ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 5760

Л.Г. Заставенко

ЧАСТИЧНОЕ УСТРАНЕНИЕ ИНФРАКРАСНЫХ РАСХОДИМОСТЕЙ В МОДЕЛИ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ С ВЫРОЖДЕННЫМ ВАКУУМОМ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1971

§ 1. Введение

В работе[1] нами рассмотрено вырождение вакуума скалярного заряженного поля с самодействием

$$H' = g \int (\phi^*(x)\phi(x))^2 dx$$

в случае одной пространственной степени свободы. В согласии с теоремой Голдстоуна[2] квантовая теория поля с вырожденным вакуумом[1] содержит частицу нулевой массы покоя. Но присутствие такой частицы с необходимостью приводит к появлению инфракрасных расходимостей. В настоящей работе рассматриваются расходимости, возникающие в указанной выше модели при подсчёте средних значений по состоянию физического вакуума. Такие расходимости устраняются изложенным ниже приемом. Мы, однако, не утверждаем, что этот прием достаточен для устранения всех инфракрасных расходимостей, возникающих при подсчёте S-матрицы.

1.1. Рассмотрим в качестве примера подсчёт среднего значения функции

$$f(k) = \psi_2(k)\psi_2(-k) \tag{1}$$

по состоянию физического вакуума. От переменных $\phi_1(k)$, $\phi_2(k)$, входящих в формулу (2) работы [1], удобно перейти к переменным ρ, θ, $\psi_1(k)$, $\psi_2(k)$, $k \neq 0$, по формулам

$$\begin{aligned}
&\phi_1(0) = \rho\cos\theta, \\
&\phi_2(0) = \rho\sin\theta, \\
&\left.\begin{aligned}
&\phi_1(k) = \cos\theta\,\psi_1(k) - \sin\theta\,\psi_2(k), \\
&\phi_2(k) = \sin\theta\,\psi_1(k) + \cos\theta\,\psi_2(k)
\end{aligned}\right\} \quad k \neq 0
\end{aligned} \tag{2}$$

(см. пункт 2.5 работы [1]). Тогда для функционала основного состояния Ω_0,

$$\Omega_0 = e^{-\kappa}, \tag{3}$$

получаем представление

$$\kappa = \int a_{20}(k)\psi_1(k)\psi_1(-k)dk + \int a_{02}(k)\psi_2(k)\psi_2(-k)dk +$$

$$+ \int \sum_{n+m \geq 3} C_{nm}(p_1, p_2, \dots, p_n; q_1, q_2, \dots q_m) \prod_1^n (\psi_1(p_i) d p_i)$$

$$\prod_1^m (\psi_2(q_j) d q_j) \delta(\Sigma p_i + \Sigma q_j), \tag{4}$$

где функции a_{20}, a_{02}, C_{nm} определены уравнениями (7), (8) той же работы. В (4) следует:

1) заменить интегралы интегральными суммами, например,

$$\int a_{20}(k)\psi_1(k)\psi_1(-k)\,dk \to h \sum_i a_{20}(k_i)\psi_1(k_i)\psi_1(-k_i);$$

2) считать $\psi_2(0) = 0$, $\psi_1(0) = \rho - \beta/h$ в соответствии с (2). См. также формулу (3) работы /1/. Тогда норма функционала основного состояния представится в виде

$$(\Omega_0, \Omega_0) = \int e^{-2\kappa} \rho\, d\rho\, d\theta \prod_{k \neq 0} d\psi_1(k)\; d\psi_2(k) =$$

$$= \frac{\beta}{h} \int e^{-2\kappa} d\tau + \int e^{-2\kappa} \psi_1(0)\, d\tau . \tag{5}$$

Подсчёт двух последних членов (5) проводится аналогично, и мы в дальнейшем будем считать, что норма функционала основного состояния определяется лишь (главным при $\beta \to \infty$) первым членом правой части (5). Тогда величина $\bar{f}$ (черта сверху обозначает усреднение по основному состоянию) равна

$$\bar{f} = \int e^{-2\kappa}\psi_2(k)\,\psi_2(-k)\,d\tau \,/\, \int e^{-2\kappa}\,d\tau .$$

Согласно правилам, данным в работе [3],

$$\bar{f}(k) = \frac{1}{2b(k)h} - \sum_{k_1} \frac{h^3 C_{04}(k,-k,k_1-k_1)}{[2h\,b(k)]^2\,2hn(k_1)}\,\frac{6\cdot 2}{1!} -$$

$$- \sum_{k_1}\left(\frac{h^3 C_{22}(k_1,-k_1;k,-k)}{[2hb(k)]^2\,2h\,a(k_1)}\,\frac{2}{1!} - \frac{h^4 C_{30}(k_1,-k_1,0)C_{12}(0;k,-k)}{2h\,a(0)\,2ha(k_1)[2hb(k)]^2}\,\frac{3\cdot2\cdot2}{2!}\right) +$$

$$\tag{6}$$

$$+ \sum_{k_1}\left(\frac{C_{12}(0\;;k_1-k_1)\,C_{12}(0;k,-k)h^4\,2\cdot 2}{2h\,a(0)2hb(k_1)[2hb(k)]^2\quad 2!} + \frac{C_{12}(x;k_1,k)\,C_{12}(-x;-k_1,-k)h^4\,4\cdot 2}{2h\,a(x)\,2h\,b(x_1)[2hb(k)]^2\;2!}\right) +$$

$$+ \sum_{k_1,k_2} \frac{h^6 C_{04}(k,k_1,k_2,k_3)\,C_{04}(-k,-k_1,-k_2,-k_3)}{[2hb(k)]^2\;2hb(k_1)2hb(k_2)2hb(k_3)}\,\frac{2\cdot 4\cdot 4\cdot 3!}{2!} +$$

$$+ \ldots ;$$

здесь мы воспользовались следующими обозначениями, кроме введенных в [1]:

$$a_{20}(k) = a(k),$$

$$a_{02}(k) = b(k);$$

первый член в (6) определяется интегралом

$$\int \exp[-2\kappa_{20} - 2\kappa_{02}]\psi_2(k)\psi_2(-k)\,dr,$$

остальные - интегралом

$$\int \exp[-2\kappa_{20} - 2\kappa_{02}][-\frac{\kappa_{04}+\kappa_{22}}{1!} + \frac{(\kappa_{30}+\kappa_{12})^2}{2!} + \frac{(\kappa_{04})^2}{2!}]\,dr, \qquad (7)$$

где $\kappa_{n,m}$, $n=0,1,2,\ldots, m=0,2,4,\ldots$, - однородные степени $n(m)$ по переменным $\psi_1(\psi_2)$ части функционала κ.

Численные коэффициенты в (6) определяются на основании следующих соображений:

а) факториалы в знаменателе возникают от разложения экспоненты;

б) фактор 2 в члене $C_{30}C_{12}$ происходит от разложения $(\kappa_{30}+\kappa_{12})^2$ по формуле бинома Ньютона;

в) в остальном численный коэффициент определяется числом различных спариваний, возникающих при подсчёте интеграла (7) (см. [3], пункт 2.7). Согласно формуле п. 2.4 работы [1] $b(0) = 0$ (в низшем порядке теории возмущений $b(k) = k$), поэтому интегралы по k_1 в (6), содержащие в знаменателе $b(k_1)$, расходятся.

§ 2. Устранение расходимостей

Мы утверждаем, что если учесть не только диаграммы, входящие в (6), но также некоторый определяемый ими бесконечный класс диаграмм, то расходимости исчезнут.

2.1. Для начала мы рассмотрим лишь совокупность диаграмм, определяемую частью κ_{04} функционала κ. Вклад этой совокупности в $\bar{f}(k)$, очевидно, равен:

$$
\overline{f_{04}(k)} = \int \psi_2(k)\,\psi_2(-k)\, e^{-2(\kappa_{20}+\kappa_{02})}\, d\tau \sum_0^{\infty} \frac{(-)^n}{n!}\,\kappa_{04}^n \Big/ \int e^{-2(\kappa_{02}+\kappa_{20})}\, d\tau \sum \frac{(-)^n}{n!}\,\kappa_{04}^n \,. \tag{8}
$$

Диаграмматически каждому фактору κ_{04} следует поставить в соответствие группу из четырех точек, каждому спариванию – линию, соединяющую две точки. Эти две точки могут принадлежать либо к одному и тому же фактору κ_{04} (к одной группе), либо к разным факторам (к различным группам). Линию, соединяющую разные группы, мы будем называть длинной, линию, соединяющую две точки одной группы, – короткой. Из всей совокупности связных диаграмм, входящих в n-ый член разложения (8), мы рассмотрим лишь такие диаграммы, в которых некоторые две точки каждого из факторов κ_{04} связаны (короткой) линией. Заметим, что короткую линию в данной группе возможно провести шестью различными способами. После установления коротких линий в каждой группе κ_{04}

остается две свободные точки; всякая связная[x/] диаграмма, отвечающая n-му члену (8), имеет вид цепочки из групп точек, связанных длинными линиями; цепочка начинается линией, соединяющей первую группу с $\psi_2(k)$, и кончается линией, соединяющей последнюю группу с $\psi_2(-k)$. Число различных диаграмм такого вида равно, очевидно, $2^n n!$; здесь $n!$ - число возможных перестановок факторов κ_{04} вдоль цепочки, 2 - число способов подсоединения длинных линий к двум свободным точкам данной группы. Таким образом, сумма рассмотренной совокупности диаграмм равна

$$
\overline{{}_1 f_{04}(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-12)^n \frac{1}{2hb(k)} \left[\int \frac{dk_1 C_{04}(k,-k,k_1-k_1)}{2b(k)2b(k_1)} \right]^n =
$$

$$
= \frac{1}{h} \left[2b(k) + 12 \int \frac{ak_1}{2b(k_1)} C_{04}(k,-k,k_1,-k_1) \right]^{-1} . \tag{9}
$$

Расширим теперь приведший к (9) класс диаграмм: представим число n в (8) в виде

$$
n = m + n_1 + n_2 \dots + n_m ,
$$

где $m, n_1, n_2 \dots$ - неотрицательные целые числа. Разобьем κ_{04}^n на произведения

[x/] Напомним, что в (6) следует учитывать только связные диаграммы ([3], пункт 2.7).

$$\kappa^{n}_{04}=\kappa^{m}_{04}(\kappa_{04})^{n_1}(\kappa_{04})^{n_2}\dots(\kappa_{04})^{n_m}.$$

Если для данного i, $i=1,2\dots m$, $n_i>0$, составим из $\kappa^{n_i}_{04}$ цепочку наподобие рассмотренных выше, из которой глядят наружу только две свободные точки начала и конца цепочки. Далее в i-м множителе κ_{04} из числа κ^{m}_{04} разорвем бывшую короткую линию и заменим ее на две длинных, соединяющих данный множитель κ_{04} со свободными точками множителя $\kappa^{n_i}_{04}$. Суммируя по всем неотрицательным значениям $m, n_1, n_2, \dots n_m$, получаем для расширенной совокупности диаграмм представление

$${}_2f_{04}(k)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-12)^m}{2hb(k)}\Big[\int\frac{dk_1\,C_{04}(k,-k,k_1,-k_1)}{2b(k)2b(k_1)}$$

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-12)^n\int\frac{dk_2C_{04}(k_1,-k_1,k_2,-k_2)}{2b(k_1)2b(k_2)}\Big)^n\Big]^m=$$

$$=h^{-1}\{2b(k)+12\int dk_1C_{04}(k,-k,k_1,-k_1)\,[2b(k_1)+$$

$$+12\int\frac{dk_2}{2b(k_2)}C_{04}(k_1,-k_1,k_2,-k_2)]^{-1}\}^{-1}.$$

Дальнейшее продолжение описанной процедуры, очевидно, дает для суммы соответствующего класса диаграмм:

$$
{}_{\infty}\overline{f}_{04} = \frac{1}{[2b(k)+\eta(k)]h} . \tag{10}
$$

Здесь $\eta(k)$ - функция, определенная интегральным уравнением

$$
\eta(k) = 12 \int \frac{dk_1 \, C_{04}(k,-k,k_1,-k_1)}{2b(k_1)+\eta(k_1)} . \tag{11}
$$

2.2. Таким образом, получаем:

$$
\overline{f}_{04} = \frac{1}{[2b(k)+\eta(k)]h} +
$$

$$
+ \frac{2\cdot 3!4\cdot 4}{2!h[2b(k)]^2} \int \frac{C_{04}^2(k,k_1,k_2,k_3)dk_1 dk_2 dk_3 \, \delta(k+k_1+k_2+k_3)}{2b(k_1)2b(k_2)2b(k_3)} + \tag{12}
$$

$+ \ldots$

Выбирая из правой части (12) надлежащую последовательность диаграмм, приводим (12) к виду

$$
\overline{f}_{04} = \frac{1}{[2b(k)+\eta(k)]h} + \frac{2!3!4\cdot 4}{2!h[2b(k)+\eta(k)]^2}
$$

$$\int \frac{C_{04}^2(k,k_1,k_2,k_3)\,dk_1 dk_2\, dk_3\ \delta(k+k_1+k_2+k_3)}{\prod\limits_{i=1}^{3}[2b(k_i)+\eta(k_i)]}+\ldots \quad (13)$$

Здесь точки обозначают соответственно уменьшенную по сравнению с совокупностью диаграмм, обозначенной точками в (12), совокупность диаграмм.

2.3. Из формул (20), (21) работы /3/ и формулы (11) следует x/, что

$$\eta(k) = 0\left(\frac{\ln\beta}{\beta}\right) \qquad \text{при} \quad \beta\to\infty\ . \qquad (14)$$

Отсюда легко убедиться, что отношение второго члена в (13) к первому есть величина порядка β^{-2} равномерно по k ; для следующих членов в (13) получаем аналогичные оценки. Таким образом, формула (13) дает разложение $\overline{f}_{04}$ при $\beta\to\infty$; все члены этого разложения, в отличие от исходной формулы (6), конечны.

2.4. Ранее мы рассматривали члены с C_{04} как единственный источник расходимостей в (6). В действительности остальные члены в (6) тоже дают расходимости. Чтобы избавиться от них, необходимо расширить по сравнению с п.2.1–3 множество учитываемых диаграмм. Мы не будем проводить здесь всю эту процедуру, а приведем лишь ее результат: как и в (13), имеем

---

x/ Функция $C_{04}(k_1,k_2,k_3,k_4)$, как и все функции $C_{0m}(k_1,k_2,\ldots k_m)$, ограничена, когда все ее аргументы равны нулю; это свойство является нетривиальным, поскольку функции C_{0m} определены уравнениями вида

$$\sigma_m C_{0m}(k_1,k_2,\ldots k_m) = A_m(k_1,k_2,\ldots k_m),$$

где $\sigma_m(0,0,\ldots 0) = 0$ и равенство $A_m(0,0,\ldots 0)=0$ не очевидно.

$$\overline{f}(k) = \frac{1}{h(2b(k)+\eta(k))} + \tag{15}$$

$$+ \frac{2\cdot 4\cdot 4\cdot 3!}{h2![2b(k)+\eta(k)]^2} \int \frac{C_{04}^2(k_1 k_2 k_3 k)\,\delta(k_1+k_2+k_3+k)\,dk_1 dk_2\,dk_3}{\prod_1^3 (2b(k_i)+\eta(k_i))} + \ldots$$

Функция $\eta(k)$ на этот раз определяется более сложным уравнением

$$\eta(k) = S(k) + \int \frac{Z(k,k_1)\,dk_1}{2b(k_1)+\eta(k_1)}\ . \tag{16}$$

Здесь

$$S(k) = 2\int \frac{C_{22}(k_1,-k_1;k,-k)}{2a(k_1)}\,dk_1 -$$

$$- 6\int \frac{C_{30}(k_1,-k_1,0)C_{12}(0;k,-k)\,dk_1}{2a(0)2a(k_1)}, \tag{17}$$

$$Z(k,k_1) = 12\,C_{04}(k,-k,k_1,-k_1) -$$

$$- 2\,C_{12}(0;k_1,-k_1)C_{12}(0;k\ -k)/(2a(0)) - \tag{18}$$

$$-4\,C_{12}^2(-k-k_1;k,k_1)/(2a(k+k_1)).$$

Нетрудно проверить, что разложение (15) по степеням η возвращает нас к (6).

2.5. Так как $b(0)=0$, то для применимости формул вида (15), (16) необходимо

$$\eta(0)>0. \qquad (19)$$

Принимая во внимание формулы (19), (20) работы /3/ и формулы пункта 2.3 работы /1/, получаем выражения:

$$Z(k_1,k_2)=\frac{\sqrt{8g}}{\beta}\Bigg[\frac{(k_1+k_2)^2+(|k_1|+|k_2|)^2\omega(k_1+k_2)}{(|k_1|+|k_2|)\,\omega(k_1+k_2)(|k_1|+|k_2|+\omega(k_1+k_2))^2}+$$

$$+\frac{2(k_1+k_2)^2(|k_1|+|k_2|)}{(|k_1|+|k_2|)\,\omega(k_1+k_2)(|k_1|+|k_2|+\omega(k_1+k_2))^2}+$$

$$+\frac{2|k_1k_2|}{(1+2|k_1|)(1+2|k_2|)(|k_1|+|k_2|)}\Bigg],$$

$$S(0)=-\frac{\sqrt{8g}}{\beta}\int\left[\frac{1}{8\,\omega(k_1)^2}+\frac{1}{8\,\omega(k_1)^4}\right]dk_1,$$

здесь $\omega(k)=\sqrt{1+k^2}$. Так как $Z(k,0)=0$ и $\eta(0)$ есть величина малая, то для выполнения условия (19) необходимо

$$\sqrt{\frac{8g}{\beta^2}}\,R \equiv S(0)+\frac{1}{2}\int Z(0,k_1)\,dk_1\,/\,k_1>0. \tag{20}$$

Подставив еще

$$Z(0,k_1)/k_1=\sqrt{8g/\beta^2}\cdot 2/[(k_1+\omega(k_1))\,\omega(k_1)], \tag{21}$$

находим

$$R=\int dk_1\left[\frac{1}{(\omega(k_1)+k_1)\,\omega(k_1)}-\frac{1}{2\,\omega(k_1)^2}-\frac{1}{8\,\omega(k_1)^2}\right]\equiv\int F(k_1)\,dk_1,$$

где

$$F(k_1)=[4\,\omega(k_1)^2(\omega(k_1)-k_1)^2-1]/[8\omega(k_1)^4].$$

Функция $\omega(k)[\omega(k)-k]$ монотонно убывает с ростом k и при $k=\infty$ имеет значение $1/2$. Отсюда вытекает неравенство $F(k)>0$ при $0\leqslant k<\infty$, из которого следует неравенство (20), которое, в свою очередь, влечёт (19).

2.6. Точное значение величины R равно

$$R=16+9\pi/2.$$

§ 3. Заключение

Пользуясь (22), (20) и (16), получаем следующее выражение для величины $\eta(0)$:

$$\eta(0) = \sqrt{\frac{8g}{\beta^2}}\ R\left(1 - \sqrt{\frac{2g}{\beta^2}}\ \ln\beta + \ldots\right).$$

Именно наличие здесь в правой части неаналитической зависимости от β^{-1} при $\beta^{-1} = 0$ является причиной расходимости интегралов в (6), что сделало необходимой настоящую работу (если бы интегралы в (6) сходились, го (6) давало бы разложение по степеням β^{-1}).

В заключение выражаю благодарность академику М.А. Маркову за интерес к работе.

Литература

1. Л.Г. Заставенко. Препринт ОИЯИ, Р2-4603, Дубна, 1969.
2. I. Goldstone, A. Salam, S. Weinberg. Phys. Rev., 127, 965 (1962).
3. Л.Г. Заставенко. Препринт ОИЯИ, Р2-4322, Дубна, 1969.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 апреля 1971 года.