СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 5759

Б.М. Зупник, В.И. Огиевецкий

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ КИРАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ ДЛЯ МЕЗОННЫХ СИСТЕМ И ТЕОРИЯ ТИПА ЯНГА-МИЛЛСА

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1971

Р2 - 5759

Б.М. Зупник, В.И. Огиевецкий

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ КИРАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ ДЛЯ МЕЗОННЫХ СИСТЕМ И ТЕОРИЯ ТИПА ЯНГА-МИЛЛСА

I. Анализ алгебраической реализации киральной симметрии для мезонов с $GP(-1)^J=+1$.

Вайнберг /I/ показал, что алгебраические аспекты киральной симметрии возникают из требования разумного асимптотического поведения амплитуды рассеяния вперед безмассовых пионов на произвольных частицах.

Однако из его работы непосредственно не следует применимость алгебраической реализации киральной симметрии (АРКС) к самим пионам и другим нестранным мезонам с $GP(-1)^J=+1$, т.е. к частицам, у которых G -четность совпадает с "нормальностью" $P(-1)^J$, где P - пространственная четность, а J -спин. Применение общего метода анализа асимптотики амплитуды рассеяния /I/ обосновано в тех случаях, когда графики процессов содержат не более двух пионных линий. В амплитуды упругого и неупругого рассеяния пионов на пионах и других мезонах с $GP(-1)^J=+1$ дают вклад контактные и полюсные диаграммы с 3 и 4 пионными линиями. Асимптотика таких графиков требует специального исследования, поскольку взаимодействия этих частиц с пионами в киральной динамике имеют специфические особенности. В общем анализе /I/ это не принимается во внимание. Тем не менее, формальное применение соотношений АРКС к состояниям A_1, ρ, π и σ мезонов со спиральностью $\lambda=0$ дает удовлетворительные результаты /I/.

Мы исследуем вопрос о применимости АРКС к мезонам с $GP(-1)^J=+1$. Целесообразно начать с перечисления основных предположений и результатов АРКС для общего случая /I/.

Вайнберг рассматривает в киральной динамике /2/ процесс рассеяния вперед $\pi_a(q)+\alpha(P,\lambda)\rightarrow\pi_b(q')+\beta(P',\lambda')$, где α и β -

любне частицы, a, b – изотопические индексы пионов, масса которых считается равной нулю. В коллинеарной системе отсчета $p_\mu=(p_0,-\vec{n}p)$, $p'_\mu=(p'_0,-\vec{n}p')$, $q_\mu=n_\mu\omega$, $q'_\mu=n_\mu\omega'$ $(|\vec{n}|=n_0=1)$ – суть 4-импульсы α, β, π_a и π_b соответственно, а λ и λ' – спиральности α и β. Законы сохранения дают равенства: $p_0+p=p'_0+p'=E$ и $\lambda=\lambda'$. Амплитуда рассеяния $\mathcal{M}_{\beta b,\alpha a}(\omega,\lambda)$ вычисляется в приближении деревьев из кирально-инвариантного лагранжиана.

Минимальная $\pi\pi\alpha\beta$ связь в киральной симметрии имеет следующий вид /1/:

$$2F_\pi^{-2}\vec{J}_\mu\cdot(\vec{\pi}\times\partial_\mu\vec{\pi}), \tag{1.1}$$

где $\vec{J}_\mu$ есть билинейная по α, β часть изотопического векторного тока, а $F_\pi\simeq 190\,Mev$ – пионная распадная константа. Это взаимодействие определяется единой для всех полей, кроме поля $\vec{\pi}$, формой ковариантной производной /2/ и дает вклад только в амплитуду с изоспином $T=1$ в t-канале:

$$8iF_\pi^{-2}(\omega+\omega')E\,\epsilon_{abc}(T_c)_{\beta\alpha}, \tag{1.2}$$

где T_c – матрица изоспина.

Взаимодействие пиона с двумя другими частицами α, β определяется выражением:

$$-F_\pi^{-1}\vec{J}_{5\mu}\cdot\mathcal{D}_\mu\vec{\pi}, \tag{1.3}$$

в котором $\vec{J}_{5\mu}$ есть билинейная по α,β часть аксиального векторного тока. Вводится матрица псевдовекторной связи $X_a(\lambda)$ /1/:

$$4E[X_a(\lambda)]_{\beta\alpha}\delta_{\lambda\lambda'}=(2\pi)^3(4p_0p'_0)^{1/2}n_\mu\langle p'\lambda'\beta|J^a_{5\mu}|p\lambda\alpha\rangle, \tag{1.4}$$

являющаяся формфактором тока $\vec{J}_{5\mu}$ при $(p-p')^2=0$.

Вайнберг требует, чтобы сумма всевозможных графиков-деревьев для рассеяния вперед $\pi+\alpha\to\pi+\beta$ вела себя при $\omega\to\infty$ не хуже, чем амплитуда в теории Редже.

Тогда из амплитуды с $T=1$ в t -канале получается соотношение /I/:

$$[X_a(\lambda), X_b(\lambda)] = i\epsilon_{abc}T_c, \tag{I.5}$$

восстанавливающее для состояний с определенной спиральностью классификацию по группе $SU_2\times SU_2$.

Амплитуда с $T=2$ в t -канале дает ограничения на массовый оператор m^2, который может быть записан в виде суммы скаляра и четвертой компоненты кирального вектора /I/:

$$m^2 = m_0^2 + m_4^2. \tag{I.6}$$

Нашей целью является получение соотношений АРКС для мезонных состояний с $\lambda=0$ и $GP(-1)^J=+1$.

Из-за трудностей анализа процесса рассеяния массивных пионов в работе /I/ рассматривается поведение амплитуды при $q^2 = q'^2 = 0$, $p^2=m_\alpha^2$, $p'^2=m_\beta^2$. В то же время при исследовании процессов рассеяния пионов на пионах и других мезонах с $GP(-1)^J=+1$ совсем не обязательно считать все пионы безмассовыми. Анализ асимптотики графиков, содержащих более двух пионных линий, удобно проводить вне массовой поверхности для рассеиваемых пионов $\pi_a(q)$ и $\pi_b(q')$. Мы будем вычислять амплитуду рассеивания вперед из лагранжиана для массивных пионов, а затем изучать ее асимптотическое поведение при $q_0, q_0'\to\infty$, $q^2=q'^2=0$, но на массовой поверхности для частиц мишени, в том числе и пионов. При таком рассмотрении мы пренебрегаем лишь массой рассеиваемых быстрых пионов. Это позволяет обойти технические трудности и получить соотношения АРКС для массивных пионов.

Рассмотрим процесс рассеяния пионов на пионах. В этом случае минимальное контактное взаимодействие может быть получено из пионного лагранжиана /3,4/:

$$\frac{1}{2}(\mathcal{D}_\mu\vec{\pi})^2=\frac{1}{2F_\pi^2}\left(\vec{J}^\pi_\mu\cdot\vec{J}^\pi_\mu+\vec{J}^\pi_{5\mu}\cdot\vec{J}^\pi_{5\mu}\right), \tag{1.7}$$

где $\mathcal{D}_\mu\vec{\pi}$ - ковариантная производная поля $\vec{\pi}$ /2/, а $\vec{J}^\pi_\mu = 2\vec{\pi}\times\partial_\mu\vec{\pi}+\ldots$ и $\vec{J}^\pi_{5\mu}=-F_\pi\partial_\mu\vec{\pi}+O(\pi^3)$ - векторный и аксиально-векторный токи для пионов. Это взаимодействие имеет более сложную структуру по сравнению с $\pi\pi\alpha\beta$ - связью (I.I), которая содержит лишь произведение билинейных по полям компонент векторных токов $\vec{J}_\mu$ и $\vec{J}^\pi_\mu$. Произведение $\vec{J}^\pi_{5\mu}\cdot\vec{J}^\pi_{5\mu}$ включает члены порядка π^4, не имеющие аналога в общем случае. Поэтому минимальная контактная амплитуда $\pi\pi$ -рассеяния, в отличие от амплитуды (I.2), переносит изоспин 0,I и 2.

Следует отметить, что в нашем анализе амплитуда рассеяния вне массовой поверхности для рассеиваемых пионов зависит от выбора полевых переменных, который определяется видом нелинейного кирального преобразования поля π /2/. Эта зависимость исчезает, если считать все пионы безмассовыми или рассматривать амплитуду на массовой поверхности для всех частиц. Мы будем проводить анализ в нелинейной σ -модели /3,7/.

Пион-пионное рассеяние при $m_\pi \neq 0$ связано также с нарушением киральной симметрии. Рассмотрим в нелинейной σ -модели эффективный лагранжиан, включающий минимальное $\pi\pi$ -взаимодействие (I.7) совместно с нарушением, имеющим трансформационные свойства изоскалярной компоненты представления $(N/2, N/2)$ /2/. Вычислим вне массовой поверхности для рассеиваемых пионов контактные амплитуды $\pi\pi$ рассеяния вперед в t -канале:

$$\mathcal{M}^{T=1}_{nb,ma} = -8 F_\pi^{-2}(\omega+\omega') E\, \epsilon_{abc}\, \epsilon_{ncm} \tag{I.8}$$

$$\mathcal{M}^{T=2}_{nb,ma} \backsim F_\pi^{-2} m_\pi^2 [N(N+2)-3] \tag{I.9}$$

где m, n - изотопические индексы мишени. Амплитуда рассматривается при $q^2 = q'^2 = 0$ и $p^2 = p'^2 = m_\pi^2$.

При выводе соотношений для m^2 (I.6) в АРКС существенно используется тот факт, что вклад контактного взаимодействия (I.I) в амплитуду с $T=2$ равен нулю. Для безмассовых пионов взаимодействие (I.7) также не дает вклада в контактную амплитуду $\pi\pi$ рассеяния с $T=2$. В случае $m_\pi \neq 0$ для получения соотношений АРКС следует потребовать, чтобы выражение (I.9) обращалось в нуль независимо от полюсной части амплитуды с $T=2$, тогда контактные амплитуды $\pi\pi$ - рассеяния с $T=1,2$ формально ничем не будут отличаться от соответствующих амплитуд в общем случае $\pi + \alpha \to \pi + \beta$. Из этого требования в нелинейной σ -модели получаем ограничение $N=1$, т.е. нарушение киральной симметрии с трансформационными свойствами компоненты представления $(1/2, 1/2)$. Поскольку выражение для контактной амплитуды $\pi\pi$ рассеяния вне массовой поверхности зависит от выбора полевых переменных,то при любом другом определении пионного поля /2/ из условия $\mathcal{M}^{T=2}_{\text{конт.}}=0$ пришлось бы выбрать нарушение более сложного вида.

Рассмотрим теперь взаимодействие двух пионов и мезона M с $G=+1$, $P(-1)^J=+1$ в киральной динамике:

$$-(2F_\pi)^{-1}\,\vec{J}_{5\mu}\cdot\mathcal{D}_\mu\vec{\pi}, \qquad (I.10)$$

которое формально отличается от связи $\pi\alpha\beta$ (I.3) коэффициентом 2^{-1}, а также тем, что ток $J_{5\mu}$ содержит здесь ковариантную производную пионов. Определим из этого взаимодействия вершину $M(p')\to\pi_a(q)+\pi_b(p)$ при $q^2=0$, $p^2=m_\pi^2$, учитывая его симметрию по отношению к перестановке пионных полей:

$$\mathcal{M}_a(p'\lambda M,\,pb)=4iF_\pi^{-1}\delta_{\lambda 0}\,\omega E[X_a(0)]_{Hb}. \qquad (I.11)$$

Формфактор $X_a(0)$ определяется так же, как и в общем случае (I.4).

Отметим, что несмотря на формальные различия взаимодействий (I.3) и (I.10), вершина $M\to\pi\pi$ параметризуется точно так, как и вершина $\alpha\to\pi\beta$ в общем случае /1/. Это обстоятельство существенно при анализе асимптотики амплитуды рассеяния пионов на мезонах с $GP(-1)^J=+1$ при $\lambda=0$, поскольку в этом случае в полюсных графиках появляются вершины $M\pi\pi$ и $M'M\pi$ в различных сочетаниях. Теперь при исследовании поведения графиков-деревьев при $\omega\to\infty$ мы можем не выделять процессы рассеяния пионов на мезонах с $GP(-1)^J=+1$, поскольку в нашем анализе структура контактной амплитуды (I.8) и параметризация вершин не отличаются от общего случая /1/.

Таким образом, мы приходим к выводу, что для применения общего метода АРКС /I/ к анализу асимптотического поведения амплитуды рассеяния вперед пионов на мезонных состояниях с $\lambda = 0$ и $GP(-1)^J = +1$ имеются все необходимые предпосылки, если рассматривать амплитуду вне массовой поверхности для рассеиваемых пионов и выбирать при этом определенное нарушение киральной симметрии.

Применяя теперь общий анализ /I/ к этим процессам мы получим из амплитуды с $T = 1$ групповое соотношение (I.5) для матрицы $X_a(0)$, имеющей ненулевые матричные элементы между одночастичными мезонными состояниями с $\lambda = 0$ и $GP(-1)^J = +1$. Из амплитуды с $T = 2$ получаются те же, что и в общем случае /I/, ограничения на массовый оператор для этих состояний (I.6).

Таким образом алгебраическая реализация киральной симметрии в принципе применима для классификации массивных пионов и других мезонов с $GP(-1)^J = +1$.

АРКС применялась в работе /I/ к $A_1 - \rho - \pi - \sigma$ системе. Для насыщения соотношений (I.5) и (I.6) при нулевой спиральности можно ограничиться этими состояниями и в случае $m_\pi \neq 0$. При этом получаются массовые формулы:

$$m_\pi^2 + m_{A1}^2 = m_\rho^2 + m_\sigma^2 \tag{I.12}$$

$$(m_{A1}^2 - m_\pi^2)\cos 2\psi = m_\sigma^2 - m_\rho^2, \tag{I.13}$$

где ψ - угол $\pi - A_1$ смешивания /I/, а m_{A1}, m_ρ, m_σ - массы соответствующих частиц.

В то же время в данной системе частиц недостаточно состояний с $\lambda = \pm 1$ для получения удовлетворительных результатов АРКС, поскольку ограничение только ρ и A_1 -мезонами дает при

$\lambda = \pm 1$ равенство $m_{A1} = m_\rho$, которое противоречит эксперименту и не согласуется с соотношениями при $\lambda = 0$.

II. Алгебраическая реализация и теория типа Янга-Миллса для группы $SU_2 \times SU_2$.

Введение полей Янга-Миллса в киральную симметрию /5-7/ приводит к тождествам Уорда, связывающим амплитуды с различным числом векторных и аксиально-векторных мезонов /8/. Такой подход дает изящное и согласующееся с экспериментом описание процессов в $A_1 - \rho - \pi$ системе /5-9/.

По отношению к динамической киральной симметрии теория Янга-Миллса, также как и алгебраическая реализация, представляют собой частные модели с многочисленными дополнительными соотношениями между константами связи и массами частиц.

При сопоставлении результатов двух подходов наиболее важной является проверка их совместности для мезонов с $GP(-1)^J = +1$, так как предсказания этих теорий для других частиц почти не пересекаются.

С этой целью мы введем для описания векторных и аксиально-векторных полей модифицированный формализм типа Янга-Миллса, в котором непосредственно применим анализ АРКС.

Обычно определяют поля Янга-Миллса $\vec{V}_\mu^+$ и $\vec{V}_\mu^-$ со следующими трансформационными свойствами относительно калибровочных $SU_2 \times SU_2$ преобразований с зависящими от координат параметрами $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ /5-7/:

$$\delta \vec{V}_\mu^\pm = -(\vec{\alpha} \pm \vec{\beta}) \times \vec{V}_\mu^\pm - (2g)^{-1} \partial_\mu (\vec{\alpha} \pm \vec{\beta}), \qquad (2.1)$$

где g -калибровочная константа.

В АРКС исходным предположением служит то, что все поля преобразуются нелинейно, причем преобразование пионов является основным, а трансформационные свойства любого другого поля определяются его изоспином /2/.

Теория Янга-Миллса с полями $\vec{V}_\mu^{\pm}$ не удовлетворяет этим требованиям, поэтому в ней не выполняются основные предпосылки (I.I) и (I.3) общего анализа АРКС.

Воспользуемся теперь теорией нелинейных реализаций /2,I0/ для перехода от $\vec{V}_\mu^{\pm}$ к таким полям, киральные преобразования которых не отличаются от нелинейных преобразований любого другого изовекторного поля /II/.

Ковариантные производные в киральной симметрии определяются с помощью матрицы $S(i\pi A)$ /I0/:

$$-i S^{-1}\partial_\mu S = \vec{v}_\mu \cdot \vec{V} + 2F_\pi^{-1}\mathcal{D}_\mu \vec{\pi}\cdot\vec{A}\ , \tag{2.2}$$

где $\vec{V}, \vec{A}$ - генераторы группы $SU_2 \times SU_2$, а величина $\vec{v}_\mu = 2F_\pi^{-2}(\vec{\pi}\times\partial_\mu\vec{\pi}) + O(\pi^4)$ входит в ковариантные производные всех полей.

Определим теперь новые векторное и аксиально-векторное поля $\vec{\rho}_\mu$ и $\vec{a}_\mu$:

$$(g_\rho/g)\vec{\rho}_\mu\cdot\vec{V} + \vec{a}_\mu\cdot\vec{A} = S^{-1}[\vec{V}_\mu^{+}(\vec{V}+\vec{A}) + \vec{V}_\mu^{-}(\vec{V}-\vec{A})]\,S \tag{2.3}$$

Перенормировка поля $\vec{\rho}_\mu$ с помощью константы $g_\rho/g \neq 1$ вводится для того, чтобы продемонстрировать независимость преобразований $\vec{\rho}_\mu$ и $\vec{a}_\mu$ в киральной симметрии.

Калибровочные преобразования таких янг-миллсовских полей являются нелинейными по пионам и неоднородными по полям $\vec{\rho}_\mu$ и $\vec{a}_\mu$, что легко показать с помощью формулы (2.1).

Запишем теперь в модифицированном янг-миллсовском формализме ковариантные производные пионов и произвольного поля Ψ :

$$\nabla_\mu \vec{\pi} = \mathcal{D}_\mu \vec{\pi} + \frac{1}{2} F_\pi g \vec{a}_\mu$$

$$\nabla_\mu \Psi = [\partial_\mu + i(\vec{v}_\mu + g_\rho \vec{\rho}_\mu)\cdot \vec{t}\,]\,\Psi, \tag{2.4}$$

где $\vec{t}$ - матрица изоспина, а $\vec{v}_\mu$ и $\mathcal{D}_\mu \vec{\pi}$ определены соотношением (2.2). Ковариантные роторы полей $\vec{\rho}_\mu$ и $\vec{a}_\mu$ получаются следующим образом:

$$(g_\rho/g)\vec{\rho}_{\mu\nu}\cdot\vec{V} + \vec{a}_{\mu\nu}\cdot\vec{A} = S^{-1}[\vec{V}^{+}_{\mu\nu}\cdot(\vec{V}+\vec{A}) + \vec{V}^{-}_{\mu\nu}(\vec{V}-\vec{A})]\,S, \tag{2.5}$$

где $\vec{V}^{\pm}_{\mu\nu}$ - ковариантные роторы для обычных полей Янга-Миллса /5-7/.

В обычной теории Янга-Миллса действует спиновый принцип /I2/, согласно которому в силу уравнений движения должны выполняться условия $\partial_\mu \vec{V}^{\pm}_\mu = 0$, и взаимодействующие векторные поля переносят только спин 1. И этого принципа отбирается нарушение калибровочной инвариантности в виде массового члена полей $\vec{V}^{\pm}_\mu$. Для $\vec{\rho}_\mu$ и $\vec{a}_\mu$ спиновый принцип не выполняется, однако мы можем выбрать неинвариантный массовый член для этих полей по аналогии с обычной теорией, поскольку существует обратный переход от $\vec{\rho}_\mu$, $\vec{a}_\mu$ к $\vec{V}^{+}_\mu$ и $\vec{V}^{-}_\mu$:

$$\frac{m_\rho^2}{2}\vec{\rho}_\mu^{\,2} + \frac{m_0^2}{2}\vec{a}_\mu^{\,2} = \frac{m_0^2}{2}[(\vec{V}^{+}_\mu)^2 + (\vec{V}^{-}_\mu)^2] \tag{2.6}$$

где $m_\rho = (g_\rho/g)\,m_0$.

Пионный лагранжиан содержит билинейную связь $\vec{a}_\mu \mathcal{D}_\mu \vec{\pi}$, для устранения которой следует взамен $\vec{a}_\mu$ определить новое аксиально-векторное поле $\vec{A}_\mu$:

$$\vec{A}_\mu = \vec{a}_\mu + 2F_\pi^{-1} k \nabla_\mu \vec{\pi} \equiv (1+kg)\vec{a}_\mu + 2F_\pi^{-1} k \mathcal{D}_\mu \vec{\pi}, \tag{2.7}$$

где постоянная k выбирается из требования исключения члена $\vec{A}_\mu \mathcal{D}_\mu \vec{\pi}$ из лагранжиана. В АРКС рассматриваются поля с определенным законом кирального преобразования /1/, поэтому мы выбрали физическое поле $\vec{A}_\mu$ с теми же трансформационными свойствами, что и у поля $\vec{a}_\mu$.

Далее следует обычная процедура диагонализации лагранжиана, выбора правильной нормировки полей, определения перенормированных величин /5-7,9/:

$$g_A = \frac{g}{1+kg}; \quad m_{A1}^2 = (g_A/g) m_0^2; \; k = \left(1 - \frac{m_\rho^2 g_A^2}{m_{A1}^2 g_\rho^2}\right). \tag{2.8}$$

В результате получается следующее соотношение /9/:

$$(m_\rho/m_{A1})^2 = (g_\rho/g_A)^2 \left[1 - (F_\pi g_\rho/2m_\rho)^2\right], \tag{2.9}$$

эквивалентное 1-му правилу сумм Вайнберга /2/, которое в лагранжевом подходе является прямым следствием выбора нарушения (2.6).

В новых полевых переменных ковариантные производные $\vec{\pi}$, $\vec{\rho}_\mu$ и $\vec{A}_\mu$ имеют следующий вид:

$$\nabla_\mu \vec{\pi} = (1-k)\mathcal{D}_\mu \vec{\pi} + \frac{1}{2} F_\pi g_A \vec{A}_\mu \tag{2.10}$$

$$\vec{\rho}_{\mu\nu} = \mathcal{D}_\mu \vec{\rho}_\nu - \mathcal{D}_\nu \vec{\rho}_\mu - g_\rho \vec{\rho}_\mu \times \vec{\rho}_\nu - (g_A^2/g_\rho)\vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu -$$
$$- (2g_A/g_\rho F_\pi)(1-k)(\mathcal{D}_\mu \vec{\pi} \times \vec{A}_\nu + \vec{A}_\mu \times \mathcal{D}_\nu \vec{\pi}) + \tag{2.11}$$
$$+ (4/g_\rho F_\pi^2) k(2-k)\, \mathcal{D}_\mu \vec{\pi} \times \mathcal{D}_\nu \vec{\pi}$$

$$\vec{A}_{\mu\nu} = (g/g_A)\vec{a}_{\mu\nu} = \mathcal{D}_\mu \vec{A}_\nu - \mathcal{D}_\nu \vec{A}_\mu - g_\rho(\vec{\rho}_\mu \times \vec{A}_\nu + \vec{A}_\mu \times \vec{\rho}_\nu) +$$
$$+ (2g_\rho/g_A F_\pi)(1-k)\left[(\vec{\rho}_\nu \times \mathcal{D}_\mu \vec{\pi}) + (\mathcal{D}_\nu \vec{\pi} \times \vec{\rho}_\mu)\right]. \tag{2.12}$$

Здесь $\mathcal{D}_\mu$ означает ковариантное дифференцирование в киральной симметрии /2/.

Запишем теперь эффективный лагранжиан взаимодействия в рассматриваемой теории типа Янга-Миллса:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mathcal{D}_\mu \vec{\pi})^2 - \frac{1}{4}\vec{\rho}_{\mu\nu}^{\,2} - \frac{1}{4}\vec{A}_{\mu\nu}^{\,2} + \frac{m_\rho^2}{2}\vec{\rho}_\mu^{\,2} + \frac{m_{A1}^2}{2}\vec{A}_\mu^{\,2} +$$
$$+ \tau F_\pi^{-2} \vec{\rho}_{\mu\nu} \cdot \nabla_\mu \vec{\pi} \times \nabla_\nu \vec{\pi} + \mathcal{L}'(\vec{\pi}, \vec{\rho}_\mu, \vec{A}_\mu, \Psi), \tag{2.13}$$

где τ - константа связи, а $\mathcal{L}'$ включает в себя свободные лагранжианы любых других полей Ψ и всевозможные взаимодействия. Напомним, что только вклад члена (2.6) нарушает калибровочную $SU_2 \times SU_2$ инвариантность лагранжиана.

Данная теория не эквивалентна обычному формализму с линейно преобразующимися полями Янга-Миллса /5-9/. Эти различия появляются при неканонической замене $\vec{a}_\mu \to \vec{A}_\mu$ (2.7), которая во многом определяет содержание теории. В моделях с полями $V_\mu^\pm$ к диагонализации лагранжиана обычно предъявляются иные требования /9/, что приводит к появлению аксиально-векторных полей, которые не связаны с полем $\vec{A}_\mu$ (2.7) эквивалентным преобразованием.

Рассматриваемый формализм обладает тем преимуществом, что в нем особенно легко провести грань между следствиями обычной киральной симметрии, дающей лишь соотношения между амплитудами процессов с различным числом пионов, и дополнительными ограничениями, налагаемыми калибровочной $SU_2 \times SU_2$ инвариантностью.

В теории типа Янга-Миллса появляются связи между процессами с участием различного числа ρ и A_1 мезонов, которые легко получить, выбирая определенное взаимодействие $\mathcal{L}'(\pi, \rho, A_1, \Psi)$.

В рассматриваемой теории типа Янга-Миллса ковариантные величины строятся из ковариантных производных киральной симметрии. Поэтому для лагранжиана (2.I3) остаются в силе основные предположения АРКС о структуре минимального контактного взаимодействия (I.I) и аксиально-векторной связи (I.3). С учетом замечаний раздела I мы можем утверждать,что в калибровочной теории, построенной на основе нелинейной реализации для полей Янга-Миллса, непосредственно применим общий анализ асимптотического поведения амплитуды рассеяния вперед пионов на любых частицах. Поэтому мы вправе ставить вопрос о совместности требований АРКС и ограничений калибровочной теории.

АРКС требует, чтобы состояния с определенной спиральностью образовывали неприводимые или приводимые мультиплеты по группе $SU_2 \times SU_2$ /I/. Очевидно, что чем больше частиц мы введем в рассмотрение в АРКС, тем более слабые ограничения на массы и константы связи получим для каждой спиральности. Не вызывает, по-видимому, сомнений, что при выборе достаточно широкого мультиплета частиц, включающего A_1, ρ и π мезоны, можно добиться непротиворечивости требований АРКС и ограничений калибровочного подхода. Проблема состоит в отыскании такого минимального набора мезонных состояний, при котором совместное применение требования разумного поведения амплитуды рассеяния пионов при высоких энергиях и тождеств Уорда в янг-миллсовском подходе дает удовлетворительные результаты. Для произвольного поля Ψ теория типа Янга-Миллса дает универсальную связь с ρ-мезоном, но это ограничение не пересекается с соотношениями АРКС.

В работах /1,13/ указывалось, что имеются количественные расхождения между предсказаниями АРКС для A_1-ρ-π-σ системы и результатами обычной теории Янга-Миллса. Однако из такого сравнения не следует противоречивость двух подходов для данной системы частиц, поскольку анализ асимптотики графиков-деревьев в теории с полями $\vec{V}_\mu^{\pm}$ (2.1) может привести к ограничениям, отличающимся от соотношений АРКС.

Поэтому мы сопоставим результаты АРКС для A_1-ρ-π-σ системы /1/ с соотношениями модифицированной теории типа Янга-Миллса.

Для определенности будем считать, что выражение $\mathcal{L}'$ не содержит взаимодействий полей $\vec{\pi}$, $\vec{\rho}_\mu$ и $\vec{A}_\mu$ между собой; кроме того, положим снова $m_\pi = 0$.

Тогда из $A_1 A_1 \rho$ взаимодействия в лагранжиане (2.13) получим следующее выражение для аномального магнитного момента A_1 мезона /8/:

$$\delta = (g_A/g_\rho)^2(1+4g_\rho\tau) - 1. \qquad (2.14)$$

Отметим, что F_π, g_ρ, g_A, m_ρ и δ являются независимыми параметрами калибровочной теории.

Константы s и d -волновых переходов $A_1 \to \rho\pi$ имеют такой же вид, как и в обычной теории /5-9/:

$$G_S = (g_\rho / g_A F_\pi)(1-k)(2+\delta)(m_{A1}^2 - m_\rho^2)$$

$$G_D = (g_\rho / g_A F_\pi)(1-k)\,\delta, \tag{2.15}$$

где $k = (F_\pi g_\rho / 2m_\rho)^2$.

Отличия нелинейной реализации для полей Янга-Миллса от теории с полями $V_\mu^\pm$ проявляются в $\rho\pi\pi$-взаимодействии, которое здесь имеет следующий вид:

$$(4/F_\pi^2 g_\rho)\left[k(k-2) + 2(1+\delta)(g_\rho/g_A)^2(1-k)^2\right] D_\mu \vec{\rho}_\nu \cdot D_\mu \vec{\pi} \times D_\nu \vec{\pi} \tag{2.16}$$

При $k = 1/2$ и $\delta = -1$ мы получаем константу распада $\rho \to \pi\pi$ $G_{\rho\pi\pi} = (3/4)\, g_\rho$, тогда как в обычной теории при тех же ограничениях $G_{\rho\pi\pi} = g_\rho$ /5-9/.

Соотношения АРКС при $\lambda = \pm 1$ в применении к A_1-ρ-π-σ системе дают равенство $m_{A1} = m_\rho$, которое в принципе несовместно с правилом сумм (2.9). Для устранения этого противоречия необходимо увеличить число рассматриваемых состояний с $\lambda = \pm 1$.

При $\lambda = 0$ АРКС в A_1-ρ-π-σ системе дает формулу /1/:

$$m_\rho / m_{A1} = \sin\psi, \tag{2.17}$$

которую можно сравнить с правилом сумм (2.9).

Сопоставим также амплитуду $A_1 \to \rho\pi$ перехода при $\lambda = 0$ в АРКС /1/:

$$\mathcal{M}_{00} = 2F_\pi^{-1}(m_{A1}^2 - m_\rho^2)\sin\psi \tag{2.18}$$

и выражение для этого матричного элемента в калибровочной теории:

$$\mathcal{M}_{00} = \frac{(m_{A_1}^2 + m_\rho^2)}{2 m_{A_1} m_\rho}\left[G_S - (m_{A_1}^2 - m_\rho^2) G_D\right] =$$

$$= F_\pi^{-1}(m_{A_1}^2 - m_\rho^2)(1-k)(g_\rho / g_A)\left(\frac{m_{A_1}}{m_\rho} + \frac{m_\rho}{m_{A_1}}\right). \tag{2.19}$$

Совместное применение соотношений АРКС и ограничений калибровочного подхода к $A_1 - \rho - \pi - \sigma$ системе при $\lambda = 0$ приводит к тому, что параметры теории типа Янга-Миллса становятся функциями угла $\pi - A_1$ смешивания ψ :

$$g_\rho / g_A = \frac{1}{2}(1 + \sin^2\psi) \tag{2.20}$$

$$k = \left(\frac{F_\pi g_\rho}{2 m_\rho}\right)^2 = \frac{\cos^4\psi}{(1+\sin^2\psi)^2}. \tag{2.21}$$

Это позволяет выразить через угол ψ константы G_S и G_D (2.15):

$$G_S = \frac{2 m_\rho^2}{F_\pi}\,\frac{\cos^2\psi}{1+\sin^2\psi}(2+\delta)$$

$$G_D = \frac{2}{F_\pi}\,\frac{\sin^2\psi}{1+\sin^2\psi}\cdot\delta. \tag{2.22}$$

Сопоставим теперь ограничения двух подходов для $\rho\pi\pi$ вершины. В АРКС матричный элемент этого перехода пропорционален $\cos\psi$ /I/.

Амплитуду распада $\rho \to \pi\pi$ в модифицированной теории типа

Янга-Миллса можно получить из взаимодействия (2.16). Сравнивая соответствующие выражения для амплитуды $\rho\pi\pi$ перехода при $\lambda=0$, получим соотношение:

$$\cos\psi=\frac{1}{2\sqrt{k}}\left[k(2-k)-2(1+\delta)(g_\rho/g_A)^2(1-k)^2\right]. \tag{2.23}$$

Отсюда мы можем определить параметр δ, если используем равенства (2.20-2.21):

$$\delta=\frac{\cos^4\psi}{8\sin^4\psi}\left[2-\frac{\cos^4\psi}{(1+\sin^2\psi)^2}-\frac{2(1+\sin^2\psi)}{\cos\psi}\right]-1. \tag{2.24}$$

Таким образом, требования АРКС для A_1-ρ-π-σ системы при $\lambda=0$ совместны с ограничениями модифицированной теории типа Янга-Миллса. В лагранжевой модели A_1-ρ-π-σ системы, удовлетворяющей требованиям двух подходов, единственным произвольным параметром является угол $\pi-A_1$ смешивания ψ.

Соотношение (2.17), связывающее массы ρ и A_1 -мезонов, не противоречит эксперименту при $40^\circ<\psi<50^\circ$. При этих значениях ψ мы получаем следующие ограничения:

$$1)\ 0{,}2>k>0{,}1\ ; \qquad 2)\ 0{,}7<g_\rho/g_A<0{,}8$$

$$3)\ 1>g_\rho^2/4\pi>0{,}5\ , \qquad 4)\ -1{,}5<\delta<-1{,}2\ , \tag{2.25}$$

которые существенно отличаются от соответствующих ограничений в обычной калибровочной теории /5-9/. Например, по сравнению с общепринятым значением универсальной константы связи ρ -мезона здесь получается в несколько раз меньшая величина $g_\rho^2/4\pi$.

В то же время совместное применение соотношений АРКС при $\lambda=0$ и ограничений калибровочного подхода дает удовлетворительное описание процессов в $A_1-\rho-\pi-\sigma$ системе.

Выберем угол $\psi\simeq 45°$, тогда $m^2_{A_1}=2m^2_\rho=2m^2_\sigma$ /I/. Равенства (2.20-2.24) дают возможность определить параметры распадов A_1, ρ и σ мезонов.

При $\psi\simeq 45°$ получаем значения $\Gamma(\rho\to 2\pi)\simeq 135\,Mev$ и $\Gamma(\sigma\to 2\pi)\simeq 600\,Mev$ /I/ для ширин распадов ρ и σ мезонов. Зная величины G_S и G_D (2.22), мы можем вычислить усредненную по поляризациям ширину распада $A_1\to\rho\pi$: $\Gamma(A_1\to\rho\pi)\simeq 55\,Mev$. Парциальная ширина распада $A_1\to\sigma\pi$ при $m_\sigma\simeq m_\rho$ равна $40\,Mev$.

Полученные результаты не противоречат экспериментальным данным по распадам A_1- и ρ-мезонов.

Ш. Заключение

Мы рассмотрели вопрос о применимости алгебраической реализации киральной симметрии к пионам и другим мезонам с $GP(-1)^J=+1$. Показано, что к этим частицам идея АРКС применима, при этом существует простой способ включения ненулевой массы пионов.

В то же время простейшая система из A_1, ρ, π и σ мезонов оказывается слишком бедной для получения согласующихся между собой и удовлетворительных с точки зрения эксперимента результатов АРКС для различных спиральностей.

Калибровочная теория, построенная на основе нелинейной реализации группы $SU_2\times SU_2$ для полей Янга-Миллса, совместна в принципе с требованиями АРКС. Сопоставление соотношений АРКС для $A_1-\rho-\pi-\sigma$ системы при $\lambda=0$ и ограничений теории типа

Янга-Миллса приводит к разумным следствиям для распадов A_1, ρ и σ мезонов. Для проверки совместности двух подходов при $\lambda=\pm 1$ необходимо рассматривать в АРКС более широкие мультиплеты мезонов, включающие A_1, ρ, π, σ , а также другие частицы с $J \geq 1$.

Способ построения таких мультиплетов, который приводит к согласованным результатам АРКС для различных спиральностей, указан Вайнбергом /I/. Суть его сводится к тому, что при учете ограниченного числа парциальных волн в переходах $\alpha \to \pi + \beta$ фиксируется определенная зависимость матрицы переходов $X_a(\lambda)$ и массового оператора от спинов и спиральностей. Это ведет к расширению рассматриваемой группы и к более широким мультиплетам мезонов. Например, если рассматривать в АРКС только ρ- или одновременно Δ- и ρ -волновые переходы, то соответствующими группами симметрии будут $SO(6)$ или $SO(7)$ /I/. АРКС определяет также и способ нарушения симметрии.

Следует сказать, что уже в $A_1-\rho-\pi$ системе существенную роль играют d -волновые переходы, поэтому необходимо найти такое обобщение группы $SU_2 \times SU_2$, чтобы матрица $X_a(\lambda)$ включала также и d -волны. В таких группах неприводимые мультиплеты могут содержать частицы со спином $0, 1, 2$, например, π, σ, ρ, A_1, f, $\pi_A(1640)$ и др.

Эти вопросы требуют дальнейшего исследования.

В заключение нам приятно выразить благодарность Е.А.Иванову и М.А.Элиашвили за обсуждения.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. S.Weinberg. Phys.Rev., 177, 2604 (1969).
2. S.Weinberg. Phys.Rev.Lett., 18, 507 (1967).
   Phys.Rev., 166, 1568 (1969).
3. S.Gasiorowicz, D.A.Geffen. Rev.Mod.Phys., 41, 531 (1969).
4. D.B. Волков, В.Д.Гершун, В.И.Ткач. Теор. и мат. физика, 5, 321 (1970).
5. J.Schwinger. Phys.Lett., 24B, 473 (1967).
6. J.Wess, B.Zumino. Phys.Rev., 163, 1727 (1967).
7. B.W.Lee, H.T.Nieh. Phys.Rev., 166, 1507 (1968).
8. H.J.Schnitzer, S.Weinberg. Phys.Rev., 164, 1828 (1967).
9. V.I.Ogievetsky, B.M.Zupnik. Nucl.Phys., B24, 612 (1970).
10. S.Coleman, J.Wess, B.Zumino. Phys.Rev., 177, 2239 (1969).
11. K.Kawarabayashi. Lectures in Theor.Phys., v. XI-A, pt.1, p. 227, Interscince, New York, 1969.
12. V.I.Ogievetsky, I.V.Polubarinov. Ann.Phys. (N.Y.), 25, 358 (1963).
13. Fayyazuddin, Riazuddin. Phys.Rev., 182, 1617 (1969).

Рукопись поступила в издательский отдел

16 апреля 1971 года.