle\vec{x}_1|\vec{x}_2\rangle=0$). С учетом (23) формулу (16) можно переписать в виде:

$$\psi(\vec{X}_1 m, \vec{X}_2 n)=\langle\vec{X}_1|A\rangle\langle\vec{X}_2|B\rangle\langle m|C\rangle\langle n|D\rangle+ \\ +(-1)^{2s}\langle\vec{X}_1|B\rangle\langle\vec{X}_2|A\rangle\langle m|D\rangle\langle n|C\rangle. \tag{24}$$

Найдем вероятность регистрации состояния $|a\rangle\times|b\rangle$, просуммированную по всем возможным внутренним квантовым числам конечных состояний. Мы получим

$$p=\sum_{m,n}|\psi(\vec{X}_1 m,\vec{X}_2 n)|^2=|\langle\vec{X}_1|A\rangle|^2|\langle\vec{X}_2|B\rangle|^2+ \\ +|\langle\vec{X}_2|A\rangle|^2|\langle\vec{X}_1|B\rangle|^2+2(-1)^{2s}|\langle C|D\rangle|^2\times \\ \times\mathrm{Re}(\langle\vec{X}_1|A\rangle\langle\vec{X}_2|B\rangle\langle\vec{X}_1|B\rangle^*\langle\vec{X}_2|A\rangle^*). \tag{25}$$

Выражение (25) непрерывно зависит от степени неортогональности внутренних состояний $\langle C|D\rangle$. При $\langle C|D\rangle=1$ оно дает вероятность регистрации "истинно" тождественных частиц, а при $\langle C|D\rangle=0$ – вероятность регистрации различающихся частиц (см. также /5,6/).

8. Подводя итоги, можно констатировать, что общий квантово-механический принцип интерференции амплитуд, соответствующих неразличимым путям, имеет самое непосредственное отношение и к проблеме тождественности; он не только определяет структуру волновой функции системы тождественных частиц, но также указывает и на наличие непрерывного перехода между свойствами систем полностью различных и полностью тождественных частиц в случаях, когда возможны суперпозиции по каким-либо внутренним квантовым числам.

Литература

1. Р. Фейнман, Р. Лейтон, Н. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике, т. 8, гл. 2, Изд. Мир, 1966.
2. В.Л. Любошиц, М.И. Подгорецкий. ЖЭТФ, 55, 904, 1968.
3. П.А.М. Дирак. Принципы квантовой механики, гл. IX ГИФМЛ, 1960.
4. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Квантовая механика, гл. IX , ГИФМЛ,1963.
5. В.Л. Любошиц, М.И. Подгорецкий. ЖЭТФ, 60, 9, 1971.
6. В.Л. Любошиц. Сообщение ОИЯИ, Р2-4631, Дубна, 1969.

Рукопись поступила в издательский отдел

6 мая 1971 года.