

8/21-71

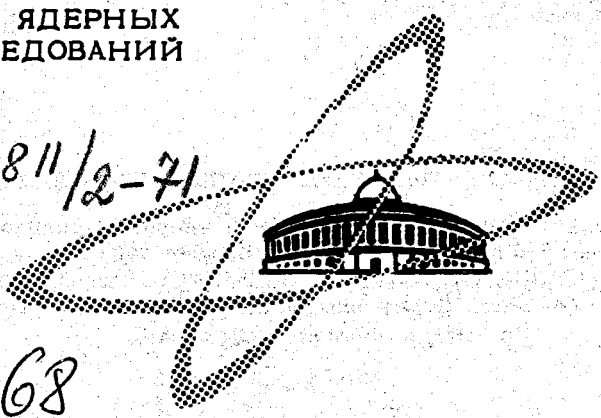
Б-246

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна.

1811/2-71

P2 - 5768



5768

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Б.М. Барбашов, В.В. Нестеренко

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ  
И РЕДЖЕ-ЭЙКОНАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ  
АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ

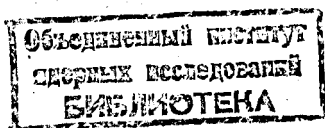
1971

P2 - 5768

Б.М. Барбашов, В.В. Нестеренко

**ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ  
И РЕДЖЕ-ЭЙКОНАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ  
АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ**

Направлено в ТМФ



Эйкональное представление амплитуды рассеяния успешно используется для описания высокоэнергетических процессов<sup>/1/</sup>. Теоретическим обоснованием этого в полевом подходе служит возможность представить в эйкональной форме сумму диаграмм лестничного типа с одностичным обменом<sup>/2/</sup>. Однако при этом не учитывается вклад в упругую амплитуду неупругих процессов, которые, как известно, становятся существенными при высоких энергиях. Для такого учёта необходимо рассматривать обмен более сложными комплексами, чем виртуальная частица. В работах<sup>/3-6/</sup> в рамках скалярной теории и электродинамики рассматривались всевозможные лестничные диаграммы с так называемым "многобашенным обменом" (см. рис. 1).

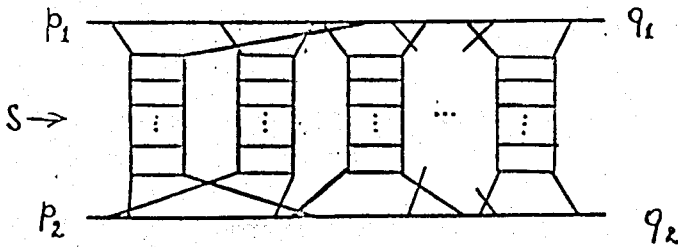


Рис. 1

Для суммирования таких диаграмм при  $s = (p_1 + p_2)^2 \rightarrow \infty$  и  $t = (p_1 - q_1)^2 = \text{const}$  применялась техника "системы отсчёта бесконечного импульса"<sup>/7/</sup>. При этом в теории  $g\phi^3$  для амплитуды было получено редже-эйкональное

представление. Возможность объяснения экспериментальных данных по адронным взаимодействиям на основе такого представления амплитуды рассеяния обсуждалась рядом авторов<sup>/8/</sup>. В данной работе мы хотим показать эффективность использования метода функционального интегрирования при суммировании диаграмм типа показанной на рис. 1. Этот метод позволяет получить в замкнутом аналитическом виде вклад рассматриваемого класса диаграмм в амплитуду рассеяния. Поэтому не возникает проблемы отбора нужных диаграмм и рассмотрения всевозможных конфигураций в расположении итерлируемых  $t$ -лестниц. Расчет проведем в рамках простой скалярной модели  $g\psi^2\phi$ , а функциональные интегралы будем оценивать в приближении прямолинейных путей<sup>/9/</sup>, которое эффективно применялось уже для изучения высокоэнергетических процессов. В конце работы кратко обсудим математическую обоснованность применения такого подхода к данной задаче.

Изложим основные пункты функционального метода в приближении прямолинейных путей. Вначале, как обычно, построим 2-частичную функцию Грина  $G(x_1, x_2 | x_3, x_4)$ , а затем, переходя на массовую поверхность, получим амплитуду рассеяния.

$$G(x_1, x_2 | x_3, x_4) = C_\phi \int \delta\phi \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d\xi d\xi' \phi(\xi) D^{-1}(\xi, \xi') \phi(\xi') \right\} \cdot \\ \cdot [G(x_1, x_3 | \phi) G(x_2, x_4 | \phi) + (x_3 \rightarrow x_4)] S_0(\phi). \quad (1)$$

$S_0(\phi)$ , среднее значение  $S$ -матрицы по вакууму во внешнем классическом поле  $\phi$ , может быть представлено в виде<sup>/10/</sup>

$$S_0(\phi) = \exp \{ i\Pi(\phi) \}. \quad (2)$$

$\Pi(\phi)$  в формуле (2) соответствует вакуумным диаграммам Фейнмана. Одночастичные функции Грина  $G(x, y | \phi)$  с помощью функционального интеграла записываются следующим образом<sup>/11/</sup>:

$$G(x, y | \phi) = i \int_0^{\infty} ds e^{-ism^2} \int [\delta^4 \nu]_0^s \exp \left\{ ig \int_0^s d\xi \phi(x - 2 \int_{\xi}^s \nu(\eta) d\eta) \right\} \cdot \delta^{(4)} \left( x - y - 2 \int_0^s \nu(\eta) d\eta \right), \quad (3)$$

где введено обозначение:

$$[\delta^4 \nu]_a^b \equiv \frac{\delta^4 \nu \exp \left\{ -i \int_a^b \nu^2(\eta) d\eta \right\}}{\int \delta^4 \nu \exp \left\{ -i \int_a^b \nu^2(\eta) d\eta \right\}}$$

Подставив (3) и (2) в (1), произведем сдвиг в функциональном пространстве  $\{\phi(x)\}$ :

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + g \int dz J(z) D(z-x),$$

причем  $J$  выражается суммой "нуклонных" токов в этой модели:

$$J(z) = j_1(z) + j_2(z), \quad (4)$$

$$j_k^{(a,b)}(z) = \int_a^b d\xi \delta^{(4)}(z - x_k + 2 \int_{\xi}^a \nu_k(\eta) d\eta) \quad (k=1,2).$$

В результате для 2-частичной функции Грина получим выражение

$$G(x_1, x_2 | x_3, x_4) = \prod_{j=1}^2 \left( i \int_0^{\infty} ds_j e^{-ism_j^2} \int [\delta^4 \nu_j]_0^{s_j} \delta^{(4)} \left( x_j - x_{j+2} - 2 \int_0^{s_j} \nu_j(\eta) d\eta \right) \right) \cdot C_{\phi} \int \delta \phi \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int \phi(\xi) D^{-1}(\xi, \xi') \phi(\xi') d\xi d\xi' + \frac{ig^2}{2} \int J(z) D(z-x) J(x) dz dx + i \Pi \left( \phi(x) + g \int J(z) D(z-x) dz \right) \right\}. \quad (5)$$

Положим  $\phi(x)$  в поляризационном члене  $\Pi$  равным нулю. Тем самым не будет учитываться самообрастание замкнутых петель и их связь друг с другом, т.е. графы типа приведенных на рис. 2<sup>/12/</sup>.

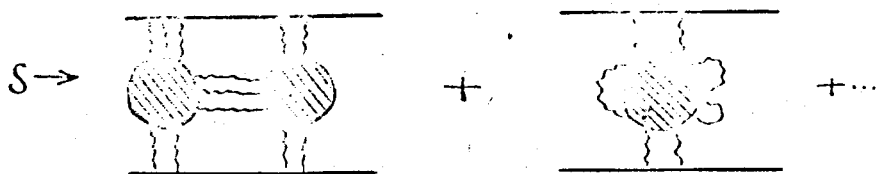


Рис. 2

Теперь интегрирование по  $\delta\phi$  легко выполняется, т.к. получен гауссовский интеграл.

Переход на массовую поверхность производится, как и в работе<sup>/13/</sup>. Так как мы хотим просуммировать диаграммы типа приведенной на рис. 1, то достаточно ограничиться в поляризационном члене  $\Pi$  замкнутыми "нуклонными" блоками лишь с четырьмя внешними "мезонными" линиями. Окончательно выражение для амплитуды рассеяния (без учета радиационных поправок к "нуклонным" линиям) принимает вид

$$\begin{aligned}
 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) f(q_1, q_2 | p_1, p_2) = & (-i)^2 \prod_{\ell=1}^2 \left( \int d^4 \nu_\ell \right)_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^4 y_\ell}{(2\pi)^4} e^{i(p_\ell - q_\ell) y_\ell} \cdot \\
 \cdot \{ & i g^2 D(y_1 - y_2) + i g^4 \prod_{j=1}^4 \int d^4 x_j d^4 z_1 d^4 z_2 D(y_1 - x_1) j_1(z_1) D(z_1 - x_2) D(y_2 - x_3) \cdot \\
 & \cdot j_2(z_2) D(z_2 - x_4) M(x_1, x_2, x_3, x_4) \} \int_0^1 d\lambda \exp \{ i g^2 \lambda \int d z_1 d z_2 j_1(z_1) D(z_1 - z_2) j_2(z_2) + \\
 + & i g^4 \lambda \int \prod_{k=1}^4 (d^4 x_k d z_k) j_1(z_1) D(z_1 - x_1) j_1(z_2) D(z_2 - x_2) j_2(z_3) D(z_3 - x_3) \cdot \\
 & \cdot j_2(z_4) D(z_4 - x_4) M(x_1, x_2, x_3, x_4) \},
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

где токи  $j_k(z)$  задаются формулой

$$j_k(z, \xi_\ell) \equiv j_k^{(-\infty, +\infty)}(z, \xi_\ell | \nu_k(\eta), y_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_\ell \delta^{(4)}(z - y_k - 2 \int_0^{\xi_\ell} \nu_k(\eta) d\eta + 2 \xi_\ell (p_k \theta(-\xi_\ell) + q_k \theta(\xi_\ell))) \quad (7)$$

$$(k = 1, 2; \ell = 1, 2, 3, 4),$$

а  $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$  - любая диаграмма "мезон-мезонного" взаимодействия с четырьмя внешними линиями. В дальнейших расчётах во всех токах положим  $p_k = q_k$  ( $k=1, 2$ ) и опустим функциональные переменные  $\nu_k(\eta)$ , что соответствует прямолинейному пути "нуклонов" в функциональном подходе, или - на языке диаграмм Фейнмана - отбрасыванию квадратичных по виртуальным импульсам членов в пропагаторах горизонтальных "нуклонных" линий на рис. 1. В качестве  $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$  возьмем "лестницу" в  $t$ -канале (рис. 3).

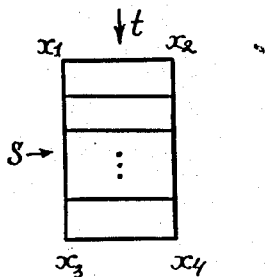


Рис. 3

Перейдем в систему центра масс <sup>/13/</sup> и исследуем выражение, стоящее в показателе последней экспоненты в формуле (6), которое приводит к эйконоальной фазе  $\chi$ . Подставив (7) в (6), сделаем следующие замены переменных <sup>/12/</sup>:

$$x_i \rightarrow x_i + \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (8)$$

$$\xi_j \rightarrow \xi_j + \eta_1 \quad (j = 1, 2), \quad \xi_k \rightarrow \xi_k + \eta_2 \quad (k = 3, 4);$$

где

$$\eta_1 = \frac{1}{4pp_0} (p_0 b_z + p b_0), \quad \eta_2 = \frac{1}{4pp_0} (p_0 b_z - p b_0), \quad b = y_1 - y_2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} X_n = & g^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha_1 d\alpha_2 D(b_{\perp} - 2\alpha_1 p_1 + 2\alpha_2 p_2) + \\ & + g^4 \prod_{i=1}^4 \int d^4 x_i \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_j D\left(\frac{b_{\perp}}{2} - 2\xi_1 p_1 - x_1\right) D\left(\frac{b_{\perp}}{2} - 2\xi_2 p_1 - x_2\right) \cdot \\ & \cdot D\left(-\frac{b_{\perp}}{2} - 2\xi_3 p_2 - x_3\right) D\left(-\frac{b_{\perp}}{2} - 2\xi_4 p_2 - x_4\right) M_n(x_1, x_2, x_3, x_4). \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, эйкональная фаза теперь зависит только от поперечных компонент разности  $(y_1 - y_2)_{\perp} = b_{\perp}$ .

Первое слагаемое в (9), соответствующее обмену одним виртуальным квантом, легко приводится к виду  $+\frac{g^2}{2\pi s} K_0(m|\vec{b}_{\perp}|)$ , т.е. имеет форму эйкональной фазы от потенциала Юкавы<sup>1/2/</sup>. Второму слагаемому в (9) можно сопоставить диаграмму Фейнмана (с дополнительным множителем  $e^{-i\vec{q}_{\perp} \vec{b}_{\perp}}$ ), представленную на рис. 4.

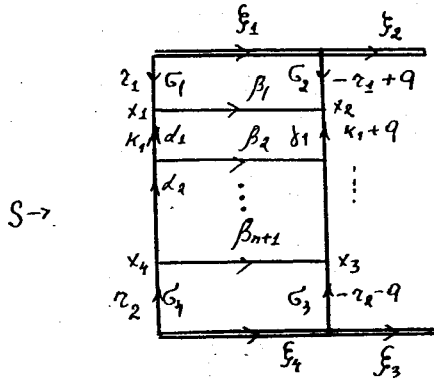


Рис. 4



Двойным линиям на этой диаграмме соответствует не обычный пропагатор Фейнмана, а линеаризованный, с отброшенными  $k_1, k_2$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2ikp_j \xi - \epsilon |\xi|} d\xi = i \left[ \frac{1}{2kp_j + i\epsilon} - \frac{1}{2kp_j - i\epsilon} \right] = 2\pi \delta(2kp_j),$$

где  $k$  - импульс, протекающий через двойную линию ( $j=1$  для верхних линий,  $j=2$  для нижних линий). Интегрирование по  $d\xi$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  автоматически учитывает всевозможные зацепления "лестничных ног", в диаграммной технике требуется проводить суммирование по различным расположениям итерированных "лестниц".

Вначале выполним интегрирование по  $d\xi_1$  и  $d\xi_2$ . Из-за возникших  $\delta$ -функций получим  $q_0 = q_z = 0$  и множитель  $\frac{1}{s}$ . Переходя к  $\alpha$ -представлению Фейнмана, проинтегрируем по всем виртуальным импульсам, кроме  $d^2 q_{\perp}$ . Тогда вклад от диаграммы рис. 4 можно представить в виде

$$X_n = \frac{g^{2(n+3)}}{s(8\pi)^3} \prod_{j=1}^n \int_0^{\infty} (d\alpha_j d\gamma_j) \prod_{k=1}^{n+1} (d\beta_k) \prod_{l=1}^{+\infty} \int_0^{\infty} (d\xi_l d\sigma_l) \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{e^{-i\vec{q}_{\perp} \vec{b}_{\perp}}}{C^2} \cdot \exp \left\{ i \frac{D(s, \alpha)}{C(\alpha)} \right\}. \quad (10)$$

$D(s, \alpha)$  в (10) имеет вид

$$D(s, \alpha) = \xi_1 \xi_2 \prod_{j=1}^{n+1} \beta_j s + d(\alpha). \quad (11)$$

Интегрирование по  $d\xi_k$  можно заменой переменных свести к пределам  $(0, +\infty)$ :

$$X_n(s) = \frac{g^{2(n+3)}}{s} \int_0^{\infty} \frac{d\alpha d\beta d\gamma d\sigma d\xi}{C^2(\alpha)} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} e^{-i\vec{q}_{\perp} \vec{b}_{\perp}} \left\{ e^{i \frac{\xi_1 \xi_2 \prod_{j=1}^{n+1} \beta_j s}{C}} + e^{-i \frac{\xi_1 \xi_2 \prod_{j=1}^{n+1} \beta_j s}{C}} \right\} e^{i \frac{d(\alpha)}{C(\alpha)}}. \quad (12)$$

При  $s \rightarrow \infty$  главный вклад будет давать область интегрирования, где  $\beta_j \approx 0$ ,  $\xi_1 \approx 0$ . В этом случае  $d(a)$  и  $C(a)$  легко находятся. Асимптотику выражения (12) легко получить, используя преобразование Меллина, применявшееся в работах <sup>/15/</sup>.

$$\chi_n(s)_{s \rightarrow \infty} = \frac{g^{2(n+3)}}{s} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} e^{-i\vec{q}_\perp \vec{b}_\perp} \left[ \frac{(\ln s)^{n+2}}{s} + \frac{(\ln(-s))^{n+2}}{-s} \right] \frac{[f(q_\perp^2)]^{n+2}}{(n+2)!}, \quad (13)$$

где

$$f(q_\perp^2) = \frac{g^2}{(8\pi)^3} \int \frac{d^2 k}{(k^2 + m^2) [(k-q)_\perp^2 + m^2]}.$$

Просуммируем  $\chi_n$  по всем  $n$ . Это будет соответствовать учёту диаграмм рис. 1 с любым числом ступеней у обменных лестниц.

$$\sum_n \chi_n(s) = \frac{g^2}{s} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} e^{-i\vec{q}_\perp \vec{b}_\perp} \left[ s^{\alpha(q_\perp^2)} + (-s)^{\alpha(q_\perp^2)} \right],$$

где

$$\alpha(q_\perp^2) = -1 + f(q_\perp^2). \quad (14)$$

Такое суммирование не является достаточно строгим в математическом отношении по следующим соображениям <sup>/16/</sup>. Константу взаимодействия  $g$  в рассматриваемой модели необходимо считать большой, т.к. в противном случае доминировали бы только полюсные диаграммы. Если же константа  $g$  велика, то нельзя ограничиться первым приближением по  $g^2$  для траектории Редже  $\alpha(q_\perp^2)$  и в функции вычета <sup>/17/</sup>. Следовательно, необходимо учитывать младшие логарифмические члены. Однако проблема эта представляется сложной <sup>/18/</sup>. Она не решена полностью даже в случае одной  $t$ -канальной лестницы.

Для выделения  $\delta$ -функции закона сохранения энергии-импульса и приведения к удобному виду выражения, стоящего в фигурных скобках перед интегралом по  $d\lambda$  в формуле (6), сделаем замену переменных:

$$y_1 + y_2 = x,$$

$$y_1 - y_2 = b_{\perp} + 2p_1 y_1 - 2p_2 y_2.$$

Интегрирование по  $d^4x$  дает необходимую  $\delta$ -функцию, а выражение в фигурных скобках оказывается равным  $s\chi$ . Теперь амплитуда рассеяния, соответствующая сумме диаграмм рис. 1, представляется в виде

$$f(q_1, q_2, p_1, p_2) = s \int d^2 b_{\perp} e^{-i \vec{b}_{\perp} \cdot (\vec{p}_1 - \vec{q}_1)} \exp \left\{ \frac{i g^2}{s} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} e^{-i \vec{q}_{\perp} \cdot \vec{b}_{\perp}} [s^{\alpha(q^2)} + (-s)^{\alpha(q^2)}] - 1 \right\} \quad (15)$$

Вопрос о том, насколько строг в математическом отношении данный подход, довольно сложен. Кроме проблемы учёта младших логарифмов, о которой говорилось выше, здесь можно отметить следующие трудности /16/. Прежде всего, не удастся строго доказать малость импульсов, протекающих по "ногам лестниц", и, следовательно, не доказана справедливость линеаризации пропагаторов, т.е. приближение  $k_{\perp} k_{\perp} = 0$  (или же прямолинейные пути в функциональных интегралах). Именно этот момент был существенен как в наших вычислениях в приближении прямолинейных путей, так и в рассуждениях других авторов /3,4,5/, поскольку эта линеаризация как раз и приводит к эйкональному представлению с фазой, зависящей от двумерного прицельного параметра. Если же не считать малыми импульсы  $k_{\perp}$ , втекающие в  $t$ -канальные лестницы, то легко видеть из проделанных расчётов, что эйкональная фаза будет зависеть от 4-мерного "прицельного параметра" (в этом случае не справедлива замена (8) и отбрасывание функциональной переменной). Однако, несмотря

на это, можно ожидать, что энергетическая зависимость существенно не изменится, если не пользоваться данным приближением, т.к. для получения логарифмических по  $s$  членов при итерировании  $t$ -канальных лестниц существенна не малость  $k_1$ , а неплюсый характер блоков 1 и 2 (они заштрихованы на рис. 5) /19/:

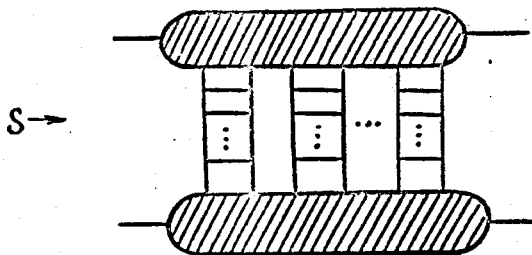


Рис. 5

Нерешенным вопросом является и то, что в рассматриваемом классе диаграмм всегда есть такие, асимптотика которых не зависит от числа "лестниц", которыми обменялись рассеивающиеся частицы /20/. Одна из таких диаграмм представлена на рис. 6.

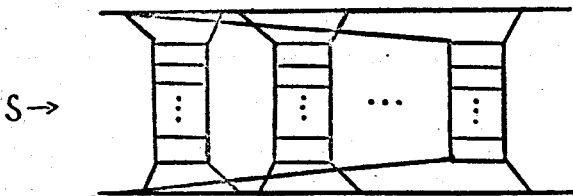


Рис. 6

Асимптотика этой диаграммы  $\frac{1}{s^3}$  не воспроизводится соответствующим членом ряда при разложении экспоненты в эйкональной формуле (15).

Аналогичная трудность имеет место и в случае простого одночастичного обмена, на что указывалось в работе /21/. Происходит ли взаимное сокращение при суммировании диаграмм типа приведенной на рис. 6 или же такое сокращение не имеет места - это остается пока открытым вопросом.

В заключение авторы считают своим долгом поблагодарить за интерес к работе и стимулирующие обсуждения Д.И. Блохинцева, А.Н. Тавкхелидзе, А.В. Ефремова, С.П. Кулешова, В.Н. Первушина, А.Н. Сисакяна.

#### Л и т е р а т у р а

1. J.D. Jackson. Rev.Mod.Phys., 42, 12 (1970).
2. Ч. Abarbanel and C. Itzykson. Phys.Rev.Lett., 23, 53 (1969).  
Б.М. Барбашов, С.П. Кулешов, В.А. Матвеев, А.Н. Сисакян. ТМФ, 3, 342 (1970).
3. S.J. Chang and P.M. Fishbane. Phys.Rev., D2, 1104 (1970).
4. S.J. Chang and T.M. Yan. Phys.Rev.Lett., 25, 1568 (1970).
5. B. Hasslacher, D.K. Sinclair, G.M. Cicutta and R.L. Sugar. Phys. Rev.Lett., 25, 1591 (1970).
6. H. Cheng and T.T. Wu. Phys.Rev.Lett., 24, 1457 (1970);  
H Cheng and T.T. Wu. Phys.Rev., D1, 2775 (1970).
7. S.J. Chang and S.K. Ma. Phys.Rev., 180, 1506 (1969).
8. S.C. Frautschi, C.J. Hamer and F. Ravndal. Phys.Rev., D2, 2681 (1970); C.J. Hamer and F. Ravndal. Phys.Rev., D2, 2687 (1970).
9. B.M. Barbashov, S.P. Kuleshov, V.A. Matveev, V.N. Pervushin, A.N. Sissakian and A.N. Tavkhelidze. Phys.Lett., 33B, 484 (1970).
10. A. Salam, P. Matthews. Phys.Rev., 90, 690 (1953).

11. Б.М. Барбашов. ЖЭТФ, 48, 607 (1965).
12. И.В. Андреев, И.А. Баталин. Препринт ФИАН №60, Москва, 1970.
13. B.M. Barbashov, S.P. Kuleshov, V.A. Matveev, A.N. Sissakian. JINR Preprint, E2-4692, Dubna, 1969.
14. R.J. Eden, P.V. Landshoff, D.I. Olive and J.C. Polkinghorne. The Analytic S-matrix, Cambridge, 1966.
15. А.В. Ефремов. Препринт ОИЯИ, Е-2125, Дубна, 1965;  
О.И. Завьялов. ЖЭТФ, 47, 1099 (1964).
16. H. Cheng and T.T. Wu. Preprint DESY 70/67 (1970).
17. T.L. Trueman and T. Yao. Phys.Rev., 132, 2741 (1963).
18. G. Tiktopoulos, and S.B. Treiman. "Does Multiple Reggeon Exchange Eikonalize?" (to be published).
19. R.C. Arnold. Phys.Rev., 153, 1523 (1967).
20. G.M. Cicuta, R.L. Sugar. Preprint report Number NYO-4204-6.
21. G. Tiktopoulos, S.B. Treiman. Preprint Princeton University, 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел

21 апреля 1971 года.