П-286

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

5/VII-71

Р2-5798

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А.Б. Пестов

СВЯЗЬ МЕЖДУ УРАВНЕНИЯМИ ДИРАКА И УРАВНЕНИЯМИ МАКСВЕЛЛА

1971

P2-5798

А.Б. Пестов

СВЯЗЬ
МЕЖДУ УРАВНЕНИЯМИ ДИРАКА
И УРАВНЕНИЯМИ МАКСВЕЛЛА

Направлено в ТМФ

§1. Введение

Алгебра K над полем комплексных чисел C, структурные константы и ранг которой определяются уравнениями

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\, g_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.1}$$

для образующих $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, называется алгеброй Клиффорда.

Положим

$$\gamma_{\nu_1 \ldots \nu_k} \equiv \gamma_{[\nu_1} \ldots \gamma_{\nu_k]} \quad \underset{(k)}{F} \equiv \sum_{(\nu_1 \ldots \nu_k)} f^{\nu_1 \ldots \nu_k} \gamma_{\nu_1 \ldots \nu_k}, \tag{1.2}$$

где $[\ldots]$ – операция альтернирования, суммирование ведется по сочетаниям, а компоненты $f^{\nu_1 \ldots \nu_k}$ кососимметричны по каждой паре индексов и $f^{\nu_1 \ldots \nu_k} \in C$.

Общий элемент алгебры K можно представить в форме

$$F = \sum_{k=0}^{n} \underset{(k)}{F}, \tag{1.3}$$

где $\underset{(0)}{F} = f_0 \cdot 1$, 1 – единица алгебры K , а $\underset{(k)}{F}$ определяются формулой (1.2).

Остановимся на геометрическом смысле величин $f^{\nu_1 \dots \nu_k}$ и $\gamma_{\nu_1 \dots \nu_k}$.

Ничто не мешает нам считать γ_ν базисными векторами n -мерного евклидова пространства, а уравнения (1.1) рассматривать как алгебраическое представление скалярных произведений базисных векторов.

Взаимно однозначным отображениям алгебры K на себя, порождаемым преобразованиями

$$(a): \quad \gamma_\nu \to \gamma'_\nu = a^\mu_\nu \gamma_\mu \ , \ | a^\mu_\nu | \neq 0 \ ,$$

соответствуют преобразования координат f^ν вектора $\underset{(1)}{F} = f^\nu \gamma_\nu$

$$f^{\nu'} = a^\nu_\mu f^\mu .$$

В общем же случае $f^{\nu_1 \dots \nu_k}$, очевидно, являются контравариантными компонентами полностью кососимметрического тензора $\underset{(k)}{F} = \sum\limits_{(\nu_1 \dots \nu_k)} f^{\nu_1 \dots \nu_k} \gamma_{\nu_1 \dots \nu_k}$ валентности k (k -вектора), а $\gamma_{\nu_1 \dots \nu_k} (\nu_1 < \dots < \nu_k)$ базисными k-векторами.

Непосредственно из уравнения (1.1) и определения получим

$$\gamma_{\mu\nu} = \gamma_\mu \gamma_\nu - g_{\mu\nu}; \ \gamma_{\mu\nu\lambda} = \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda - \gamma_\mu g_{\nu\lambda} + \gamma_\nu g_{\lambda\mu} - \gamma_\lambda g_{\mu\nu} . \qquad (1.4)$$

§2. Уравнение Дирака над алгеброй Клиффорда

Переходя к 4-пространству-времени, будем считать, что $x^4 = ct$, а $g_{\mu\nu}$ в (1.1) – тензор Минковского

$$g_{\mu\nu} = 0, \ \mu \neq \nu, \ g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{44} = -1$$

$$(\mu, \nu = 1,2,3,4).$$

Тогда, очевидно, $\gamma_{\nu_1 \dots \nu_k} = \gamma_{\nu_1} \dots \gamma_{\nu_k}$, $\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$, антикоммутирует с γ_ν

$$\gamma_\nu \gamma_5 + \gamma_5 \gamma_\nu = 0 . \qquad (2.1)$$

Предположим, что алгебра Клиффорда задана в каждой точке пространства-времени, т.е. будем предполагать, что компоненты $f^{\nu_1 \dots \nu_k}$ – функции переменных x^1, x^2, x^3, x^4, и введем дифференциально-алгебраический оператор

$$P = \gamma_\nu P^\nu . \qquad (2.2)$$

Здесь $P_\nu = -i h \dfrac{\partial}{\partial x^\nu}$ – оператор импульса и

$$P^\nu = g^{\nu\mu} P_\mu , \quad g_{\mu\nu} g^{\lambda\nu} = \delta^\lambda_\mu .$$

Действуя оператором (2.2) на $\underset{(k)}{F}$, получим с помощью (1.4) и аналогичных равенств для $\gamma_{\mu\nu\lambda\sigma}$, $\gamma_{\mu\nu\lambda\sigma\delta}$

$$P \underset{(1)}{F} = \sum_{(\mu,\nu)} (P^\mu f^\nu - P^\nu f^\mu) \gamma_{\mu\nu} + P_\sigma f^\sigma ,$$

$$P \underset{(2)}{F} = \sum_{(\mu,\nu,\lambda)} (P^\mu f^{\nu\lambda} + P^\nu f^{\lambda\mu} + P^\lambda f^{\mu\nu}) \gamma_{\mu\nu\lambda} + P_\sigma f^{\sigma\mu} \gamma_\mu , \qquad (2.3)$$

$$P \underset{(3)}{F} = \sum_{(\mu,\nu,\lambda,\sigma)} (P^\mu f^{\nu\lambda\sigma} - P^\nu f^{\lambda\sigma\mu} + P^\lambda f^{\sigma\mu\nu} - P^\sigma f^{\mu\nu\lambda}) \gamma_{\mu\nu\sigma\delta} + \sum_{(\mu,\nu)} P_\sigma f^{\sigma\mu\nu} \gamma_{\mu\nu} ,$$

$$P \underset{(4)}{F} = \sum_{(\mu,\nu,\lambda)} P_\sigma f^{\sigma\mu\nu\lambda} \gamma_{\mu\nu\lambda} .$$

Рассмотрим уравнение Дирака над алгеброй Клиффорда

$$PF - mcF = 0, \tag{2.4}$$

где F - общий элемент алгебры (1.3), а P - оператор (2.2). Расписывая уравнение (2.4) через компоненты с помощью (2.3), получим систему зацепляющихся тензорных уравнений первого порядка:

$$P_\sigma f^\sigma - mc f_0 = 0,$$

$$P_\sigma f^{\sigma\mu} + P^\mu f_0 - mc f^\mu = 0,$$

$$P_\sigma f^{\sigma\mu\nu} + P^\mu f^\nu - P^\nu f^\mu - mc f^{\mu\nu} = 0, \tag{2.5}$$

$$P_\sigma f^{\sigma\mu\nu\lambda} + P^\mu f^{\nu\lambda} + P^\nu f^{\lambda\mu} + P^\lambda f^{\mu\nu} - mc f^{\mu\nu\lambda} = 0,$$

$$P_\mu f_{\nu\lambda\sigma} - P_\nu f_{\lambda\sigma\mu} + P_\lambda f_{\sigma\mu\nu} - P_\sigma f_{\mu\nu\lambda} - mc f_{\mu\nu\lambda\sigma} = 0.$$

Таким образом, геометрическая трактовка алгебры Клиффорда позволяет представить уравнение Дирака над K как систему тензорных уравнений (2.5), и обратно: система тензорных уравнений (2.5) и все ее частные случаи допускают алгебраическое представление, что, в свою очередь, позволяет применить к их исследованию алгебраические методы.

Так как $P^2 = g^{\mu\nu} P_\mu P_\nu = h^2 \Box$, где $\Box$ - оператор Даламбера, то, применяя к (2.4) оператор P, убеждаемся, что каждая компонента F является также решением уравнения Клейна-Фока.

Полагая $U = F_{(0)} + F_{(2)} + F_{(4)}$, $V = F_{(1)} + F_{(3)}$, представим уравнение (2.4) в форме

$$PU = mcV\,, \qquad PV = mcU\,. \tag{2.6}$$

Преобразования

$$(\alpha)\colon\ U \to U' = e^{\alpha\gamma_5}\, U\,;\quad V \to V' = e^{-\alpha\gamma_5}\, V, \tag{2.7}$$

очевидно, образуют абелеву группу, а из (2.1) получим, что

$$P\, e^{\alpha\gamma_5} = e^{-\alpha\gamma_5}\, P$$

и, следовательно, уравнение (2.6) инвариантно относительно преобразований из этой группы, т.е., если U и V являются решениями уравнения Дирака, то и U' и V' также есть решения уравнения (2.6).

При $m = 0$ уравнение (2.6) распадается на два независимых уравнения:

$$PU = 0\,,\ PV = 0\,. \tag{2.8}$$

Из свойств алгебры Клиффорда $(n = 2\nu)$, имеющих существенное значение для дальнейшего, отметим следующие: алгебра Клиффорда $(n = 2\nu)$ является простой алгеброй и разлагается в прямую сумму простых изоморфных левых (правых) идеалов, причём разложение определяется неоднозначно; всякое взаимно однозначное изоморфное отображение алгебры на себя является внутренним автоморфизмом, т.е. имеет вид

$$(A)\colon\ F \to F' = AFA^{-1}\,,\ AA^{-1} = 1\,;$$

простые левые (правые) идеалы – модули представлений алгебры Клиффорда, реализующие ее неприводимые представления. Нетрудно убедиться, что внутренний автоморфизм алгебры Клиффорда

$$(S): F \to F' = SFS^{-1},$$

где

$$S = iA\gamma_5 \ ; \ A = a^{\mu}\gamma_{\mu} \quad \text{и} \quad A^2 = 1,$$

порождает преобразование компонент k-векторов, совпадающее с тем, которое получается при операции симметрии относительно гиперплоскости, определяемой единичным вектором A. Это позволяет доказать инвариантность уравнения (2.4) относительно операции симметрии, а, следовательно, и относительно 4-вращений пространства-времени чисто алгебраически.

Разложим теперь общий элемент алгебры в прямую сумму простых левых идеалов и запишем уравнение (2.4) через компоненты этих идеалов так, чтобы представление в форме (2.6) сохранилось. Возьмем, например, разложение F в прямую сумму простых левых идеалов следующего вида:

$$F = (\xi_0 + \xi_1\gamma_1 + \xi_2\gamma_2 + \xi_{12}\gamma_{12})e_1 + (\eta_0 + \eta_1\gamma_1 + \eta_2\gamma_2 + \eta_{12}\gamma_{12})e_2 + \qquad (2.9)$$

$$+ (\zeta_0 + \zeta_1\gamma_1 + \zeta_2\gamma_2 + \zeta_{12}\gamma_{12})e_3 + (\chi_0 + \chi_1\gamma_1 + \chi_2\gamma_2 + \chi_{12}\gamma_{12})e_4,$$

где элементы алгебры K

$$e_1 = \frac{1}{4}(1 + \gamma_{14})(1 + i\gamma_{23}), \quad e_2 = \frac{1}{4}(1 + \gamma_{14})(1 - i\gamma_{23}),$$

$$e_3 = \frac{1}{4}(1 - \gamma_{14})(1 + i\gamma_{23}), \quad e_4 = \frac{1}{4}(1 - \gamma_{14})(1 - i\gamma_{23}),$$

обладают свойствами

$$\sum_{\nu=1}^{4} e_\nu = 1, \quad e_\nu e_\mu = e_\mu e_\nu = 0, \quad \mu \neq \nu, \quad e_\nu^2 = e_\nu .$$

Подставляя (2.9) в (2.4), получим уравнения для ξ, ζ, η, χ :

$$(-P^1 - P^4)\xi_1 + (-P^2 + iP^3)\xi_2 = mc\xi_0, \qquad (-P^1 - P^4)\eta_1 + (-P^2 - iP^3)\eta_2 = mc\eta_0,$$

$$(-P^2 - iP^3)\xi_1 + (P^1 - P^4)\xi_2 = mc\xi_{12}, \qquad (-P^2 + iP^3)\eta_1 + (P^1 - P^4)\eta_2 = mc\eta_{12},$$

$$(P^1 - P^4)\xi_0 + (P^2 - iP^3)\xi_{12} = mc\xi_1, \qquad (P^1 - P^4)\eta_0 + (P^2 + iP^3)\eta_{12} = mc\eta_1,$$

$$(P^2 + iP^3)\xi_0 + (-P^1 - P^4)\xi_{12} = mc\xi_2, \qquad (P^2 - iP^3)\eta_0 + (-P^1 - P^4)\eta_{12} = mc\eta_2, \tag{2.10}$$

$$(-P^1 + P^4)\zeta_1 + (-P^2 + iP^3)\zeta_2 = mc\zeta_0, \qquad (-P^1 + P^4)\chi_1 + (-P^2 - iP^3)\chi_2 = mc\chi_0,$$

$$(-P^2 - iP^3)\zeta_1 + (P^1 + P^4)\zeta_2 = mc\zeta_{12}, \qquad (-P^2 + iP^3)\chi_1 + (P^1 + P^4)\chi_2 = mc\chi_{12},$$

$$(P^1 + P^4)\zeta_0 + (P^2 - iP^3)\zeta_{12} = mc\zeta_1, \qquad (P^1 + P^4)\chi_0 + (P^2 + iP^3)\chi_{12} = mc\chi_1,$$

$$(P^2 + iP^3)\zeta_0 + (-P^1 + P^4)\zeta_{12} = mc\zeta_2, \qquad (P^2 - iP^3)\chi_0 + (-P^1 + P^4)\chi_{12} = mc\chi_2 .$$

Согласно сказанному выше, идеалы являются модулями представлений алгебры Клиффорда. Обозначая через P_ξ, P_η, P_ζ, P_χ матрицы, реализующие представления оператора P на соотвествующих идеалах в (2.8), уравнения (2.9) можно записать в матричной форме Дирака:

$$(P_\xi - mc)\xi = 0,\ (P_\eta - mc)\eta = 0,\ (P_\zeta - mc)\zeta = 0,\ (P_\chi - mc)\chi = 0. \qquad (2.11)$$

Так как идеалы в (2.8) простые, то рассматриваемые представления оператора P неприводимы и эквивалентны, а это означает, что уравнение (2.4) фактически эквивалентно одному из уравнений (2.11). Отметим, также, что преобразования из группы (2.7) в применении, например, к

$$\xi = (\xi_0 + \xi_1\gamma_1 + \xi_2\gamma_2 + \xi_{12}\gamma_{12})e_1$$

действуют следующим образом:

$$(a): \xi \to \xi' = e^{ia}\xi .$$

§3. Алгебраическое представление уравнений Максвелла

Покажем, что вакуумные уравнения Максвелла

$$\partial_\sigma f^{\sigma\nu} = 0, \qquad (3.1)$$

$$\partial_\mu f_{\nu\lambda} + \partial_\nu f_{\lambda\mu} + \partial_\lambda f_{\mu\nu} = 0$$

являются частным случаем уравнения Дирака (2.4). Полагая в (2.4) $\underset{(0)}{F} = \underset{(1)}{F} = \underset{(3)}{F} = \underset{(4)}{F} = 0$, $m = 0$, имеем

$$P\underset{(2)}{F} = 0. \tag{3.2}$$

Расписывая (3.2) через компоненты с помощью (2.3), получим (3.1).

Вводя вектор тока $J = J^{\sigma}\gamma_{\sigma}$, имеем алгебраическое представление уравнений Максвелла

$$\begin{gathered} \partial_{\sigma} f^{\sigma\nu} = J^{\nu}, \\ \partial_{\mu} f_{\nu\lambda} + \partial_{\nu} f_{\lambda\mu} + \partial_{\lambda} f_{\mu\nu} = 0 \end{gathered} \tag{3.3}$$

в виде

$$P\underset{(2)}{F} = -ih\, J. \tag{3.4}$$

Рассмотрим преобразования (2.7) в применении к бивектору .

$$(a);\quad \underset{(2)}{F} \to \underset{(2)}{F'} = e^{a}\gamma_5 \underset{(2)}{F}. \tag{3.5}$$

Уравнение Максвелла в форме (3.2) инвариантно относительно этой группы, т.е. если $\underset{(2)}{F}$ является решением уравнения (3.2), то и $\underset{(2)}{F'}$ – также решение уравнения (3.2).

Расписывая преобразования (3.5) через компоненты, имеем:

$$f^{14\prime} = \cos a\, f^{14} - \sin a\, f^{23},$$

$$f^{24\prime} = \cos a\, f^{24} - \sin a\, f^{31},$$

$$f^{34\prime} = \cos a\, f^{34} - \sin a\, f^{12},$$

$$f^{23'} = \cos\alpha\, f^{23} + \sin\alpha\, f^{14} ,$$

$$f^{31'} = \cos\alpha\, f^{31} + \sin\alpha\, f^{24} , \qquad (3.6)$$

$$f^{12'} = \cos\alpha\, f^{12} + \sin\alpha\, f^{34} .$$

Следовательно, преобразования (3.5) являются поворотом дуальности /1/.

Д.А. Уилер /1/ отмечает аналогию между нейтринным и электромагнитным полями на основе существования поворотов дуальности для электромагнитного поля в форме (3.6) и поворотами дуальности для нейтрино /2/

$$\psi' = e^{\alpha\gamma_5}\psi$$

и задается вопросом: "существует ли какая-либо глубокая связь между двумя видами поворота дуальности?"

Ответ будет следующим: алгебраическое представление уравнений Максвелла позволяет установить, что два вида поворотов дуальности – на самом деле лишь различные представления одной и той же группы преобразований.

Найдем, как преобразуются при поворотах дуальности инварианты электромагнитного поля $A = \vec{E}^2 - \vec{H}^2$ и $B = 2(\vec{E}\cdot\vec{H})$. Имеем

$$\underset{(2)}{F}^2 = \vec{E}^2 - \vec{H}^2 + 2\gamma_5(\vec{E}\vec{H}) = A + \gamma_5 B , \quad \underset{(2)}{F}'^2 = e^{2\alpha\gamma_5}\underset{(2)}{F}^2 .$$

Отсюда следует, что

$$A' = \cos 2\alpha\, A - \sin 2\alpha\, B ,$$

$$B' = \sin 2\alpha\, A + \cos 2\alpha\, B .$$

Таким образом, величиной, инвариантной как относительно 4-вращений, так и относительно поворотов дуальности, является

$$L = A^2 + B^2 = (\vec{E}^2 - \vec{H}^2)^2 + 4(\vec{E}\vec{H})^2 .$$

Из алгебраической формы уравнений Максвелла легко получить их так называемые спинорные представления /3/ как в двухкомпонентной, так и в четырехкомпонентной форме, отличающихся, однако, лишь тем, что они вводятся различными разложениями $\underset{(2)}{F}$ и J в прямую сумму левых идеалов.

Например, прилагая разложение (2.9) к $\underset{(2)}{F}$ и J, получим

$$\underset{(2)}{F} = (\xi_0+\xi_{12}\gamma_{12})e_1+(\eta_0+\eta_{12}\gamma_{12})e_2+(\zeta_0+\zeta_{12}\gamma_{12})e_3+(\chi_0+\chi_{12}\gamma_{12})e_4\,,$$

$$J = (k_1\gamma_1+k_2\gamma_2)e_1+(i_1\gamma_1+i_2\gamma_2)e_2+(j_1\gamma_1+j_2\gamma_2)e_3+(l_1\gamma_1+l_2\gamma_2)e_4\,,$$

где

$$\xi_0 = f^{14}-if^{23}\,, \quad \xi_{12} = f^{12}+if^{13}+f^{24}+if^{234}\,,$$

$$\chi_0 = -f^{14}+if^{23}\,, \quad \chi_{12} = f^{12}-if^{13}-f^{24}+if^{34}\,,$$

$$k_1 = J^1-J^4\,,\ k_2 = J^2+iJ^3\,, \quad l_1 = J^1+J^4\,,\ l_2 = J^2-iJ^3\,.$$

Аналогичные равенства можно написать и для η, ζ; i, j.

Уравнения Максвелла запишутся теперь в матричной двухкомпонентной форме.

$$P_\xi\,\xi = -ihk\,, \quad P_\chi\,\chi = -ihl\,,$$

где

$$P_\xi = \begin{pmatrix} P^1-P^4 & P^2-iP^3 \\ P^2+iP^3 & -P^1-P^4 \end{pmatrix}, \quad P_\chi = \begin{pmatrix} P^1+P^4 & P^2+iP^3 \\ P^2-iP^3 & -P^1+P^4 \end{pmatrix}, \xi = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_{12} \end{pmatrix}, \chi = \begin{pmatrix} \chi_0 \\ \chi_{12} \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}, l = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}.$$

Отметим также, что если $\underset{(2)}{F}$ удовлетворяет уравнению (3.4), то $\underset{(2)}{F}' = \gamma_5 \underset{(2)}{F}$ удовлетворяет уравнениям

$$P_\sigma f^{\sigma\nu'} = 0,$$

$$P_\mu f'_{\nu\lambda} + P_\nu f_{\lambda\mu} + P_\lambda f_{\mu\nu} = J_{\mu\nu\lambda}, \tag{3.7}$$

где $\underset{(3)}{J} = J^{\mu\nu\lambda}\gamma_{\mu\nu\lambda} = -\gamma_5 J$ – аксиальный вектор тока (тока монополей).

§4. Другие вырожденные формы уравнения Дирака над алгеброй Клиффорда

Дальнейшее рассмотрение вырожденных форм уравнения (2.4) начнем с уравнения

$$P\underset{(3)}{F} = 0. \tag{4.1}$$

Расписывая его через компоненты, получим с помощью (2.3)

$$P_\sigma f^{\sigma\mu\nu} = 0, \tag{4.2}$$

$$P_\mu f_{\nu\lambda\sigma} - P_\nu f_{\lambda\sigma\mu} + P_\lambda f_{\sigma\mu\nu} - P_\sigma f_{\mu\nu\lambda} = 0. \tag{4.3}$$

Воспользуемся известной теоремой Пуанкаре: для того, чтобы ковариантный кососимметрический тензор $\omega_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}$ можно было записать как внешнюю производную от некоторого q-вектора (в виде градиента от скаляра в случае $q = 0$), необходимо и достаточно, чтобы его внешняя производная равнялась нулю:

$$d\,\omega_{\mu\nu\ldots\sigma} = \partial_{[\lambda}\ \omega_{\mu\nu\ldots\sigma]} = 0. \qquad (4.4)$$

Прилагая эту теорему к $f_{\mu\nu\lambda}$, когда $q = 2$, и имея в виду, что условие (4.4) совпадает с группой уравнений (4.3), получаем, что

$$f_{\mu\nu\lambda} = P_\mu f_{\nu\lambda} + P_\nu f_{\lambda\mu} + P_\lambda f_{\mu\nu}. \qquad (4.5)$$

Подставляя (4.5) в (4.2), имеем уравнения для $f_{\mu\nu}$:

$$\Box f_{\mu\nu} + P_\nu P^\sigma f_{\sigma\mu} - P_\mu P^\sigma f_{\sigma\nu} = 0\ . \qquad (4.6)$$

Как очевидное следствие (4.5) получаем, что $f_{\mu\nu}$ определяется неоднозначно, а именно, с точностью до бивектора.

$$\tilde{f}_{\mu\nu} = P_\mu f_\nu - P_\nu f_\mu,$$

где f_μ – произвольное векторное поле.

Для поля $\underset{(3)}{F}$, взаимодействующего с тензорным током $\underset{(2)}{J} = J^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu}$, имеем уравнение

$$P \underset{(3)}{F} = \underset{(2)}{J},$$

или в компонентах

$$P_\sigma f^{\sigma\mu\nu} = J^{\mu\nu}, \qquad (4.7)$$

$$P_\mu f_{\nu\lambda\sigma} - P_\nu f_{\lambda\sigma\mu} + P_\lambda f_{\sigma\mu\nu} - P_\sigma f_{\mu\nu\lambda} = 0.$$

В качестве прямого следствия кососимметричности $f^{\sigma\mu\nu}$ получаем закон сохранения для тензорного тока:

$$P_\sigma J^{\sigma\mu} = 0.$$

Величина $\underset{(3)}{F}{}^2$, как нетрудно убедиться, является скаляром и функцией Лагранжа для уравнений (4.2). Уравнения (4.6) были предложены В.И. Огиевецким и И.В. Полубариновым /4/ в качестве уравнений для частиц, названных ими нотофами.

Остановимся теперь более подробно на уравнениях (2.8). Расписывая уравнение $PU = 0$ в компонентах, имеем

$$P_\sigma f^{\sigma\nu} + P^\nu f_0 = 0,$$

$$P_\mu f_{\nu\lambda} + P_\nu f_{\lambda\mu} + P_\lambda f_{\mu\nu} + P_\sigma f^\sigma_{\mu\nu\lambda} = 0. \tag{4.8}$$

Вводя полярный и аксиальный векторы токов

$$J^\mu = -P^\mu f_0, \quad J_{\mu\nu\lambda} = -P_\sigma f^\sigma_{\mu\nu\lambda}, \tag{4.9}$$

представим уравнения (4.8) в виде

$$P_\sigma f^{\sigma\nu} = J^\nu,$$

$$P_\mu f_{\nu\lambda} + P_\nu f_{\lambda\mu} + P_\lambda f_{\mu\nu} = J_{\mu\nu\lambda}. \tag{4.10}$$

Уравнения (4.10) - это уравнения Максвелла с токами (4.9) зарядов и монополей. Если один из токов равен нулю, то уравнения (4.10) эквивалентны уравнениям Максвелла с током зарядов. Действительно, если $J_{\mu\nu\lambda} = 0$, $J_\mu \neq 0$, то это очевидно, а для $J_{\mu\nu\lambda} \neq 0$, $J_\mu = 0$, достаточно вспомнить, как были получены уравнения (3.7).

С другой стороны, уравнение $PU=0$, очевидно, может описывать нейтрино.

Расписывая в компонентах уравнение $PV=0$, получим

$$P_\sigma f^{\sigma\mu\nu} + P^\mu f^\nu - P^\nu f^\mu = 0, \quad P_\sigma f^\sigma = 0,$$

$$P_\mu f_{\nu\lambda\sigma} - P_\nu f_{\lambda\sigma\mu} + P_\lambda f_{\sigma\mu\nu} - P_\sigma f_{\mu\nu\lambda} = 0. \qquad (4.11)$$

Вводя тензорный ток

$$J^{\mu\nu} = P^\nu f^\mu - P^\mu f^\nu,$$

запишем уравнения (4.11) в форме

$$P_\sigma f^{\sigma\mu\nu} = J^{\mu\nu};$$

$$P_\mu f_{\nu\lambda\sigma} - P_\nu f_{\lambda\sigma\mu} + P_\lambda f_{\sigma\mu\nu} - P_\sigma f_{\mu\nu\lambda} = 0. \qquad (4.12)$$

Уравнения (4.12) - это уравнения (4.7) с током, определенным выше. Как и в случае уравнения $PU=0$, следует отметить, что уравнение $PV=0$ также может описывать нейтрино.

Из частных случаев уравнения (2.4) с неравной нулю массой нетривиальными являются следующие:

$$P_\sigma f^\sigma - mc f_0 = 0,$$

$$P^\mu f_0 - mc f^\mu = 0 \quad -$$

уравнения Прока для скалярного поля;

$$P_\sigma f^{\sigma\mu} - mc f^{\mu} = 0 ,$$

$$P^{\mu} f^{\nu} - P^{\nu} f^{\mu} - mc f^{\mu\nu} = 0 \ -$$

уравнения Прока для векторного поля;

$$P_\sigma f^{\sigma\mu\nu} - mc f^{\mu\nu} = 0 ,$$

$$P^{\mu} f^{\nu\lambda} + P^{\nu} f^{\lambda\mu} + P^{\lambda} f^{\mu\nu} - mc f^{\mu\nu\lambda} = 0 \ -$$

уравнения в форме Прока для бивекторного поля;

$$P_\sigma f^{\sigma\mu\nu\lambda} - mc f^{\mu\nu\lambda} = 0 ,$$

$$P^{\sigma} f^{\mu\nu\lambda} - P^{\mu} f^{\nu\lambda\sigma} + P^{\nu} f^{\lambda\sigma\mu} - P^{\lambda} f^{\sigma\mu\nu} - mc f^{\sigma\mu\nu\lambda} = 0 \ -$$

уравнения в форме Прока для поля 3-вектора (аксиального вектора).

Выполняя приятный долг, приношу в заключение глубокую благодарность Н.А. Черникову за постоянное внимание к работе, полезные обсуждения и ценные советы.

Литература

1. Д.А. Уилер. В сб. Гравитация, нейтрино и вселенная, ИЛ, 1962.
2. B.F. Touschek. Nuovo Cimento, 5, 1281 (1957);
   A. Salam. Nuovo Cimento, 5, 299 (1957).
3. M. Sachs, S.L. Schebel. Journal of Math.Phys., 3, 843 (1962).

4. В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов. ЯФ, 4, вып. 1, 216 (1966).

Рукопись поступила в издательский отдел
28 апреля 1971 года.