СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 5740

В.М. Лебеденко

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРУПП ЛИ И ТЕОРИИ ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

1971

Р2 - 5740

В.М. Лебеденко

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРУПП ЛИ
И ТЕОРИИ ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Введение

Настоящая работа была выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ. Она посвящена теории групп Ли и теории их представлений, сфера применения которой в физике всё больше расширяется.

Разумеется, эта работа не является полным обзором всех результатов, полученных до последнего времени. Автор поставил перед собой более узкую задачу: собрать для тех, кто начинает изучать теорию представлений групп Ли, в небольшом, по возможности, объёме тот минимум сведений, который приводит к пониманию этой теории "в первом приближении" и даёт возможность в дальнейшем самостоятельно углублять свои знания.

В работе не показано, как можно применять теорию представлений к конкретным физическим проблемам, поскольку физикам ознакомиться с этим легче (в частности, можно рекомендовать /I/, /2/, /3/, /4/), чем с математической стороной дела.

В приложениях приведены примеры представлений отдельных групп. Они носят лишь иллюстративный характер.

В первой главе, на наш взгляд, мы подробнее, чем это обычно принято, останавливаемся на групповых понятиях. Это полезно для более глубокого понимания теории групп Ли и теории их представлений.

В первом и третьем пунктах главы У приводятся факты, почти все с доказательствами, из теории операторов в гильбертовом пространстве, так как теория представлений оперирует её понятиями наряду с групповыми.

I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРУПП

Настоящее введение в теорию представлений групп Ли мы начнём с определения простейших групповых понятий и отношений.

I. Определение группы. Подгруппы

Пусть G - некоторое множество. Говорят, что в G определена бинарная операция, если для любой упорядоченной пары элементов $a, b \; (a \in G, b \in G)$ из этого множества однозначно определён третий элемент c из $G \; (c \in G)$. В этом случае c называется произведением (или суммой) a и b, взятых в данном порядке, и обозначается

$$c = ab \qquad (\text{или } c = a + b)$$

Операция называется ассоциативной, если для любых $a, b, c \in G$ выполняется равенство

$$a(bc) = (ab)c.$$

Операция называется коммутативной, если для любых $a, b \in G$ выполняется равенство

$$ab = ba.$$

Множество G, с определённой в нём бинарной операцией, называется группой, если выполняются условия:

1) операция ассоциативна;

2) в G существует единственный элемент e, называемый единицей (нулём, в случае сложения), который обладает свойством:

$$ae = ea = a \quad \text{для любого } a \in G;$$

3) для любого элемента $a \in G$ существует единственный

элемент $a^{-1}\in G$, называемый обратным (или противоположным), для которого

$$a^{-1}a = aa^{-1} = e.$$

В силу ассоциативности, условия 2) и 3) могут быть заменёны эквивалентными, но более слабыми:

2$'$) в G существует, по крайней мере, одна левая единица e_1 : $e_1 a = a$ при любом $a\in G$, и, хотя бы одна, правая единица e_2 : $a e_2 = a$ при любом $a \in G$;

3$'$) для любого элемента $a\in G$ существуют, по крайней мере, один правый a_1^{-1} , и один левый a_2^{-1} обратные элементы:

$$a a_1^{-1} = e'$$
$$a_2^{-1}a = e'',$$

где e' и e'' – какие-то единицы (левые или правые).

Покажем, что из условия

2$'$) следует, на самом деле, существование единственной единицы. Действительно, пусть e_1 - левая единица, а e_2 - правая. Тогда $e_1 e_2 = e_2 = e_1$, т.е. они совпадают. Следовательно, любая единица является одновременно и левой и правой. Аналогично показывается, что любые две такие единицы совпадают. Поэтому в G существует только одна единица e .

Далее, ввиду ассоциативности, для любых обратных к некоторому a элементов, левого a_2^{-1} и правого a_1^{-1} , выполняется равенство:

$$(a_2^{-1}a)a_1^{-1} = e a_1^{-1} = a_1^{-1} = a_2^{-1}(a a_1^{-1}) =$$
$$= a_2^{-1} e = a_2^{-1}.$$

Фиксируя в этом равенстве некоторый правый обратный элемент a_1^{-1}, получим, что все левые, обратные к a, элементы равны некоторому правому. Поступив наоборот, получим требуемое утверждение.

Таким образом, если нам дано некоторое множество G с определённой в нём операцией, которая удовлетворяет условиям I), 2′), 3′), то, ничего не проверяя дальше, можно утверждать, что G - группа.

Ввиду ассоциативности можно писать: $a(bc)=(ab)c=abc$.

Аналогично, любое произведение элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, с любым расположением скобок, можно записать так: $a_1 a_2 \cdots a_n$. Это означает, что расстановка скобок в сложном произведении не меняет результата операции, хотя произведение определено первоначально только для двух элементов. Если в предыдущем произведении все a_i равны a, то это произведение называется степенью a — a^n, $a^0=e$,

$$a^1=a, \ldots, a^n=a\,a^{n-1}=a^{n-1}a.$$

Теперь покажем, что $(a^n)^{-1}=(a^{-1})^n$. Действительно, при $n=1$ это справедливо. Пусть это верно для всех $1\le n\le m$. Покажем, что равенство справедливо для $n=m+1$. Имеем, $a^m(a^{-1})^m=(a^{-1})^m a^m=e$. Тогда

$$a^{m+1}(a^{-1})^{m+1}=a\left(a^m(a^{-1})^m\right)a^{-1}=a\,e\,a^{-1}=$$

$$=a a^{-1}=e, \quad (a^{-1})^{m+1}a^{m+1}=a^{-1}\left((a^{-1})^m a^m\right)a=$$

$$=a^{-1}a=e.$$

Утверждение доказано. Вместо $(a^{-1})^n$ можно писать a^{-n}. Аналогично можно показать, что для любых $a_1, \cdots, a_n \in G$ $(a_1 \cdots a_n)^{-1} = a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \cdots a_1^{-1}$.

Далее можно определить произведение любых степеней a, именно: $a^s a^t = a^{s+t}$. Может оказаться, что при некотором n $a^n = e$. Минимальное n $(n>0)$ (если такие существуют), удовлетворяющее этому равенству, называется порядком a и обозначается $O(a)$.

Элемент a в этом случае называется элементом конечного порядка $O(a)$. В противном случае, т.е. когда $a^n \neq e$, ни при каком $n > 0$, порядок элемента a считают бесконечным и пишут $O(a) = \infty$.

Группы, все элементы которых имеют конечные порядки, называются периодическими. Группы, все элементы которых имеют бесконечный порядок, называются группами без кручения.

Если группа обладает как элементами конечных порядков, так и элементами бесконечного порядка, то она называется смешанной.

В том случае, когда групповая операция коммутативна, группа называется коммутативной или абелевой (тогда в качестве знака операции обычно употребляется "+").

Подмножество $A \subseteq G$ группы G называется подгруппой G, если относительно операции, определённой в G, оно само является группой. Для того, чтобы непустое подмножество $A \subseteq G$ было подгруппой G, достаточно, чтобы для любых $a, b \in A$, $ab \in A$ и для любого $a \in A$, $a^{-1} \in A$.

Тривиальные примеры подгрупп — $E = [e]$ и сама G.

Подгруппой будет множество $[e, a^{\pm 1}, \ldots, a^{\pm n}, \ldots]$ всех степеней некоторого элемента a. Эта группа называется циклической и обозначается – $\{a\}$. Для произвольного непустого подмножества $M \subset G$ подгруппой будет множество всевозможных произведений элементов M, которая называется подгруппой, порождённой M и обозначается через $\{M\}$. В этом случае M называется системой образующих группы $\{M\}$. Легко показать, что пересечение любого множества подгрупп G само является подгруппой G. Действительно, пусть $[A_\lambda]_{\lambda \in \Lambda}$ – некоторое семейство подгрупп G. Тогда, в силу определения подгруппы, $B = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ не пусто, так как содержит e – единицу G. Пусть $a, b \in B$, тогда a, b, $ab \in A_\lambda$ при любом $\lambda \in \Lambda$. Следовательно, $ab \in B$. Если $a \in B$, то $a, a^{-1} \in A_\lambda\ (\lambda \in \Lambda)$ и, следовательно, $a^{-1} \in B$. Утверждение доказано.

2. Нормальные делители и фактор-группы

Пусть даны два непустых подмножества $M, N \subseteq G$. Произведением MN называется совокупность всех произведений вида ab, где $a \in M$, $b \in N$. Произведение множеств ассоциативно: $M(NK) = (MN)K$. Покажем, что $M(NK) \subseteq (MN)K$: если $d \in M(NK)$, то $d = a(bc)$, где $a \in M$, $b \in N$, $c \in K$. Но, ввиду ассоциативности операции, $d = (ab)c \in (MN)K$. Аналогично показывается, что $(MN)K \subseteq M(NK)$. Сейчас мы введём понятие нормального делителя, которое имеет большое значение для изучения структуры групп.

Подгруппа H группы G называется нормальным делителем G, если соотношение $aH=Ha$ справедливо для любого $a\in G$, где aH и Ha - произведения множеств $[a]$ и H. Иными словами, для любого $a\in G$ и $h\in H$ найдётся $h'\in H$ такой, что $ah=h'a$, или, если домножить это равенство справа на a^{-1}, $aha^{-1}=h'\in H$. Поэтому, для того, чтобы подгруппа H была нормальным делителем, необходимо и достаточно, чтобы вместе со всяким элементом $h\in H$ она содержала и любой элемент вида aha^{-1}, называемый сопряжённым с h.

Если H -нормальный делитель G (обозначается $H\lhd G$), $H\subseteq A\subseteq G$, где A -некоторая подгруппа G, то $H\lhd A$.

Действительно, для любых $h\in H$ и $a\in A$, в силу определения нормального делителя, $a^{-1}ha\in H$, т.е. $H\lhd A$.

Пусть $H\lhd G$. Рассмотрим всевозможные множества вида aH, где $a\in G$.

Покажем, что для любых a и b либо $aH=bH$, либо $aH\cap bH=\varnothing$ (пусто).

Допустим, что $a\in bH$, т.е. $a=bh_1$, где $h_1\in H$. Тогда $aH=(bh_1)H=b(h_1H)=bH$. ($h_1H\subseteq H$. Пусть $h\in H$, тогда уравнение $h=h_1x$ разрешимо: $x=h_1^{-1}x\in H$, т.е. $H\subseteq h_1H$. Следовательно, $h_1H=H$). Если же $a\notin bH$, то $aH\cap bH=\varnothing$. Допустим, что $c\in aH\cap bH$, т.е. $c=ah'=bh''$. Следовательно, $a=bh''(h')^{-1}\in bH$, что противоречит условию.

Итак, G распадается в объединение непересекающихся классов aH, которое, очевидно, содержит и само $H=eH$. Такое разбиение называется левосторонним разложением G по H.

Аналогично определяется и правостороннее разложение G по H, состоящее из множеств Ha. Оно обладает тем же свойством, что и левое. Ввиду того, что $aH = Ha$ при любом $a \in G$, правостороннее разложение совпадает с левосторонним.

Покажем, что в множестве классов aH можно ввести групповую операцию.

В силу ассоциативности произведения множеств и того, что $H \triangleleft G$, для любого aH и bH

$$(aH)(bH) = a(Hb)H = a(bH)H = ab(HH) = abH -$$

тоже класс из данного разложения. Введённое таким образом произведение является однозначным. Пусть $aH = a'H$, $bH = b'H$, тогда $aH \cdot bH = a'H \cdot b'H = a'b'H$. Но $a' = ak'$, $b' = bk''$,
$a'b' = (ak')(bk'') = (a(k'b))k'' = abk'''$.

Поэтому $a'b'H = abH$. Имеем:

$$(aH)H = a(HH) = aH = Ha = (HH)a = H(Ha) = H(aH).$$

Поэтому класс H играет роль единицы относительно произведения классов. Очевидно, что произведение классов ассоциативно и $(aH)^{-1} = a^{-1}H$. Определив операцию в множестве классов разложения группы G по подгруппе H, мы получили новую группу, которая называется <u>фактор-группой</u> G по H и обозначается G/H.

3. <u>Гомоморфизмы и изоморфизмы</u>

Пусть даны две группы G_1, G_2 и однозначное отображение $\varphi : G_1 \to G_2$ группы G_1 в группу G_2. Иными словами, каждому элементу $f_1 \in G_1$, при φ, соответствует единственный элемент $f_2 = \varphi^{-1}(f_1) \in G_2$. Если отображение φ обладает свойством: $\varphi(f_1 f_2) = \varphi(f_1)\varphi(f_2)$, для любых $f_1, f_2 \in G_1$, то такое отображение называется <u>гомоморфизмом</u> G_1 в G_2.

Множество всех элементов G_2, являющихся образами элементов из G_1 (т.е. вида $\varphi(f)$, где $f \in G_1$) называется образом G_1 при гомоморфизме φ и обозначается – $\operatorname{Im}\varphi$.

Покажем, что $\operatorname{Im}\varphi$ – подгруппа G_2. Пусть $f_1', f_2' \in G_2$ и $f_1', f_2' \in \operatorname{Im}\varphi$: $f_1' = \varphi(f_1)$, $f_2' = \varphi(f_2)$, где $f_1, f_2 \in G_1$. Тогда $f_1' f_2' = \varphi(f_1)\varphi(f_2) = \varphi(f_1 f_2)$ и поэтому $f_1' f_2' \in \operatorname{Im}\varphi$. Очевидно, что произведение в $\operatorname{Im}\varphi$ ассоциативно, как и в G_2. Из равенств :

$$\varphi(f_1 e) = \varphi(f_1)\cdot\varphi(e) = \varphi(f_1 e) = \varphi(e f_1) = \varphi(f_1) = \varphi(e)\varphi(f_1),$$

$$\varphi(f f^{-1}) = \varphi(f)\varphi(f^{-1}) = \varphi(e) = \varphi(f^{-1} f) = \varphi(f^{-1})\varphi(f)$$

заключаем, что $\varphi(e)$ – единица в G_2 и $(\varphi(f))^{-1} = \varphi(f^{-1})$, для любого $f \in G_1$.

Мы установили, что при гомоморфизме G_1 в G_2 единица первой группы переходит в единицу второй. Однако могут быть элементы в G_1, не равные единице, но переходящие в единицу G_2. Множество элементов G_1, которые переходят в единицу G_2 при гомоморфизме φ, называют <u>ядром</u> φ. Ядро φ обычно обозначают как $\ker\varphi$. Покажем, что ядро $\ker\varphi$ является подгруппой в G_1 и даже её нормальным делителем. Действительно, если $a, b \in G_1$ и $\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi(e) \in G_2$, то $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(e)\varphi(e) = \varphi(e) \in G_2$. Если $\varphi(a) = \varphi(e) \in G_2$, то $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1} = \varphi(e)$. Итак, для любых $a, b \in \ker\varphi$, $ab \in \ker\varphi$ и $a^{-1} \in \ker\varphi \ni e$, то есть

$\ker\varphi \subseteq G_1$ - подгруппа G_1. Покажем, что $\ker\varphi \triangleleft G_1$. Пусть $a \in \ker\varphi$ и $g \in G_1$ - произвольный элемент G_1. Тогда $\varphi(g^{-1}ag) = \varphi(g)^{-1}\varphi(a)\varphi(g) = (\varphi(g))^{-1}\varphi(g) = e$. Этим показано, что $\ker\varphi \triangleleft G_1$.

Если гомоморфизм φ осуществляет взаимно однозначное соответствие между G_1 и $\operatorname{Im}\varphi$, то он называется *изоморфизмом* G_1 в G_2. При этом группы G_1 и $\operatorname{Im}\varphi = \varphi(G_1)$ называются *изоморфными*. В этом случае пишут

$$G_1 \cong \operatorname{Im}\varphi.$$

Очевидно, что при изоморфизме φ его ядро $\ker\varphi = E = \{e\}$, где E - единичная подгруппа.

Покажем, что если ядро гомоморфизма $\ker\varphi = E$, то φ - изоморфизм. Пусть $a, b \in G_1$ и $\varphi(a) = \varphi(b)$, тогда $\varphi(ab^{-1}) = \varphi(a)(\varphi(b))^{-1} = \varphi(a)(\varphi(a))^{-1} = e$, т.е. $ab^{-1} \in \ker\varphi = E$ и, следовательно, $ab^{-1} = e$ т.е. $(ab^{-1})b = eb = b = a$.

Если $\operatorname{Im}\varphi = G_2$, то говорят, что φ - гомоморфизм G_1 на G_2, или, иначе, *эпиморфизм*. При $\operatorname{Im}\varphi \subseteq G_1$ φ называется *эндоморфизмом*. Если φ - изоморфизм и эндоморфизм одновременно $(\operatorname{Im}\varphi = G_1)$, то он называется *автоморфизмом*.

Отметим, что если $G_1 \cong G_2$, то, с точки зрения бинарных операций, определённых в этих группах, они ничем не отличаются. Иными словами, если $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G_1$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n \in G_2$, $\varphi(a_i) = b_i \ (i = 1, \ldots, n)$, то из соотношения $a_1^{k_1} \cdots a_i^{k_i} = a_{i+1}^{k_{i+1}} \cdots a_n^{k_n}$ следует $b_1^{k_1} \cdots b_i^{k_i} = b_{i+1}^{k_{i+1}} \cdots b_n^{k_n}$. Поэтому свойства G_1, формируемые на языке операции, автоматически переносятся на G_2 и наоборот.

Теперь покажем, что, если $H \lhd G$, то G/H является гомоморфным образом G. Определим гомоморфизм φ следующим образом: (<u>естественный гомоморфизм</u>) для любого $g \in G$, $\varphi(g) = gH$. Тогда

$$\varphi(g_1 g_2) = (g_1 g_2)H = (g_1 H)(g_2 H) = \varphi(g_1)\ \varphi(g_2).$$

Получается, что φ - гомоморфизм G в G/H. Он является и эпиморфизмом. Действительно, пусть $aH \in G/H$, тогда $aH = \varphi(a)$. Покажем, что $\ker\varphi = H$. в G/H класс H выполняет роль единицы: $(aH)H = H(aH) = aH$. Если $h \in H$, то $\varphi(h) = h\cdot H = H = \varphi(e)$. Пусть $\varphi(g) = gH = H$, тогда $gH = H$, т.е. при любом $h \in H$, $gh = h' \in H$. Следовательно, $g = h'h^{-1} \in H$. Беря, в качестве H, всевозможные нормальные делители, мы получим множество гомоморфных образов G.

На самом деле этими группами исчерпываются все гомоморфные образы G. Иными словами, справедлива следующая <u>теорема о гомоморфизмах</u>. Если даны две группы G, G' и при некотором гомоморфизме φ, $\varphi(G) = G'$, то $G' \cong G/\ker\varphi$.

Действительно, $\ker\varphi \lhd G$. Пусть $g_1, g_2 \in G$ и $\varphi(g_1) = \varphi(g_2) \in G'$, тогда, как показано выше, $g_1^{-1}g_2 \in \ker\varphi$, т.е. $g_1^{-1}g_2 = h \in \ker\varphi$ и $g_2 = g_1 h \in g_1\cdot\ker\varphi$. Мы получили, что если $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$, то g_1 и g_2 принадлежат одному классу из $G/\ker\varphi$. Легко показать и обратное, т.е. что любой класс $g\cdot\ker\varphi$ при гомоморфизме φ переходит в элемент $\varphi(g) \in G'$. Определим соответствие ψ между $G/\ker\varphi$ и G' таким образом: $\psi(g\ker\varphi) = \varphi(g) \in G'$. Это соответствие однозначно; если $g\ker\varphi = g_1\ker\varphi$, то $g_1 = gh$, где $h \in \ker\varphi$ и $\varphi(g_1) = \varphi(g)\varphi(h) = \varphi(g)$. Очевидно, что $\operatorname{Im}\psi = G'$.

Покажем, что оно сохраняет операцию:

$$\Psi((f_1 \ker\varphi)(f_2 \ker\varphi)) = \Psi(f_1 f_2 \ker\varphi) = \varphi(f_1 f_2) =$$
$$= \varphi(f_1)\varphi(f_2) = \Psi(f_1 \ker\varphi)\,\Psi(f_2 \ker\varphi)$$

Остаётся показать, что $\ker\Psi = E = \ker\varphi \subseteq G/\ker\varphi$.

Пусть $\Psi(f \ker\varphi) = \varphi(f) = \varphi(e) \in G'$, тогда $f \in \ker\varphi$.
Теорема доказана.

4. Две теоремы об изоморфизмах

Теорема I.

Если $G \rhd A$, $G \rhd B$, $A \subseteq B \subseteq G$, то $A \lhd B$, $B/A \lhd G/A$ и $(G/A)/(B/A) \cong G/B$.

Доказательство.

Выше доказано, что из $A \lhd G$, $A \subseteq B \subseteq G$ следует $A \lhd B$. Покажем, что из $B \lhd G$ следует, что $B/A \lhd G/A$. Прежде убедимся в том, что B/A – подгруппа G/A. Если $b_1, b_2 \in B$, то $(b_1A)(b_2A) = b_1b_2A \in B/A$ и $b_1^{-1}A = (b_1A)^{-1} \in B/A$. Определим гомоморфизм φ, G/A на G/B, так: $\varphi(fA) = fB$. Очевидно, что это – отображение на всю G/B.

Покажем, что это отображение переводит в единицу все элементы B/A и только их. Если $fA \in B/A$, т.е. $f \in B$, то $\varphi(fA) = fB = B$. Наоборот, пусть $\varphi(fA) = fB = B$, тогда $f \in B$. Итак, $\ker\varphi = B/A$. Покажем, что отображение φ однозначно. Если $fA = f_1A$, то $f_1 = fa$, где $a \in A$ и $\varphi(f_1A) = faB = fB = \varphi(fA)$. Убедимся в том, что φ – гомоморфизм.

Действительно:

$$\varphi((g_1A)(g_2A)) = \varphi(g_1g_2A) = g_1g_2B = g_1B\cdot g_2B = \varphi(g_1A)\varphi(g_2A).$$

Так как φ – гомоморфизм G/A на G/B и $\operatorname{Ker}\varphi = B/A$, то, применяя теорему о гомоморфизмах, получим соотношение

$$G/B \cong (G/A)/(B/A)$$

Теорема доказана.

Докажем ещё одну полезную теорему, которая тоже называется

Теорема об изоморфизме (II)

Пусть даны подгруппы $A, B \subseteq G$ и $A \triangleleft \{A,B\}$. Тогда $A\cap B \triangleleft B$ и $\{A,B\}/A \cong B/(A\cap B)$.

Доказательство.

1. Покажем, что $A\cap B \triangleleft B$: пусть $a \in A\cap B$, тогда при любом $b \in B$, $b^{-1}ab \in A$ и, так как $a \in B$, то $b^{-1}ab \in B$. Следовательно, $b^{-1}ab \in A\cap B$. То есть $A\cap B \triangleleft B$.

2. Ввиду того, что $A \triangleleft \{A,B\}$, $\{A,B\} = AB = BA$. Поэтому в каждом классе фактор-группы $\{A,B\}/A$ содержится элемент B, т.е. каждый класс можно записать в виде bA. Отсюда следует, что при естественном гомоморфизме φ группы $\{A,B\}$ на $\{A,B\}/A$ $(\{A,B\} \ni g \xrightarrow{\varphi} gA)$ подгруппа B отображается на всю $\{A,B\}/A$. Поэтому $\{A,B\}/A \cong B/H$, где H – множество элементов B, которые при φ переходят в A. Это элементы $A\cap B$ и только они. Следовательно, $\{A,B\}/A \cong B/(A\cap B)$, и теорема доказана.

Этим мы ограничим здесь изложение абстрактной теории групп. Желающим изучить её подробно мы рекомендуем книгу А.Г.Куроша./5/

II. ГРУППЫ ЛИ

I. Непрерывные группы

В дальнейшем мы будем рассматривать только непрерывные группы, так как такие группы наиболее часто встречаются в физике. Мы имеем в виду группы, которые являются одновременно топологическим пространством, причем топология этого пространства согласована с групповой операцией.

Введём более точные определения.

Определение I.

Пусть R - некоторое множество, а Σ - некоторое семейство его подмножеств, называемое системой окрестностей R.

Если для R и Σ выполняются условия:

а) для любых $a, b \in R$, $a \neq b$, найдётся такое $U \in \Sigma$, что $a \in U$, а $b \notin U$,

в) если $U, V \in \Sigma$ и $a \in U \cap V$, то найдётся $W \in \Sigma$: $a \in W \subset U \cap V$,

то R называется топологическим пространством.

Простым примером топологического пространства является обычное трёхмерное пространство, в котором под окрестностью точки M понимается шар с центром в M.

Определение 2. Пусть R и R' - два топологических пространства и $f(R \to R')$ - отображение R на R'. Отображение f называется непрерывным, если выполняется условие:

при $f(a)=a'\in R', a\in R$, для любой окрестности $U'\ni f(a)$ найдётся окрестность U, $a\in U$, такая, что $f(U)\subseteq U'$ (под $f(U)$ здесь подразумевается множество всех элементов вида $f(x)$, где $x\in U$).

Определение 3

Пусть R является одновременно группой и топологическим пространством. Групповая операция в R называется непрерывной, если для всякой пары $a, b\in R$ и для всякой окрестности $W\ni ab$ найдутся такие окрестности U и V, $U\ni a$, $V\ni b$, что $UV\subseteq W$.

Определение 4

Группа R, являющаяся одновременно и топологическим пространством, называется непрерывной (или топологической), если групповая операция непрерывна, а отображение $x\to x^{-1}$, R на R, тоже непрерывно.

2. Определение группы Ли

Среди непрерывных групп нас в особенности будут интересовать группы Ли.

Определение

Непрерывная группа G называется группой Ли, если в ней введены координаты, т.е. задано непрерывное взаимно однозначное отображение φ некоторой окрестности U единицы e группы G на область V z - мерного евклидова пространства. Иными словами, для любого $x\in U\subseteq G: \varphi(x)=(x^1,\dots,x^z)\in E_z$. При этом налагается условие: $\varphi(e)=(0,0,\dots,0)$.

С заданным таким образом соответствием связаны z функций от $2z$ переменных, а именно, если x, y, $xy\in U$, то

$xy = z = f(x,y)$ и $\varphi(z) = (z^1, \ldots, z^r)$, где

$$z^i = f^i(x,y) = f^i(x^1,\ldots,x^r, y^1,\ldots,y^r) \quad (1)$$

$$x^i = f^i(x,e) = f^i(x^1,\ldots,x^r, 0,\ldots,0) \quad (2)$$

$$y^i = f^i(e,y) = f^i(0,\ldots,0, y^1,\ldots,y^r). \quad (3)$$

Группа Ли называется дифференцируемой, если функции f^i трижды непрерывно дифференцируемы, и аналитической, если эти функции аналитичны.

3. Структурные константы

Если разложить функции f^i в ряд Тейлора, то ввиду свойств (2) и (3) некоторые члены обращаются заведомо в ноль, и разложение будет иметь специальный вид:

$$f^i = x^i + y^i + a^i_{jk} x^j y^k + f^i_{jkl} x^j x^k y^l + h^i_{jkl} x^j y^k y^l + \varepsilon^i_1, \quad (4)$$

(где $a^i_{jk} = \dfrac{\partial^2 f^i}{\partial x_j \partial y_k}$, $a^i_{kj} = \dfrac{\partial^2 f^i}{\partial x_k \partial y_j}$).

Константы

$$C^i_{jk} = a^i_{jk} - a^i_{kj} \quad (5)$$

называются **структурными константами** группы Ли.

Очевидно, что

$$C^i_{jk} = -C^i_{kj}. \quad (6)$$

Дадим другое определение структурных констант.

Пусть $x, y \in G$. Тогда коммутатор $[x, y] = q$,

$$q = x y x^{-1} y^{-1} = q(x, y) \tag{7}$$

в координатах имеет вид:

$$q^i = C^i_{jk} x^j y^k + \varepsilon^i_2. \tag{8}$$

Докажем справедливость этого соотношения. Пусть $z' = z^{-1}$, т.е. $z'z = e$. Тогда

$$0 = f^i = z^i + z'^i + a^i_{jk} z^j z'^k + \varepsilon^i_3.$$

Следовательно,

$$z'^i = -z^i - a^i_{jk} z^j(-z^k - a^k_{tl} z^t z'^l - \varepsilon^i_3) - \varepsilon^i_3 =$$
$$= -z^i + a^i_{jk} z^j z^k + a^i_{jk} z^j(a^k_{tl} z^t z'^l - \varepsilon^i_3) - \varepsilon^i_3 =$$
$$= \underline{-z^i + a^i_{jk} z^j z^k + \varepsilon^i_4 = z'^i}. \tag{9}$$

Пусть $z^* = xy$, $z' = x^{-1}y^{-1}$. Тогда из соотношений 4,5,7,9 получим $q = z^* z'$ и

$$q^i = z^{*i} + z'^i + a^i_{jk} z^{*j} z'^k + \varepsilon^i_5.$$

Но $z^{*i} = x^i + y^i + a^i_{jk} x^j y^k + \varepsilon^i_6$, $z = yx$ и координаты

$$z^i = x^i + y^i + a^i_{jk} x^k y^j + \varepsilon^i_7 = x^i + y^i + a^i_{kj} x^j y^k +$$
$$+ \varepsilon^i_7, \qquad z' = (yx)^{-1},$$

$$z'^i = -x^i - y^i - a^i_{kj} x^j y^k + a^i_{jk}(x^j + y^j + a^j_{lt} x^l y^t) \times$$
$$\times (x^k + y^k + a^k_{lt} x^l y^t) + \varepsilon^i_8 =$$
$$= -x^i - y^i - a^i_{kj} x^j y^k + a^i_{jk}(x^j + y^j)(x^k + y^k) + \varepsilon^i_9.$$

Отсюда получаем, что

$$q^i = x^i + y^i + a^i_{jk}\, x^j y^k + (-x^i - y^i - a^i_{kj}\, x^j y^k +$$

$$+ a^i_{jk}(x^j + y^j)(x^k + y^k)) + a^i_{jk}(x^j + y^j)(-x^k - y^k) + \mathcal{E}^i_2 =$$

$$= c^i_{jk}\, x^j y^k + \mathcal{E}^i_2 .$$

Теорема Ли (Понтрягин[6])

Структурные константы группы Ли (см. (5)) удовлетворяют следующим соотношениям :

$$C^p_{ij} = -C^p_{ji} \tag{10}$$

$$C^p_{is} C^s_{jk} + C^p_{js} C^s_{ki} + C^p_{ks} C^s_{ij} = 0. \tag{11}$$

Доказательство. Соотношение (10) уже доказано (см.(6)). Для доказательства соотношения (11) достаточно выразить в координатной форме закон ассоциативности умножения. Положим $u = yz$, $v = xy$, $w = xu$, $w' = vz$ и запишем в координатной форме равенство $w = w'$. Проводя все вычисления с точностью до членов третьего порядка и применяя равенство (4), получаем:

$$u^p = y^p + z^p + a^p_{jk}\, y^j z^k + f^p_{jkl}\, y^j y^k z^l +$$

$$+ h^p_{jkl}\, y^j z^k z^l + \mathcal{E}^p_{10} \; ;$$

$$v^p = x^p + y^p + a^p_{jk}\, x^j y^k + f^p_{jkl}\, x^j x^k y^l +$$

$$+ h^p_{jkl}\, x^j y^k y^l + \mathcal{E}^p_{11} \; ;$$

$$w^p = (x(yz))^p = (xu)^p = x^p + (y^p + z^p + a^p_{jk} y^j z^k + f^p_{jkl} y^j y^k z^l + h^p_{jkl} y^j z^k z^l) + a^p_{is} x^i (x^s + z^s + a^p_{jk} y^j z^k) + f^p_{ijk} x^i y^j (y^k + z^k) + h^p_{ijk} x^i (y^j + z^j)(y^k + z^k) + \varepsilon^p_{12};$$

$$w'^p = ((xy)z)^p = (vz)^p = (x^p + y^p + a^p_{jk} x^j y^k + f^p_{jkl} x^j x^k y^l + h^p_{jkl} x^j y^k y^l) + z^p + a^p_{sk} (x^s + y^s + a^s_{ij} x^i y^j) z^k + f^p_{ijk} (x^i + y^i)(x^j + y^j) z^k + h^p_{ijk} (x^i + y^i) z^j z^k + \varepsilon^p_{13}.$$

В этих выражениях члены первого порядка совпадают. Сравнение членов второго порядка даёт:

$$a^p_{jk} y^j z^k + a^p_{is} x^i y^s + a^p_{is} x^i z^s = a^p_{jk} x^j y^k + a^p_{sk} x^s z^k + a^p_{sk} y^s z^k.$$

Члены третьего порядка, которые не зависят сразу от всех координат x, y, z, равны тождественно. Сравним остальные члены:

$$a^p_{is} a^s_{jk} x^i y^j z^k + h^p_{ijk} x^i (y^j z^k + z^j y^k) = a^p_{sk} a^s_{ij} x^i y^j z^k + f^p_{ijk} (x^i y^j + y^i x^j) z^k$$

или

$$(a^p_{is}a^s_{jk}-a^p_{sk}a^s_{ij})x^iy^sz^k=$$

$$=(-h^p_{ijk}-h^p_{ikj}+f^p_{ijk}+f^p_{jik})x^iy^sz^k$$

Отсюда мы получаем равенство:

$$a^p_{is}a^s_{jk}-a^p_{sk}a^s_{ij}=-h^p_{ijk}-h^p_{ikj}+f^p_{ijk}+f^p_{jik}.$$

Исключим выражения, стоящие в правых частях. Для этого сделаем все возможные перестановки индексов i,j,k в этом равенстве и сложим полученные равенства со знаками "+" или "-", в зависимости от чётности подстановок (т.е. $-(ij)$, $-(jk)$, $-(ik)$, $+(ijk)$, $+(kji)$). Тогда получается:

$$a^p_{is}a^s_{jk}-a^p_{sk}a^s_{ik}-a^p_{js}a^s_{ik}+a^p_{sk}a^s_{jk}-a^p_{ks}a^s_{ji}+$$
$$+a^p_{si}a^s_{kj}-a^p_{is}a^s_{kj}+a^p_{sj}a^s_{ik}+a^p_{js}a^s_{ki}-a^p_{si}a^s_{jk}+$$
$$+a^p_{ks}a^s_{ij}-a^p_{sj}a^s_{ki}=0.$$

Теперь, учитывая, что $C^p_{ij}=a^p_{ij}-a^p_{ji}$, преобразуем выражение, стоящее в левой части соотношения (II):

$$C^p_{is}C^s_{jk}+C^p_{js}C^s_{ki}+C^p_{ks}C^s_{ij}=(a^p_{is}-a^p_{si})(a^s_{jk}-a^s_{kj})+$$
$$+(a^p_{js}-a^p_{sj})(a^s_{ki}-a^s_{ik})+(a^p_{ks}-a^p_{sk})(a^s_{ij}-a^s_{ji})=$$
$$=a^p_{is}a^s_{jk}-a^p_{is}a^s_{kj}-a^p_{si}a^s_{jk}+a^p_{si}a^s_{kj}+a^p_{js}a^s_{ki}-$$
$$-a^p_{js}a^s_{ik}-a^p_{sj}a^s_{ki}+a^p_{sj}a^s_{ik}+a^p_{ks}a^s_{ij}-a^p_{sk}a^s_{ij}+$$
$$+a^p_{sk}a^s_{ji}-a^p_{ks}a^s_{ji}.$$

Сравнивая это выражение с предыдущим, убеждаемся в справедливости соотношения (II). Теорема доказана.

В дальнейшем эти соотношения используются для построения алгебры Ли группы Ли.

Ш. АЛГЕБРЫ ЛИ

I. Определение алгебры Ли

Пусть R - r - мерное векторное пространство над полем K (под K будем подразумевать поле действительных или комплексных чисел), в котором установлена операция коммутирования, т.е. для любых двух a, $b \in R$ определён вектор $c = [a, b] \in R$, называемый коммутатором a и b. При этом операция удовлетворяет условиям:

$$[\alpha a + \alpha' a', b] = \alpha [a, b] + \alpha' [a', b], \quad \alpha, \alpha' \in K, \tag{I2}$$

$$[a, b] = -[b, a] \tag{I3}$$

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0 \tag{I4}$$

(тождество Якоби). Пространство с заданной таким образом операцией называется алгеброй Ли над полем K (действительной или комплексной).

Пусть $e_1, e_2, \dots e_r$ - базис R. Тогда $[e_j, e_k] = C^i_{jk} e_i$. Если $a = a^j e_j$, $b = b^k e_k$, (15)

то, ввиду линейности коммутирования,

$$[a, b] = [a^j e_j, b^k e_k] = a^j b^k [e_j, e_k] =$$

$$= a^j b^k C^i_{jk} e_i \quad \text{и} \quad [a, b]^i = a^j b^k C^i_{jk} \tag{I5'}$$

(I5)

Константы $\overline{C}^{i}_{jk}$ называются <u>структурными константами</u> алгебры Ли.

Очевидно, что

$$\overline{C}^{i}_{jk} = -\overline{C}^{i}_{kj}.$$

(I6)

Из соотношения (I4) вытекает, что

$$\overline{C}^{p}_{is}\,\overline{C}^{s}_{jk} + \overline{C}^{p}_{js}\,\overline{C}^{s}_{ki} + \overline{C}^{p}_{ks}\,\overline{C}^{s}_{ij} = 0.$$

(I7)

Действительно:

$$0 = [e_i,[e_j,e_k]] + [e_j,[e_k,e_i]] + [e_k,[e_i,e_j]] =$$

$$= [e_i, \overline{C}^{s}_{jk} e_s] + [e_j, \overline{C}^{s}_{ki} e_s] + [e_k, \overline{C}^{s}_{ij} e_s] =$$

$$= \overline{C}^{s}_{jk}[e_i,e_s] + \overline{C}^{s}_{ki}[e_j,e_s] + \overline{C}^{s}_{ij}[e_k,e_s] =$$

$$= \overline{C}^{s}_{jk}\,\overline{C}^{p}_{is} e_p + \overline{C}^{s}_{ki}\,\overline{C}^{p}_{js} e_p + \overline{C}^{s}_{ij}\,\overline{C}^{p}_{ks} e_p = 0$$

Отсюда заключаем, что

$$\overline{C}^{s}_{jk}\,\overline{C}^{p}_{is} + \overline{C}^{s}_{ki}\,\overline{C}^{p}_{js} + \overline{C}^{s}_{ij}\,\overline{C}^{p}_{ks} = 0.$$

Наоборот, если в некотором z - мерном пространстве с базисом $e_1, \ldots, e_z$ ввести операцию коммутирования сначала для базисных векторов: $[e_j, e_k] = \overline{C}^{i}_{jk} e_i$, где $\overline{C}^{i}_{jk}$

удовлетворяют условиям (I6) и (I7), то, очевидно, для базисных элементов оудет выполняться соотношение (I4). Далее, если ооообщить эту операцию на всё пространство, считая, что $[a^j e_j, b^k e_k] = a^j b^k [e_j, e_k]$, то получится операция коммутирования, определённая на всём пространстве и удовлетворяющая условиям (I2) (I3) и (I4).

Таким образом, задание констант C_{jk}^{i}, удовлетворяющих соотношениям (I6) и (I7), определяет в r - мерном пространстве алгебру Ли.

2. <u>Построение алгебры Ли группы Ли</u>

Введём понятие кривой в группе Ли. Пусть в группе Ли G дано множество $x(t) = (x^1(t), \cdots, x^r(t))$, где $t \in [\alpha, \beta] \ni 0$, $x^i(0) = 0 \ (i=1, \cdots, r)$. Оно называется кривой в G, если функции $x^i(t)$ непрерывны. Кривая $x(t)$ называется дифференцируемой, если существуют $\frac{dx^i(t)}{dt}\big|_{t=0}$. Вектор $a = (a^1, \cdots, a^r) = \left(\frac{dx^1(t)}{dt}\big|_{t=0}, \cdots, \frac{dx^r(t)}{dt}\big|_{t=0}\right)$ называется <u>касательным вектором</u> и кривой $x(t)$.

Теперь займёмся построением алгебры Ли группы Ли. Справедлива следующая

Теорема (Понтнягин /6/, стр. 380).

Пусть G - r - мерная группа Ли. Поставим в соответствие каждой дифференцируемой кривой $x(t)$ её касательный вектор

$$a = (a^1, \cdots, a^r) \quad \left(a^i = \frac{dx^i(t)}{dt}\Big|_{t=0}\right).$$

Таким образом, группе G соответствует r -мерное векторное пространство R (этих векторов). Установим в R операцию коммутирования. Пусть a и b — касательные векторы к кривым $x(t)$ и $y(t)$.

Положим

$$q(t) = x(t)y(t)x^{-1}(t)y^{-1}(t).$$

Тогда $q(t)$ определяет кривую в G. Введём на этой кривой параметр s, положив $t=\sqrt{s}$. Полученная кривая $q(\sqrt{s})$ определена для неотрицательных значений параметра s и имеет касательный вектор c. Определим коммутатор a и b — $[a,b]=c$. Установленная таким образом операция коммутирования в R удовлетворяет условиям (I2), (I3) и (I4). Полученная (действительная) алгебра Ли называется <u>Алгеброй Ли группы G</u>: $G \to R$. Структурные константы алгебры R и группы G в соответственных координатах совпадают.

Доказательство.

Введём в G некоторые дифференцируемые координаты и вычислим вектор c в координатной форме $c^i = \lim\limits_{t\to 0}\frac{q^i(t)}{t^2}$. В силу соотношения (3), получим:

$$c^i = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\left(c^i_{jk}x^j(t)y^k(t) + \varepsilon^i_7(t)\right) = c^i_{jk}a^j b^k$$

(ε_7 имеет третий порядок малости относительно t).

Итак, $c^i = [a,b]^i = c^i_{jk}a^j b^k$.

Сравнив это с соотношением (I5), убеждаемся в том, что структурные константы группы Ли G и алгебры Ли R совпадают. В силу соотношений, которым удовлетворяют структурные константы G, заключаем, что R действительно является алгеброй Ли.

<u>Замечание</u>: Элементы базиса R называются обычно генераторами или инфинитезимальными операторами группы G.

Заключение

Роль алгебр Ли состоит в том, что возможен обратный переход от алгебры Ли к группе Ли. Однако одной и той же алгебре Ли могут соответствовать несколько групп Ли, для которых она является алгеброй Ли. Все эти группы совпадают с точностью до локального изоморфизма. Две группы Ли G и G' считаются локально изоморфными, если существуют такие окрестности единиц $U \subseteq G$ и $V \subseteq G'$, что, при некотором непрерывном отображении $f : U \to V$, для любых $x, y \in U$, при $xy \in U$, $f(x)f(y) = f(xy) \in V$.
То же самое справедливо, если две алгебры Ли R и R' изоморфны. Причём, под изоморфизмом алгебр Ли подразумевается взаимно однозначное соответствие φ :

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b), \quad \varphi[a,b] = [\varphi(a), \varphi(b)]$$

(при тех же соотношениях φ называется гомоморфизмом алгебр Ли, если оно только однозначно).

IУ. СВЯЗЬ МЕЖДУ АЛГЕБРАМИ ЛИ И ГРУППАМИ ЛИ. ТЕОРЕМЫ ЛИ

I. Первая прямая и вторая прямая теоремы Ли

Если группа Ли задана с помощью функций f^i :

$$x'^i = f^i(x^1, \ldots, x^r, a^1, \ldots, a^r) \qquad (I)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, r),$$

то её можно рассматривать как группу преобразований переменных x^i.

Рассмотрим более общую группу преобразований

$$x^{i'} = f^i(x^1, \dots, x^n; a^1, \dots, a^r)$$
$$(i = 1, 2, \dots, n). \qquad (2)$$

Функции f^i должны удовлетворять соотношениям:

$$f^i(f^1(\bar{x}, \bar{a}), \dots, f^n(\bar{x}, \bar{a}); b^1, \dots, b^r) =$$
$$f^i(x^1, \dots, x^n; \varphi^1(\bar{a}, \bar{b}), \dots, \varphi^r(\bar{a}, \bar{b})) \qquad (3)$$
$$(\bar{a} = (a^1, \dots, a^r), \bar{b} = (b^1, \dots, b^r), \bar{x} = (x^1, \dots, x^n)),$$

где $\varphi^i(\bar{a}, \bar{b})$ - система аналитических функций.

Будем предполагать, что преобразования обратимы, т.е.

$$\frac{d(f^1, \dots, f^n)}{d(x^1, \dots, x^n)} \neq 0$$

(в окрестности некоторой точки) и что параметры $a^1, \dots, a^r$ существенны, т.е. нет таких s $(s < r)$ функций

$$b^j = \psi^j(a^1, \dots, a^r), (j = 1, \dots, s),$$

что функции f^i выражаются только через x^i и b^j.

Из того, что параметры $a^1, \dots, a^r$ существенны, следует, что

$$\frac{d(\varphi^1, \dots, \varphi^r)}{d(a^1, \dots, a^r)} \neq 0.$$

Поэтому, если фиксировать значения

$$\varphi^i(\bar{a}, \bar{b}) = c^i \ (i = 1, \dots, r),$$

то их можно выразить b^μ через параметры a^λ.

Далее, можно показать, что функции $x^{i'} = f^i(\bar{x}, \bar{a})$

удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial x'^{b}}{\partial a^{\lambda}} + W_i^{\,b}\,\frac{\partial f^{i}}{\partial b^{\mu}}\,\frac{\partial b^{\mu}}{\partial a^{\lambda}} = 0, \qquad \left(\frac{\partial f^{i}}{\partial b^{\mu}} = \frac{\partial f^{i}(\bar{x}', \bar{b})}{\partial b^{\mu}}\right), \tag{4}$$

где $W_i^{\,b}$ – элементы матрицы

$$\left\| \frac{\partial f^{i}(\bar{x}')}{\partial x'^{j}} \right\|^{-1}.$$

Введём обозначения

$$-W_i^{\,b}\,\frac{\partial f^{i}}{\partial b^{\mu}} = \xi_{\mu}^{b}(\bar{x}'),$$

$$\frac{\partial b^{\mu}}{\partial a^{\lambda}} = \psi_{\lambda}^{\mu}(\bar{a}),$$

перепишем уравнения (4) так:

$$\frac{\partial x'^{b}}{\partial a^{\lambda}} = \xi_{\mu}^{b}(\bar{x}')\,\psi_{\lambda}^{\mu}(\bar{a}). \tag{5}$$

Операторы

$$X_{\mu}(F) = \xi_{\mu}^{b}(\bar{x})\,\frac{\partial F}{\partial x^{b}} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, r) \tag{6}$$

являются инфинитезимальными операторами группы преобразований, заданной уравнениями (I).

Сформулируем теперь первую основную теорему Ли.

Теорема I (первая прямая теорема Ли).

Если уравнения (I) задают r - параметрическую группу Ли, то входящие в них функции f^{i} удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (5), $\det\|\psi_{\lambda}^{\mu}(\bar{a})\| \neq 0$, а соответствующие им операторы (6) линейно независимы (полное доказательство этой теоремы, как и других теорем этой главы, можно найти в книге Н.Г.Чеботарёва /7/).

Операторы (6) порождают алгебру Ли. Иными словами, справедлива

Теорема 2 (вторая прямая теоремы Ли). Операторы (6) удовлетворяют соотношениям

$$[X_i, X_j]F = C_{ij}^s X_s(F). \tag{7}$$

2. Первая обратная теорема Ли и вторая обратная теорема Ли.

Теоремы I и 2 допускают обращение. Систему уравнений (5) можно преобразовать в систему уравнений в полных дифференциалах:

$$d' x'^{i} = \xi^{i}_{\mu}(\bar{x}') \psi'^{\mu}_{\lambda}(\bar{a}) da^{\lambda}. \tag{8}$$

Напомним, что интегралом системы такого вида называется функция $F(\bar{x}', \bar{a})$, которая обращается в постоянную, если вместо $\bar{x}'$ подставить решение системы (8). Система интегралов $F_i(\bar{x}', \bar{a})(i=1,\dots,n)$ называется независимой в некоторой области, если функциональная матрица

$$\frac{\partial(F_1,\dots,F_n)}{\partial(x'^1,\dots,x'^n,a^1,\dots,a^r)}$$ имеет ранг n в этой области.

Теперь мы сформулируем первую обратную теорему Ли.

Теорема I'. Система уравнений типа (8), допускающая n независимых интегралов, имеет решения, определяющие r - параметрическую группу Ли.

Теорема 2 также допускает обращение.

Теорема 2′. Если даны r линейно независимых операторов $X_i(F)$, удовлетворяющих условиям

$$[X_i, X_j](F) = C_{ij}^s X_s(F),$$

где C_{ij}^s - константы, то им соответствует r - параметрическая группа Ли.

3. Третья теорема Ли. Сформулируем последнее предложение этой главы.

Теорема 3. (третья основная теорема Ли). Система из r^3 констант C_{ij}^s $(s, i, j = 1, 2, \dots, r)$ является системой структурных констант некоторой r - параметрической группы тогда и только тогда, когда C_{ij}^s удовлетворяют соотношениям

$$C_{ij}^s = -C_{ji}^s$$

$$C_{ij}^s C_{ks}^t + C_{jk}^s C_{is}^t + C_{ki}^s C_{js}^t = 0.$$

У. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП

I. Гильбертово пространство и операторы

Пусть в некотором множестве H задана бинарная операция, называемая сложением, т.е. для любых a, $b \in H$ однозначно определен элемент $c \in H$:

$$c = a + b$$

и операция умножения на элементы некоторого поля K ; для любых $\alpha \in K$ и $a \in H$ существуют элементы αa , $a\alpha \in H$, $\alpha a = a\alpha$ (под K в дальнейшем будем подразумевать поле действительных или комплексных чисел). Множество H с этими операциями называется <u>векторным пространством</u> над полем K , если, по сложению, оно является абелевой группой (для любых $x, y, z \in H$, $(x+y)+z = x+(y+z)$, $x+y = y+x$; существует единственный элемент "0" со свойствами: $0+x = x+0 = x$, для любого $x \in H$; для любого $z \in H$ существует единственный элемент $(-z)$, для которого $z+(-z) = (-z)+z = 0$), а операция умножения на элементы из K обладает свойствами: $(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a$, $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$, для любых $\alpha, \beta \in K$ и любого $a \in H$; $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$, для любого $\alpha \in K$ и любых $a, b \in H$, $1 \cdot a = a$ $(1 \in K)$.

Векторное пространство H называется <u>гильбертовым пространством</u>, если в нём введено <u>скалярное произведение</u>. Скалярным произведением произвольной пары элементов $a, b \in H$ называется число (вообще говоря, комплексное), которое обозначается (a, b) и обладает следующими свойствами:

$$(\alpha a, b) = \alpha(a, b),$$

$$(a, b) = \overline{(b, a)},$$

(где черта означает комплексное сопряжение); для любых $a, b, c \in H$ $(a+b, c) = (a, c) + (b, c)$, $(a, a) > 0$ при $a \neq 0$. Очевидно, что $(a, a) = 0$ при $a = 0$. Таким образом, $(a, a) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$. Легко видеть, что

$$(a, \beta b) = \bar{\beta}(a, b) \text{ и}$$

$$(a, b+c) = (a, b) + (a, c).$$

Так как, при любом $a \in H$, $(a,a) \geq 0$, то можно определить <u>норму</u> (или длину) элемента a, обозначаемую $\| a \|$:

$$\| a \| = \sqrt{(a,a)}.$$

Фундаментальное значение имеет следующее <u>неравенство Шварца</u> (см. /8/):

$$|(f, g)| \leq \| f \| \| g \|. \tag{1}$$

Используя неравенство Шварца, можно получить, также имеющее большое значение, <u>неравенство треугольника</u>

$$\| f + g \| \leq \| f \| + \| g \| \quad \text{,для} \tag{2}$$

любых $f, g \in H$.

Действительно, $\| f + g \|^2 = (f+g, f+g) =$

$$= (f, f) + (f, g) + (g, f) + (g, g) \leq \| f \|^2 +$$

$$+ 2 \| f \| \| g \| + \| g \|^2 = (\| f \| + \| g \|)^2,$$

откуда получается неравенство (2).

С введением нормы в пространстве H появляется понятие близости элементов a и b относительно $\| a - b \|$. Это позволяет ввести понятие предела. Пусть дана последовательность $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ элементов H. Элемент u называется пределом этой последовательности $(u = \lim\limits_{n \to \infty} u_n)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся n^* такое, что для любого $n > n^*$

$$\| u_n - u \| < \varepsilon.$$

Если предел $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = U$ существует, то последовательность U_n является фундаментальной, т.е. для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое n^*, что для любых двух $n, m > n^*$ выполняется неравенство: $\|U_m - U_n\| < \varepsilon$.

Действительно, пусть для некоторого $\varepsilon > 0$ выбрано такое n^*, что для любого $n > n^*$ $\|U_n - U\| < \frac{\varepsilon}{2}$, тогда для любых $n, m > n^*$ будет

$$\|U_n - U_m\| = \|(U_n - U) - (U_m - U)\| \le \|U_n - U\| + \|U_m - U\| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Гильбертово пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность имеет предел (сходится), называется полным. В дальнейшем под гильбертовыми пространствами мы всегда будем подразумевать полные гильбертовы пространства.

Гильбертово пространство с введённой в нём нормой становится топологическим пространством (см. гл П), если под окрестностью элемента $a \in H$ понимать множество элементов x, удовлетворяющее неравенству

$$\| x - a \| < \delta.$$

Пусть $M \subseteq H$ - некоторое подмножество $H \ni a$. Элемент a - называется предельной точкой множества M, если в любой его окрестности содержится хотя бы один элемент множества M. Подмножество $M \subseteq H$ называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки. При этом само H оказывается замкнутым.

Подмножество A пространства H называется подпространством H, если, по сложению , A - подгруппа H,

$$((A+B)+C)x=(A+B)x+Cx=(Ax+Bx)+Cx=$$
$$=Ax+(Bx+Cx)=Ax+(B+C)x=$$
$$=(A+(B+C))x.$$

Существует оператср O : $Ox\equiv 0$.

Для каждого оператора A существует противоположный оператор $(-A)$: $(-A)x=-(Ax)$.

Отсюда получаем, что

$$A+(-A)=O.$$

Единственность этих операторов вытекает из второго определения группы (см. гл. I).

Таким образсм, по сложению, множество линейных операторов в гильбертовом пространстве составляет группу. Она абелева: $A+B=B+A$ (для любых двух операторов A и B), так как

$$(A+B)x=Ax+Bx=Bx+Ax=(B+A)x.$$

Покажем, что $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$ для любого $\alpha\in K$:

$$(\alpha(A+B))x=\alpha((A+B)x)=\alpha(Ax+Bx)=\alpha(Ax)+\alpha(Bx)=$$
$$=(\alpha A)x+(\alpha B)x=(\alpha A+\alpha B)x.$$

Кроме того, для лкбых $\alpha,\beta\in K$, $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$:

$$(\alpha(\beta A))x=\alpha(\beta(Ax))=\alpha\beta(Ax)=((\alpha\beta)A)x.$$

Итак, получилось, что множество линейных операторов в H является векторным пространством над K .

Введём в прсстранстве линейных операторов операцию <u>умножения операторов</u> так:

$$(AB)x=A(Bx).$$

Эта операция связана со сложением следующим образом:

$$A(B+C)=AB+AC,$$

$$(B+C)A=BA+CA.$$

Проверим первое равенство:

$$(A(B+C))x=A((B+C)x)=A(Bx+Cx)=$$

$$=A(Bx)+A(Cx)=(AB)x+(AC)x=(AB+AC)x.$$

Второе проверяется аналогично. Умножение операторов ассоциативно $A(BC)=(AB)C$:

$$(A(BC))x=A((BC)x)=A(B(Cx))=AB(Cx)=$$

$$=((AB)C)x.$$

Относительно операции умножения существует <u>единичный оператор</u> E - это <u>тождественный оператор</u> : $Ex\equiv x,\ x\in H$. Очевидно, что $AE=EA=A$ для любого линейного оператора A и что E - единственный оператор с такими свойствами. Если для некоторого оператора A существует такой оператор B, что $AB=BA=E$, то B называется обратным и обозначается $B=A^{-1}$. Ввиду ассоциативности произведения мы заключаем, что обратный оператор, если он существует, единственен (см. гл I). Также, ввиду ассоциативности произведения, может случиться, что некоторое подмножество линейных операторов составляет группу, но к этому мы ещё вернёмся.

Пользуясь операциями умножения и сложения, можно ввести новую операцию <u>коммутирования</u>. Для любых двух операторов A

и B введём их коммутатор $[A,B]$ так:

$$[A,B]=AB-BA.$$

Очевидно, что $[A,B]=-[B,A]$,

$$[\alpha A,B]=\alpha(AB)-B(\alpha A)=\alpha(AB)-\alpha(BA)=\alpha[A,B],$$

$$[A+B,C]=(A+B)C-C(A+B)=(AC-CA)+(BC-CB)=$$
$$=[A,C]+[B,C].$$

Покажем, что операция $[A,B]$ удовлетворяет тождеству Якоби (см. гл. Ш (I4)):

$$[A,[B,C]]+[B,[CA]]+[C,[A,B]]=0.$$

Действительно, так как

$$[A,[B,C]]=A[B,C]-[B,C]A=ABC-ACB-BCA+CBA,$$

$$[B,[C,A]]=B[C,A]-[C,A]B=BCA-BAC-CAB+ACB,$$

$$[C,[A,B]]=C[A,B]-[A,B]C=CAB-CBA-ABC+BAC,$$

то, сложив их, получим требуемое равенство. Сравнивая эти свойства операции $[A,B]$ с формулами (I2), (I3) и (I4) главы Ш, мы убеждаемся, что, относительно операций сложения, умножения на число и коммутирования, множество линейных операторов в гильбертовом пространстве является алгеброй Ли (только не обязательно конечномерной). В дальнейшем нас будут интересовать подалгебры этой алгебры, т.е. такие подмножества, в которых данные операции над их элементами не выводят за их пределы.

Пусть A - линейный оператор в гильбертовом пространстве H. A называется <u>ограниченным оператором</u>, если существует такое число $C \geq 0$, что $\|Ax\| \leq C\|x\|$ для любого $x \in H$. Нижняя грань таких чисел называется <u>нормой оператора</u> и обозначается $\|A\|$. Таким образом, $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$.

Норма оператора удовлетворяет двум важным неравенствам:

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

Действительно:

$$\|(A+B)x\| = \|Ax+Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq$$

$$\|A\|\|x\| + \|B\|\|x\| = (\|A\| + \|B\|)\|x\|,$$

$$\|(AB)x\| \leq \|A\|\|Bx\| \leq (\|A\|\|B\|)\|x\|.$$

Из последнего неравенства видно, что произведение ограниченных операторов - ограниченный оператор.

С введением нормы пространство линейных ограниченных операторов в H становится топологическим, если считать окрестностью оператора A множество операторов X, удовлетворяющих неравенству

$$\|A-X\| < \varepsilon.$$

Пусть M - некоторое подмножество в пространстве H. M называется <u>линейно независимым</u>, если из любого соотношения:

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = 0, \quad a_i \in M, \quad \alpha_i \in K,$$

следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. В противном случае M называется <u>линейно зависимым</u>.

Другими словами, множество M называется линейно независимым, если каждая его конечная подсистема линейно независима (здесь подразумевается, что M может быть и бесконечным).

Всякую непустую линейно-независимую подсистему в H можно расширить до максимальной, т.е. такой линейно-независимой системы, которую нельзя расширить так, чтобы она вновь была линейно независимой. Пусть M – максимальная линейно-независимая система в H, тогда для любого элемента $a \in H$, найдётся такое $0 \neq \alpha \in K$ и такие элементы $a_1, \dots, a_m \in H$, что

$$\alpha a + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m = 0.$$

Отсюда следует, что $a = -\frac{\alpha_1}{\alpha} a_1 - \dots - \frac{\alpha_m}{\alpha} a_m$.

Таким образом, любой элемент H линейно выражается через элементы M. В этом случае M называется <u>алгебраическим базисом</u> H. Легко показать, что для любого элемента запись через элементы базиса однозначна. Если базис пространства H конечен, то H называется <u>конечномерным</u>, а в противном случае-<u>бесконечномерным</u>.

Пусть A – линейный оператор в гильбертовом пространстве H. Если существует такой оператор B, что $(Ax, y) = (x, By)$ для любых $x, y \in H$, то B называется сопряжённым с A и обозначается $B = A^*$ (по поводу существования сопряжённого оператора см. /3/).

Операция сопряжения операторов связана с их сложением и умножением так:

$$(AB)^* = B^*A^*$$
$$(A+B)^* = A^* + B^*.$$

Действительно:

$$((A+B)x,y) = (Ax,y)+(Bx,y) = (x,A^*y)+(x,B^*y) = (x,(A^*+B^*)y),$$
$$(ABx,y) = (Bx,A^*y) = (x,B^*A^*y).$$

Кроме того, операция сопряжения обладает свойством:

$$(A^*)^* = A$$
$$\left((A^*x,y) = (\overline{y,A^*x}) = (\overline{Ay,x}) = (x,Ay)\right).$$

Отсюда и из неравенства $\|A^*\| \leq \|A\|$

$$\left(|(A^*x,A^*x)| = \|A^*x\|^2 = |(AA^*x,x)| \leq \|A\|\|A^*x\|\|x\|\right)$$

следует, что $\|A^*\| = \|A\|$.

Оператор A называется эрмитовым (или самосопряжённым), если $A^* = A$ и <u>антиэрмитовым</u>, если $A^* = -A$.

Оператор U называется <u>унитарным</u>, если $(Ux,Uy) = (x,y)$, для любых $x,y \in H$. Покажем, что если оператор U унитарен, то $U^* = U^{-1}$. Действительно, $(x,y) = (Ux,Uy) = (U^*Ux,y) = (x,U^*Uy)$, для любых $x,y \in H$. Следовательно, $U^*U = E$ и $U^* = U^{-1}$ (очевидно, что справедливо и обратное: из $U^* = U^{-1}$ следует, что $(Ux,Uy) = (x,y)$).

Отметим, что норма унитарного оператора равна единице и что произведение унитарных операторов - унитарный оператор

$$\left(\|x\| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{(Ux,Ux)} = \|Ux\|,\ (U_1U_2)^* = U_2^*U_1^* = U_2^{-1}U_1^{-1} = (U_1U_2)^{-1}\right.$$

Пусть H и H' – два гильбертовых пространства и A – взаимно однозначное непрерывное и линейное отображение H на H':

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay \in H'.$$

Отображение A называется изометрическим (или унитарным), если оно сохраняет скалярное произведение, т.е.

$$(Ax, Ay) = (x, y) \qquad \text{для любых } x, y \in H.$$

Пусть задано семейство линейных операторов $A(t)$, где $t \in [a, b] \ni c$. Оператор A_c называется <u>пределом</u> $A(t)$ при $t \to c$, обозначается $A_c = \lim\limits_{t \to c} A(t)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что как только $|t - c| < \delta$, так $\|A(t) - A_c\| < \varepsilon$. Пользуясь понятием предела операторов, можно определить производную оператора в точке:

$$\frac{dA(t)}{dt}\Big|_{t=c} = \lim_{(t-c)\to 0} \frac{A(t) - A(c)}{t - c}.$$

2. <u>Понятие представления группы</u>

Пусть дана группа G, гильбертово пространство H и (непрерывное, если G непрерывна) отображение φ: $G \to T(g)$ группы G в множество линейных ограниченных операторов пространства H. Отображение φ называется (линейным) <u>представлением</u> группы G в пространстве H, если оно удовлетворяет условию: $T(g_1 g_2) = T(g_1) T(g_2)$, для любых $g_1, g_2 \in G$, т.е. $\varphi(G)$ является некоторым гомоморфным образом группы G (см. гл. I).

Очевидно, что если $T(g)$ — представление группы G, то $T(e) = E$ (тождественный оператор), а $T(g^{-1}) = T^{-1}(g)$.

Представление φ называется <u>точным</u>, если $\ker \varphi = e$, и <u>тривиальным</u>, если $T(g) \equiv E$.

Подпространство $H_1 \subseteq H$ называется <u>инвариантным</u> относительно представления $T(g)$, если $T(g)x \in H_1$ для любого $x \in H_1$. Подпространство $H_1 \subseteq H$ называется собственным, если $H_1 \neq O, H_1 \neq H$.

Представление группы G в пространстве H называется <u>неприводимым</u>, если в H нет собственных замкнутых подпространств, инвариантных относительно этого представления.

В противном случае представление называется <u>приводимым.</u>

Если пространство представления конечномерно, то оно называется конечномерным, а в противном случае - <u>бесконечномерным</u>.

Если группа G непрерывна, то на соответствие φ накладывается ещё условие непрерывности.

Представление группы G называется <u>унитарным</u>, если операторы $T(g)$ унитарны в пространстве H, т.е. $(T(g)x, T(g)y) = (x, y)$, для любых $x, y \in H, g \in G$. Именно эти представления будут интересовать нас в дальнейшем.

Если пространство $H_1 \subset H$ инвариантно относительно унитарного представления группы $T(g)$, то его ортогональное дополнение H_2 также инвариантно относительно $T(g)$. Действительно, пусть $x \in H_1, y \in H_2$, тогда $(T(g)y, x) = (y, T(g^{-1})x)$, но $T(g^{-1})x \in H_1$, следовательно, $(y, T(g^{-1})x) = 0$ и $(T(g)y, x) = 0$, т.е. $T(g)y \in H_2$.

Пусть даны пространства H_1 и H_2 и линейное взаимно однозначное и непрерывное отображение A : $H_1 \xrightarrow{на} H_2$, тогда оператор

$$Q(g) = A\,T(g)A^{-1}, \tag{3}$$

где $T(f)$ - оператор представления группы G в пространстве H_1, действует в H_2. Покажем, что $Q(f)$ является представлением G в пространстве H_2. Действительно,

$$Q(f_1)Q(f_2) = (A\,T(f_1)A^{-1})(A\,T(f_2)A^{-1}) =$$

$$= A(T(f_1)T(f_2))A^{-1} = A\,T(f_1 f_2)A^{-1} = Q(f_1 f_2).$$

Если представления $Q(f)$ и $T(f)$ связаны соотношением (3), то их называют <u>эквивалентными.</u> Если оператор A, фигурирующий в формуле (3), изометричен, то $Q(f)$ и $T(f)$ называются <u>унитарно-эквивалентными</u> представлениями группы G. Очевидно, что понятие эквивалентности (унитарной) симметрично и транзитивно, т.е. представление $T(f)$ эквивалентно самому себе (унитарно) и если $T(f)$ эквивалентно $Q(f)$, а $Q(f)$ эквивалентно $K(f)$ (унитарно), то $T(f)$ эквивалентно (унитарно) $K(f)$.

Поэтому все представления группы G распадаются на классы эквивалентных (унитарно) между собой представлений.

Пусть G - группа Ли, а $T(f)$ - её представление в пространстве H. Если $f(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ - кривая в G, то в представлении ей соответствует множество $T(f(t)) = T(t)$, называемое также кривой, причём $T(0) = E$. Если существует оператор

$$\left.\frac{d\,T(f(t))}{dt}\right|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{T(f(t)) - E}{t},$$

то он называется <u>инфинитезимальным оператором представления</u>. Однозначное соответствие

$$\frac{d\,f(t)}{dt}\Big|_{t=0} = a = (x_1'(0), \dots, x_l'(0)) \to T = \frac{d\,T(f(t))}{dt}\Big|_{t=0}$$

между касательными векторами кривых $f(t)$ и инфинитезимальными операторами обладает свойствами:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \to \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$$

$$[a_1, a_2] \to [T_1, T_2] = T_1 T_2 - T_2 T_1$$

при $a_1 \to T_1$, $a_2 \to T_2$ (здесь этот факт остаётся без доказательства). Таким образом, инфинитезимальные операторы представления образуют алгебру Ли, гомоморфную алгебре Ли группы G. При этом они образуют <u>представление</u> алгебры Ли группы G.

Покажем, что если представление $T(f)$ унитарно, то инфинитезимальные операторы представления антиэрмитовы.

Пусть $T(f(t)) = T(t)$ и $\frac{d\,T(t)}{dt}\Big|_{t=0} = T$. Так как $(T(t)x, T(t)y) = (x, y)$, то

$$0 = \frac{d}{dt}\big(T(t)x, T(t)y\big) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big((T(t)x, T(t)y) - (Ex, Ey)\big) =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\Big(\big((T(t)x, T(t)y) - (Ex, T(t)y)\big) + \big((Ex, T(t)y) - (Ex, Ey)\big)\Big) =$$

$$= (Tx, y) + (x, Ty)$$

(если Tx и Ty определены).

Итак, $(Tx, y) + (x, Ty) = 0$, или

$(Tx, y) + (T^*x, y) = ((T + T^*)x, y) = 0$,

при любых x, y. Следовательно,

$$T + T^* = 0 \quad \text{или} \quad T^* = -T \text{, т.е.}$$

T - антиэрмитов оператор.

Далее, если замкнутое подпространство $H_1 \subseteq H$ инвариантно относительно операторов представления $T(g)$, то оно также инвариантно относительно инфинитезимальных операторов представления.

Если $T(t)x \in H_1 \ni x$, то при любом t

$\left(\frac{T(t)-E}{t}\right)x \in H_1$, $\left\|\frac{T(t)-E}{t} - T\right\| < \varepsilon$

как только $|t| < \delta$, поэтому

$$\left\|\left(\frac{T(t)-E}{t}x - Tx\right)\right\| = \left\|\left(\frac{T(t)-E}{t} - T\right)x\right\| \leq$$

$$\leq \left\|\frac{T(t)-E}{t} - T\right\| \|x\| < \varepsilon \|x\|.$$

Отсюда видно, что в любой окрестности элемента Tx содержится элемент H, т.е. Tx - предельная точка H_1. А так как H_1 замкнуто, то $Tx \in H_1$. Отсюда получаем, что если H_1 - инвариантное подпространство H относительно представления $T(g)$, то оно инвариантно и относительно алгебры инфинитезимальных операторов представления. Таким образом если представление алгебры Ли группы Ли G неприводимо, то, соответствующее ей представление группы тоже неприводимо. Именно поэтому при отыскании представлений группы Ли G

можно свести эту задачу к более простой - к отысканию представлений её алгебры Ли.

Если найдено какое-то представление группы Ли G и мы убедились в том, что ни одно собственное пространство представления не инвариантно относительно базиса алгебры её инфинитезимальных операторов, то отсюда следует, что оно неприводимо.

3. <u>Дополнения к разделу 2</u>

Здесь мы более подробно осветим условия, при которых унитарные представления групп Ли неприводимы.

Теорема I.

Пусть A - эрмитов или антиэрмитов оператор в гильбертовом пространстве H $(A^* = \pm A)$ и $H_1 \subseteq H$ инвариантно относительно A, тогда его ортогональное дополнение также инвариантно относительно A.

<u>Доказательство</u>

Пусть $H = H_1 + H_2$, где H_2 - ортогональное дополнение H_1, и $x \in H_1$, $y \in H_2$. Тогда

$(Ay, x) = \pm(y, Ax) = 0$, так как $Ax \in H_1$.

Следовательно, $Ay \in H_2$.

Теорема 2.

Пусть A - эрмитов или антиэрмитов оператор в гильбертовом пространстве H. Для того, чтобы замкнутое подпространство $H_1 \subseteq H$ было инвариантно относительно A, необходимо и достаточно выполнение условия $AP = PA$, где P - оператор проектирования на H_1 $(P^2 = P)$.

<u>Доказательство</u>

I. Пусть $AH_1 \subseteq H_1$, $H = H_1 + H_2$, где H_2 -

ортогональное дополнение H_1. Ввиду теоремы I, $AH_2 \subseteq H_2$. Пусть $h \in H$ - произвольный элемент H. Покажем, что $PAh = APh$. Пусть $h = x + y$, где $x \in H_1$, $y \in H_2$. Так как P - оператор проектирования на H_1, то $x = Ph$. Подействуем оператором A на h: $Ah = Ax + Ay$, где $Ax \in H_1$, $Ay \in H_2$. В силу этого, $PAh = PAx = Ax = APh$. Отсюда, $PAh = APh$ и, в силу произвольности h, $PA = AP$.

2. Пусть $AP = PA$, где P - оператор проектирования на H_1 ($PH_1 = H_1$) и $H = H_1 + H_2$, где H_2 - ортогональное дополнение H_1. Допустим, что для $h \in H_1$, $Ah = x + y$, где $x \in H_1$, $y \in H_2$. Но $x = P(Ah) = APh = Ah$, так как $Ph = h$. Отсюда следует, что $y = 0$ и $Ah \in H_1$. Теорема доказана.

Замечание.

Для того, чтобы оператор P был проекционным, кроме условия $P^2 = P$ необходимо ещё — $P^* = P$. Действительно, пусть $H = H_1 + H_2$, $H_1 \perp H_2$ (H_1 ортогонально H_2) и P - оператор проектирования на H_1. Рассмотрим два элемента $h_1 = x_1 + y_1$, $h_2 = x_2 + y_2$ ($x_i \in H_1$, $y_i \in H_2$) и скалярные произведения: $(h_1, Ph_2) = (x_1, x_2)$, $(Ph_1, h_2) = (x_1, x_2)$. Они совпадают. Следовательно, $P^* = P$.

Если, наоборот, дан оператор P, для которого $P^2 = P$, $P^* = P$, то $H = PH + (E-P)H$, $P(E-P) = P - P^2 = 0$. Покажем, что эти подпространства ортогональны:

$$(Ph_1, (E-P)h_2) = (h_1, P(E-P)h_2) = 0$$

(так как $P^* = P$), для любых $h_1, h_2 \in H$ (т.е. для любых двух элементов PH и $(E-P)H$).

Следствие I

Для того чтобы представление алгебры Ли группы G, соответствующее её унитарному представлению в гильбертовом пространстве H, было неприводимым, необходимо и достаточно, чтобы не существовало ни одного нетривиального проектирующего оператора P в H $(P^2 = P, P^* = P)$, перестановочного со всеми операторами представления.

Так как в теореме 2 используется только инвариантность ортогонального дополнения инвариантного подпространства относительно оператора, то справедливо

Следствие 2

Для того чтобы унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве H было неприводимо, необходимо и достаточно, чтобы ни один проекционный оператор $P (P^2 = P, P^* = P)$ в H не был перестановочен со всеми операторами представления.

4. Теорема Вигнера-Баргмана

В предыдущих разделах рассматривались группы унитарных операторов гильбертова пространства (унитарные представления групп).

На вопрос о том, какое значение в физике имеют унитарные преобразования, отвечает теорема Вигнера-Баргмана, которую мы сформулируем ниже (в пункте 4б).

4а. Внутреннее произведение лучей гильбертова пространства

Если H - комплексное гильбертово пространство, то под лучом α будем подразумевать одномерное комплексное подпространство H, натянутое на некоторый вектор H.

В дальнейшем единичные векторы будем обозначать через $|\alpha\rangle$, $|\xi\rangle$ и т.д.

В частности, ортогональные единичные векторы n - мерного пространства через кет-векторы:

$$|1\rangle, |2\rangle, \ldots, |n\rangle. \tag{I}$$

Соответствующие лучи будем обозначать через α, ξ, и т.д. или через I,2,..., n.

Очевидно, что $|\alpha\rangle$ определяет луч α полностью. В то же время луч α определяет $|\alpha\rangle$ только с точностью до коэффициента λ, $|\lambda| = 1$ (фазовый множитель).

В этой главе скалярное произведение векторов $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$ будем обозначать через $\langle\alpha|\beta\rangle$ (как это принято в физике). Внутреннее произведение двух лучей α и β - $(\alpha\beta)$ определяется так:

$$(\alpha\beta) = |\langle\alpha|\beta\rangle| \tag{1'}$$

, где

$|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ - единичные векторы лучей α, β. Квадрат этого выражения определяет вероятность перехода из состояния α в β, (если H - пространство состояний).

Определим расстояние $\rho_{\alpha\beta}$ между двумя лучами α и β так:

$$\rho_{\alpha\beta} = 2 \arccos(\alpha\beta) ,$$

$$0 \leq \rho_{\alpha\beta} \leq \pi . \qquad (2)$$

Очевидно, что если $(\alpha\beta) = (\alpha'\beta')$, то $\rho_{\alpha\beta} = \rho_{\alpha'\beta'}$. Наоборот, если $\rho_{\alpha\beta} = \rho_{\alpha'\beta'}$, то $(\alpha,\beta) = (\alpha'\beta')$. Под преобразованием лучей гильбертова пространства H мы будем понимать такое отображение T H на себя, при котором луч переходит в луч.

4б. <u>Формулировка теоремы Вигнера-Баргмана</u>

Теорема. Каждое преобразование лучей гильбертова пространства, сохраняющее внутреннее произведение лучей, может быть представлено как унитарное или антиунитарное преобразование векторов пространства.

Ниже приводится доказательство этой теоремы для конечномерного случая, заимствованное нами из работы /9/, которое расчленено на два этапа: сначала рассматривается двумерный случай, а потом общий случай сводится к двумерному.

4в. <u>Двумерный случай</u>

Мы будем использовать известное геометрическое предложение: каждое преобразование сферы в себя, которое сохраняет расстояние $(\rho_{\alpha\beta})$ между её точками и либо - вращение относительно центра сферы, либо - псевдоортогональное преобразование (т.е. отражение в некоторой плоскости, проходящей через центр сферы).

Единичный вектор $|\xi\rangle \in Z_2$ можно представить так:

$$|\xi\rangle = e^{i\chi} \begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\theta \\ (\sin\frac{1}{2}\theta)e^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad (0 \leq \theta < \pi) , \qquad (3)$$

где $e^{i\gamma}$ - фазовая постоянная. Вектор $|\xi\rangle$ можно считать точкой на поверхности сферы с полярными координатами ϑ и φ или с декартовыми $n_i = \langle \xi | \sigma_i | \xi \rangle$ $(i=1,2,3)$, где σ_i - матрицы Паули. Соответствие взаимно-однозначное. Если $|\xi\rangle$ - "спинор", то $n = (n_1, n_2, n_3)$ даёт "направление спина".

Известно, что унитарное преобразование $|\xi\rangle$ соответствует вращению n, замене $|\xi\rangle$ его комплексно-сопряжённым соответствует преобразование:

$$n_1 \to n_1 \quad , \quad n_2 \to -n_2 \quad , \quad n_3 \to n_3$$

(т.е. отражение в плоскости "I3").

Вообще, антиунитарное преобразование $|\xi\rangle$ (т.е. унитарное, сопровождаемое комплексным сопряжением) соответствует псевдо-вращению вектора n. Обратное утверждение также справедливо.

Легко показать, что расстояние между двумя лучами вида 3 (т.е. угол между двумя спиновыми направлениями), эквивалентно расстоянию f, определяемого формулой 2. Итак, для двумерного случая теорема Вигнера-Баргмана эквивалентна указанному выше геометрическому предложению.

Сформулируем результат более чётко:

Пусть T - преобразование лучей Z_2, сохраняющее расстояние $f_{\alpha\beta}$ (или, что то же самое - внутреннее произведение), $|1\rangle$, $|2\rangle$ - ортогональные векторы из Z_2, а $|\xi\rangle$ - произвольный единичный вектор из Z_2,

$$|\xi\rangle = \lambda_1 |1\rangle + \lambda_2 |2\rangle \ . \qquad (5)$$

Тогда, при произвольном значении фазы $|1'\rangle$ и при подходящем выборе фазы $|2'\rangle$, где $1' = T1$, $2' = T2$, луч $|\xi'\rangle$ $(\xi' = T\xi)$ представим либо как единичный вектор

$$|\xi'\rangle = \lambda_1 |1'\rangle + \lambda_2 |2'\rangle \qquad (6)$$

(линейный случай), либо, как

$$|\xi'\rangle = \bar{\lambda}_1 |1'\rangle + \bar{\lambda}_2 |2'\rangle \qquad (6^a)$$

(антилинейный случай).

Очевидно, что то же самое справедливо и для преобразования одного двумерного пространства в другое.

4г. Общий случай

Будем считать, что лучи α, β, ... ξ линейно зависимы (независимы), если соответствующие единичные векторы $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$, ..., $|\xi\rangle$ линейно зависимы (независимы).

Если α, β — различные лучи, то под $R(\alpha, \beta)$ будем понимать двумерное подпространство, натянутое на $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$.

Если, в частности, α и β ортогональны, т.е.

$$(\alpha\beta) = 0, \qquad (7)$$

то для любого $|\gamma\rangle \in R(\alpha, \beta)$:

$$(\alpha\gamma)^2 + (\beta\gamma)^2 = 1. \qquad (8)$$

И, наоборот, из соотношений (7), (8) следует, что

$$|\gamma\rangle \in R(\alpha, \beta).$$

Если преобразование T сохраняет внутреннее произведение, то для лучей $\alpha' = T\alpha$, $\beta' = T\beta$, $\gamma' = T\gamma$ выполняются те же соотношения, т.е. они линейно зависимы.

Это утверждение может быть расширено до следующего: преобразование T лучей некоторого конечномерного пространства, сохраняющее внутреннее произведение, переводит каждое его линейное подпространство в подпространство той же размерности.

Пусть в некотором векторном пространстве H конечной размерности дано преобразование лучей T, сохраняющее внутреннее произведение.

$\xi' = T\xi$, для соответствующих векторов $|\xi\rangle$ и $|\xi'\rangle$ $\left(|\langle \xi | \xi \rangle| = |\langle \xi', \xi' \rangle| \right)$ будем писать $|\xi\rangle \to |\xi'\rangle$.

Если $|\xi\rangle \in R(\alpha, \beta)$ $\quad ((\alpha\beta) = 0)$

$$|\xi\rangle = \lambda|\alpha\rangle + \mu|\beta\rangle \quad \text{и}$$

$$|\alpha\rangle \to |\alpha'\rangle, \; |\beta\rangle \to |\beta'\rangle, \tag{9}$$

то $\lambda|\alpha\rangle + \mu|\beta\rangle \to \lambda'|\alpha'\rangle + \mu'|\beta'\rangle$, где

$$|\lambda| = |\lambda'|, \; |\mu| = |\mu'| \tag{9a}$$

(ввиду сохранения внутреннего произведения).

Выберем некоторый вектор $|1\rangle$ и соответствующий ему вектор $|1'\rangle$ (фаза фиксирована).

Тогда, если $|k\rangle$ - некоторый вектор, ортогональный к $|1\rangle$ и $|k\rangle \to |k'\rangle$, то, в силу доказанного выше утверждения (см.4), фазу $|k'\rangle$ можно выбрать так, чтобы отображение T, суженное на подпространство $R(1,k)$ $(R(1,k) \to R(1',k'))$, удовлетворяло уравнениям, аналогичным 6 и 6а.

В дальнейшем мы убедимся, что если для одного значения k преобразование линейно, то и для всех остальных оно линейно. То же самое справедливо и для антилинейного случая.

Рассмотрим линейную комбинацию трёх ортогональных векторов

$$|\xi\rangle = \lambda_1|1\rangle + \lambda_2|2\rangle + \lambda_3|3\rangle. \qquad (10)$$

Если одна из констант $\lambda_i = 0$, то $|\xi\rangle \in R(\ell, j)$ $(\ell, j \neq i)$. Пусть $|2\rangle \to |2'\rangle$, $|3\rangle \to |3'\rangle$ (фазы $|2'\rangle$ и $|3'\rangle$ выбраны, как указано выше).

Предположим, что отображения $R(1,2) \xrightarrow{T} R(1',2')$, $R(1,3) \xrightarrow{T} R(1',3')$ – линейны.

Тогда

$$|\xi\rangle = (\lambda_1|1\rangle + \lambda_2|2\rangle) + \lambda_3|3\rangle \to$$

$$\to (\lambda_1|1'\rangle + \lambda_2|2'\rangle) + \lambda_3'|3'\rangle, \qquad (11a)$$

$$|\lambda_3'| \quad |\lambda_3| \quad (\text{см. 9 и 9а}).$$

Выше предполагалось, что $\lambda_1|1\rangle + \lambda_2|2\rangle \xrightarrow{T} \lambda_1|1'\rangle + \lambda_2|2'\rangle$.

Следовательно $|\xi\rangle \to \mu(\lambda_1|1'\rangle + \lambda_2|2'\rangle) + \lambda_3''|3'\rangle$,

где $|\mu| = 1$, $|\lambda''_3| = |\lambda_3|$.

Подобно этому:

$$|\xi\rangle = (\lambda_1|1\rangle + \lambda_3|3\rangle) + \lambda_2|2\rangle \to$$

$$\to (\lambda_1|\lambda'\rangle + \lambda_3|3'\rangle) + \lambda_2'|2'\rangle, \qquad (11в)$$

$$|\lambda_2'| = |\lambda_2|.$$

Так как $\lambda_1 |1'\rangle + \lambda_2 |2'\rangle + \lambda_3' |3'\rangle$ и $\lambda_1 |1'\rangle + \lambda_2' |2'\rangle + \lambda_3 |3'\rangle$ пропорциональны $(\lambda_1 \neq 0)$, то $1 = \lambda_1 : \lambda_1 = \lambda_2' : \lambda_2 = \lambda_3' : \lambda_3$ и, следовательно,

$$|\xi\rangle \to |\xi'\rangle = \lambda_1 |1'\rangle + \lambda_2 |2'\rangle + \lambda_3 |3'\rangle. \quad \text{(II c)}$$

То есть мы получили линейное преобразование. Аналогично мы получим антилинейное преобразование, если предположим, что T, суженное на $R(1,2)$ и $R(1,3)$, антилинейно.

Если, скажем, T, суженное на R (I,2), линейно, а для R (I,3) антилинейно, то это противоречит линейности T (антилинейности) на R (2,3); равенства

$$T\lambda_2 |2\rangle = \lambda_2 |2'\rangle$$

$$T\lambda_3 |3\rangle = \bar{\lambda}_3 |3'\rangle$$

$$T\lambda_3 |3\rangle = \lambda_3 |3'\rangle$$

при $\bar{\lambda}_3 \neq \lambda_3$ несовместимы.

Итак, мы убедились в том, что либо T, суженное на каждое $R(1,k)$ $(k \neq 1)$, линейно, либо антилинейно.

В первом случае T, суженное на любое трёхмерное подпространство $R(1,i,j)$, линейно, во втором - антилинейно.

Остаётся закончить доказательство теоремы, применяя метод индукции.

Замечание

Так как произведение антиунитарных преобразований не является антиунитарным, то никакое множество антиунитарных преобразований не может образовывать группу.

В настоящей работе рассмотрены основные сведения, необходимые при ознакомлении с теорией групп Ли.

Отдельные примеры групп и их представлений даны в приложениях.

Автор выражает глубокую благодарность В.Г.Кадышевскому за инициирование этой работы, И.Т.Тодорову за чрезвычайно полезные замечания, а также В.И.Огиевецкому и Г.И.Колерову за ценную помощь.

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. Примеры гильбертовых пространств

Пример I. E_n и Z_n. Простейшими примерами гильбертовых пространств являются E_n - евклидово n - мерное пространство и Z_n - комплексное - n - мерное пространство, с обычными операциями покоординатного сложения и умножения на числа. Скалярное произведение в E_n задается формулой $(a,b)=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$, а в Z_n —

$$(a,b)=\sum_{i=1}^{n} a_i \bar{b}_i .$$

Доказательство полноты E_n и Z_n основано на критерии Коши. (см. /I0/). Легко показать, что всякое комплексное n - мерное (действительное) гильбертово пространство изоморфно Z_n (E_n). (Причём здесь под изоморфизмом мы понимаем такое взаимно однозначное отображение, при котором $\alpha a+\beta b \to \alpha a'+\beta b'$ и $(a,b)=(a',b')$)

Пример 2

Пространство ℓ_2. Это простейший пример бесконечномерного гильбертова пространства.

Оно состоит из всех последовательностей комплексных чисел $x=(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, для которых ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$ сходится. Операции сложения и умножения в ℓ_2 производятся покоординатно, а скалярное произведение задаётся следующим образом:

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i .$$

Подробнее с пространством ℓ_2 можно ознакомиться в /I0/.

<u>Пример 3. Пространство $L_2(\Omega)$</u>

Пусть на некотором множестве Ω задана мера μ. Множество всех комплекснозначных функций $f(x)$ на Ω, для которых $\int\limits_{\Omega} |f(x)|^2 d\mu$ сходится, называется пространством $L_2(\Omega)$. Элементы этого пространства складываются и умножаются на числа, как и обычные функции.

Скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ задаётся так:

$$(f, g) = \int\limits_{\Omega} f(x)\overline{g(x)}\, d\mu .$$

Так, если Ω - вещественная ось, а μ - мера Лебега, то мы имеем пространство $L_2(-\infty,\infty)$. Если Ω - комплексная плоскость, то $L_2(\Omega) = L_2(Z)$ - пространство комплексных функций с интегрируемым квадратом модуля. $L_2(Z)$, как и $L_2(-\infty,\infty)$ - бесконечномерно.

Более подробно пространства $L_2(\Omega)$ освещены в работах /8/, /II/.

2. <u>Примеры групп</u>

<u>Пример 4</u>

<u>Группа поворотов</u>

Поворотом в плоскости E_2 называется линейное однородное преобразование плоскости в себя - $X' = AX \; (X=(x_1,x_2)\in E_2,\; A=(a_{ij}))$, задаваемое матрицей A вида

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Равенство

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1+\varphi_2) & -\sin(\varphi_1+\varphi_2) \\ \sin(\varphi_1+\varphi_2) & \cos(\varphi_1+\varphi_2) \end{pmatrix} \quad (*)$$

показывает, что произведению двух поворотов, взятых в любом порядке, соответствует поворот (в дальнейшем будем отождествлять поворот и соответствующую ему матрицу). Так как

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix} -$$

- тоже поворот (на нулевой угол), то из равенства $(*)$ получаем, что

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix}.$$

Ассоциативность произведения поворотов очевидна. Итак, множество Φ всех поворотов E_2 составляет группу. Очевидно, что Φ - абелева группа (общеупотребительное обозначение $\Phi = SO(2)$). Легко показать, что Φ изоморфна некоторой фактор-группе аддитивной группы действительных чисел R . Действительно, учитывая равенство $(*)$, убеждаемся, что соответствие $\varphi : R \ni x \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ является гомоморфизмом R на Φ . Его ядро $\ker\varphi = \{2\pi\}$ - циклическая группа всех чисел $(x = 2\pi k, k = \pm 1, \pm 2, \dots)$, кратных 2π . Итак, $\Phi \cong R/\{2\pi\}$

Φ - группа смешанная. При $\varphi = 2\pi \cdot r$, где r - рациональное число, элемент $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ имеет конечный порядок.

В противном случае он имеет бесконечный порядок. Множество $\Phi_n \subset \Phi\ (n \geq 2)$, состоящее из матриц

$$\begin{pmatrix} \cos k\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin k\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin k\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos k\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix}$$

(где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$), является циклической подгруппой Φ с образующим элементом

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix}$$

порядка n.

Рассмотрим отображение φ_n группы Φ_n в мультипликативную группу комплексных чисел Z:

$$\varphi_n \begin{pmatrix} \cos k\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin k\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin k\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos k\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix} = \cos k\frac{2\pi}{n} + i\sin k\frac{2\pi}{n}.$$

Соотношение:

$$\left(\cos k\frac{2\pi}{n} + i\sin k\frac{2\pi}{n}\right)\left(\cos l\frac{2\pi}{n} + i\sin l\frac{2\pi}{n}\right) =$$
$$= \left(\cos(k+l)\frac{2\pi}{n} + i\sin(k+l)\frac{2\pi}{n}\right)$$

показывает, что φ_n - гомоморфизм. Так как

$$\ker\varphi_n = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то φ_n - изоморфизм.

Итак, группа Φ_n изоморфна группе всех комплексных корней степени n из единицы.

Пример 5.

Группа евклидовых движений

Пусть $E_n \ni x=(x_1,\dots,x_n)$ - n - мерное вещественное евклидово пространство. Рассмотрим множество G_n всех преобразований E_n вида $fx = A_f x + a_f$, где A_f - вещественная $n\times n$ -матрица с определителем, равным единице $(\det A_f = 1)$, $a_f \in E_n$. Введём обозначение: $f=(A_f, a_f)$.

Под произведением $f_1 f_2$ двух преобразований $f_1=(A,a)$ и $f_2=(B,b)$ будем подразумевать преобразование, которое получается в результате их последовательного применения:

$$(f_1 f_2)x = f_1(f_2 x) = f_1(Bx+b) = A(Bx+b)+a =$$
$$= AB\cdot x + Ab + a = (AB, Ab+a)x.$$

Таким образом,

$$f_1 f_2 = (A,a)(B,b) = (AB, Ab+a) \in G_n,$$

так как $\det(AB) = \det A \det B = 1$.

Покажем, что введённое произведение преобразований ассоциативно. Пусть $f_1=(A,a)$, $f_2=(B,b)$, $f_3=(C,c)$ - произвольные элементы G_n. Так как произведение матриц ассоциативно, то

$$f_1(f_2 f_3) = (A,a)\big((B,b)(C,c)\big) = (A,a)(BC, Bc+b) =$$
$$= (ABC, ABc + Ab + a),$$

$$(f_1 f_2) f_3 = \big((A,a)(B,b)\big)(C,c) = (AB, Ab+a)(C,c) =$$
$$= (ABC, ABc + Ab + a).$$

Таким образом, $f_1(f_2 f_3) = (f_1 f_2) f_3$. То есть произведение в G_n ассоциативно. Единичным элементом в G_n является преобразование $(E, 0)$, где $E = (\delta_{ij})$ - единичная матрица, а 0 - нулевой вектор в E_n .

Действительно, для любого элемента (A, a) из G_n

$$(A, a)(E, 0) = (AE, A0 + a) = (A, a),$$

$$(E, 0)(A, a) = (EA, Ea + 0) = (A, a).$$

Для любого преобразования (A, a) в G_n есть обратное преобразование $(A, a)^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1}a)$.
В этом легко убеждаемся при непосредственной проверке:

$$(A, a)(A^{-1}, -A^{-1}a) = (AA^{-1}, -AA^{-1}a + a) = (E, 0),$$

$$(A^{-1}, -A^{-1}a)(A, a) = (A^{-1}A, A^{-1}a - A^{-1}a) = (E, 0).$$

Мы видим, что операция, введённая в множестве G_n , обладает свойствами 1), 2), 3), требуемыми в определении группы (см.гл.I).

Таким образом, G_n является группой. Она называется группой евклидовых движений.

Два подмножества G_n , F и H , первое из которых состоит из всех элементов G_n вида $(A, 0)$, а второе - из всех элементов вида (E, a) , являются её подгруппами.

Действительно:

$$(A,0)(B,0)=(AB,A0+0)=(AB,0)\in F,$$

$$(A,0)^{-1}=(A^{-1},0)\in F,\ (E,0)\in F,$$

$$(E,a)(E,b)=(E,a+b)\in H,$$

$$(E,a)^{-1}=(E,-a)\in H,\ (E,0)\in H.$$

Подгруппа F называется группой вращений и обозначается через $SO(n)$ $(F=SO(n))$. Подгруппа H называется группой трансляций. Очевидно, что H изоморфна аддитивной группе E_n.

Заметим, что $H\cap SO(n)=(E,0)$ — единичная подгруппа.

Покажем, что H является нормальным делителем в G_n $(H\lhd G_n)$. Пусть $f=(A,a)$ - произвольный элемент G_n, а $h=(E,b)$ - элемент H, тогда

$$f^{-1}hf=(A^{-1},-A^{-1}a)(E,b)(A,a)=$$

$$=(A^{-1},A^{-1}b-A^{-1}a)(A,a)=(E,A^{-1}b)\in H.$$ Итак, $H\lhd G_n$.

Подгруппа $SO(n)$, как показывает равенство

$$(A^{-1},-A^{-1}a)(B,0)(A,a)=(A^{-1}B,-A^{-1}a)(A,a)=$$

$$=(A^{-1}BA,A^{-1}(B-E)a),$$

не является нормальным делителем G_n.

Группа G_n порождается этими своими подгруппами –

$$G_n = \{H, SO(n)\},$$

так как любой элемент

$$(A, a) = (E, a)(A, 0).$$

Учитывая, что $H \trianglelefteq G_n$, $H \cap SO(n) = (E, 0)$ и, применяя теорему об изоморфизмах II главы I, мы получаем соотношение:

$$G_n / H \cong SO(n).$$

Таким образом, фактор-группа евклидовых движений по подгруппе трансляций изоморфна группе вращений $SO(n)$.

3. Примеры представлений групп

Пример 6

Группы $SL(2,C)$ и $SU(2)$

Рассмотрим множество унимодулярных комплексных матриц второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \det A = \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Так как определитель произведения матриц равен произведению их определителей, то произведение унимодулярных матриц – унимодулярная матрица, обратная матрица к унимодулярной, тоже унимодулярна. Поэтому рассматриваемое множество является группой. Она обозначается через $SL(2,C)$. В $SL(2,C)$ содержится подмножество унитарных унимодулярных матриц вида $U: U^* = U^{-1}$.

Оно является подгруппой, так как $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ и для любых матриц U_1, U_2 $(U_1^* = U_1^{-1}, U_2^* = U_2^{-1})$ справедливо соотношение

$$(U_1 U_2)^* = U_2^* U_1^* = U_2^{-1} U_1^{-1} = (U_1 U_2)^{-1}.$$

Эта группа обозначается через $SU(2)$. Элементы $SU(2)$ имеют вид:

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Действительно, пусть $U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $U^* = U^{-1}$, $\det U = 1$.
Тогда

$$U^* = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{pmatrix} = U^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

Отсюда, $\delta = \bar{\alpha}$, $\gamma = -\bar{\beta}$ и $U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$.
Соотношение $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ получается из условия $\det U = 1$.
Рассмотрим некоторые конечномерные представления группы $SL(2,C)$ и $SU(2)$. При любом целом $\ell > 0$ представление T_ℓ группы $SL(2,C)$ в пространстве однородных многочленов $\varphi(z)$ комплексного переменного степени $\leq 2\ell$ выглядит так:

$$T_\ell(g)\varphi(z) = (\beta z + \delta)^{2\ell} \varphi\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right),$$

где $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

Легко проверить, что условие

$$T_\ell(g_1 g_2)\varphi(z) = T_\ell(g_1)\left(T_\ell(g_2)\varphi(z)\right)$$

выполняется.
Если в этой формуле положить $g = U \in SU(2)$, $U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$, то получится представление группы $SU(2)$ в том же пространстве:

$$T_\ell(U)\varphi(z) = (\beta z + \bar{\alpha})^{2\ell} \varphi\left(\frac{\alpha z - \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}}\right).$$

Можно доказать, что это представление неприводимо (см. /12/), а, следовательно, неприводимо соответствующее представление группы $SL(2,C)$. Приведём серию бесконечномерных унитарных представлений группы $SL(2,C)$ в пространстве $L_2(z)$ (пространство функций комплексного переменного с интегрируемым квадратом модуля). Эти представления имеют вид:

$$T_g f(z) = |\beta z + \delta|^{-m+i\rho-2}(\beta z+\delta)^m f\left(\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}\right),$$

где $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, m - целое, ρ - действительное число.

Все эти представления неприводимы (доказательство приведено в работе /2/).

Пример 7

Группа Пуанкаре P

Рассмотрим множество P всех преобразований в пространстве E_4 вида $x' = Ax + a$, где A - матрица (4×4), принадлежащая группе Лоренца $O(3,1)$, $a, x, x' \in E_4$, причём вектор a фиксирован для каждого преобразования. Как и в предыдущем примере, каждое такое преобразование обозначим через (A, a).

Тогда последовательному применению двух преобразований из P, (A,a) и (B,b) будет соответствовать

$$(A,a)(B,b) = (AB, Ab + a) -$$

преобразование из P, так как $AB \in O(3,1)$. Легко убедиться, что все выкладки, проведённые для группы евклидовых движений, справедливы и для P. Поэтому P является группой. Она называется группой Пуанкаре (это множество всех преобразований в E_4 вида $X' = AX + a$, оставляющих инвариантной форму $(x_0^{(1)} - x_0^{(2)})^2 - (\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(2)})^2$. Используя указанные выше выкладки, получаем, что

$$P = \{\mathcal{L}, H\} \rhd H,$$

$$P/H \cong \mathcal{L} \cong O(3,1),$$

где $\mathcal{L}$ – группа всех преобразований из P вида $(A, 0)$ (общая группа Лоренца), а H – группа всех преобразований вида (E, a), (где E – единичная матрица). Таким образом, фактор-группа группы Пуанкаре по подгруппе всех трансляций изоморфна группе Лоренца.

Группа Пуанкаре является 10-параметрической группой Ли. Умножим каждый из десяти её инфинитезимальных операторов на $-i$. В результате получаются эрмитовы операторы M_{ij} $(i, j = 0,1,2,3; i<j)$ и P_j $(j = 0,1,2,3)$ (если A – антиэрмитов оператор $(A)^* = -A)$, то $\pm iA$ – эрмитов $((\pm iA)^* = \pm iA)$:

$$(x, (\pm i)Ay) = \overline{((\pm i)Ay, x)} = \pm i\,\overline{((-A)y, x)} =$$

$$= \pm i\,(x, (-A)y) = \pm i\,(Ax, y) = ((\pm iA)x, y)).$$

При этом операторы M_{ij} соответствуют однородным преобразованиям, а P_j – трансляциям (или сдвигам).

Если дополнительно считать, что M_{ji} при $j > i$ равно $-M_{ij}$, а $M_{ii} = 0$, то коммутационные соотношения, которым удовлетворяют эти генераторы, можно записать так:

$$[M_{ij}, P_k] = i(g_{jk}P_i - g_{ik}P_j),$$

$$[P_i, P_j] = 0$$

$$[M_{ij}, M_{kl}] = -i(g_{ik}M_{jl} - g_{jk}M_{ik} + g_{il}M_{kj} - g_{jl}M_{ki}),$$

где $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 0$, $g_{ij} = 0$, при $i \neq j$.

Приведём в качестве примера серию бесконечномерных неприводимых унитарных представлений группы Пуанкаре. Это представления типа $[m, j, +]$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{mj+}$ (см. /1/).

Операторы $U(A, a)$ представления $[m, j, +]$ действуют на элементы $\Psi(p, \zeta)$ пространства $\mathcal{H}_{mj+}$ по формуле:

$$U(A,a)\Psi(p,\zeta) = e^{ipa}\sum_{\eta=-j}^{j} D^{(j)}_{\zeta\eta}(V(\varphi(A),p))\,\Psi(\varphi^{-1}(A)p,\eta), \qquad (*)$$

где pa - обычное скалярное произведение векторов p и a, φ - изоморфное отображение группы Лоренца на группу $SL(2,C)$ (см. /2/), $D^{(j)}_{\zeta\eta}(V)$ - матричные элементы неприводимого представления группы $SU(2)$, соответствующего спину j :

$$D^{(j)}_{\zeta\eta}(V)=\sqrt{\frac{(j+\eta)!\,(j-\eta)!}{(j+\zeta)!\,(j-\zeta)!}}\,v_1^{\eta+\zeta}v_2^{\eta-\zeta}P^{(\eta-\zeta,\,\eta+\zeta)}_{j-\eta}(v_1\bar v_1-v_2\bar v_2)$$

$$\left(V=\begin{pmatrix} v_1 & v_2\\ -\bar v_2 & \bar v_1\end{pmatrix},\ \det V=|v_1|^2+|v_2|^2=1,\right)$$

$$P_n^{(a,b)}(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-a}(1+x)^{-b}\frac{d^n}{dx^n}\left(\left((1-x)^{a+n}(1+x)^{b+n}\right)\right).$$

Преобразование $V(B,p)$, стоящее в правой части формулы $(*)$, переводит каждый элемент (B,p), где $B\in SL(2,C)$, а p - вектор, в элемент $SU(2)$ следующим образом

$$V(B,p)=\sqrt{\tilde p^{-1}}\,A\sqrt{A^{-1}\tilde p A^{*-1}}$$

(при $p=(x^0,x^1,x^2,x^3)$, $\tilde p=x^i\sigma_i$, где σ_i - матрицы Паули).

Пример 8

Группа $SU(3)$

Рассмотрим множество $\mathcal{U}$ всех комплексных-3×3-матриц

$$u=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13}\\ u_{21} & u_{22} & u_{23}\\ u_{31} & u_{32} & u_{33}\end{pmatrix},$$

удовлетворяющих условиям:

$$\det u=1,\quad u^*=u^{-1}$$

Пусть

$$e=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad u_1,u_2\in\mathcal{U}.$$

Тогда $\det e = 1$, $e^* = e = e^{-1}$, $\det U_1 U_2 =$
$= \det U_1 \det U_2 = 1$, $(U_1 U_2)^* = U_2^* U_1^* =$
$= U_2^{-1} U_1^{-1} = (U_1 U_2)^{-1}$.

Следовательно, $e \in \mathcal{U}$, $U_1 U_2 \in \mathcal{U}$. Отсюда мы заключаем, что $\mathcal{U}$ - группа. Эта группа обозначается как $SU(3)$. Так как матрицы U унитарны, то отображение $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ (тождественное) является унитарным представлением группы $SU(3)$ в пространстве Z_3. Это представление неприводимо. Другим неприводимым унитарным представлением является представление $U \to \bar{U}$.

Кроме этих представлений, существует бесконечное множество неприводимых унитарных конечномерных представлений группы $SU(3)$.

Описание их можно найти, например, в работе /4/.

Оттуда мы позаимствуем два простейших примера. При этом мы будем применять терминологию, которая используется физиками.

Прежде всего, рассмотрим инфинитезимальные операторы (или, как их называют, генераторы) группы $SU(3)$.

Генераторами $SU(3)$ в представлении наименьшей размерности, являются 8 эрмитовых комплексных 3×3-матриц с нулевыми шпурами λ_i.

Они могут быть выбраны так, что

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

В данном случае операторы λ_3 и λ_8 коммутируют и связаны с квантовыми числами частиц: зарядом и гиперзарядом. Например, в кварковом представлении, оператор электрического заряда Q выражается через λ_3 и λ_8 так:

$$Q = \frac{1}{2}\lambda_3 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\lambda_8.$$

Для любой матрицы $U \in SU(3)$ можно так выбрать восемь вещественных параметров $\omega_i\ (i=1,2,\dots,8)$, что

$$U = e^{i\sum_{j=1}^{8}\omega_j\lambda_j},$$

где, по определению,

$$e^{tA} = E + tA + \frac{(tA)^2}{2!} + \dots + \frac{t^n A^n}{n!} + \dots,$$

(E - единичная матрица).

Генераторы λ_i удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$[\lambda_i, \lambda_j] = f_{ij}^{k}\lambda_k \quad ([\lambda_i, \lambda_j] = \lambda_i\lambda_j - \lambda_j\lambda_i).$$

Конечные преобразования, соответствующие неприводимым представлениям, почти все очень громоздки, в отличие от инфинитезимальных.

Мы приведём два самых простых примера.

Первым является неприводимое представление $D(0,1)$.

Оно трёхмерно. При $D(0,1)$ кварк ψ_i преобразуется так:

$$(\psi_i)' = \left(e^{\frac{i}{2}\alpha_k \lambda_k}\psi\right)_i.$$

Второй пример – восьмимерное неприводимое представление $D(1,1)$. При этом представлении октет ψ_i^k преобразуется так:

$$(\psi_i^k)' = \left(e^{\frac{i}{2}\alpha_t \lambda_t}\psi\, e^{-\frac{i}{2}\alpha_t \lambda_t}\right)_i^k.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Н.Боголюбов, А.А.Логунов, И.Т.Тодоров. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. Москва, 1969г.
2. М.А.Наймарк. Линейные представления группы Лоренца. Москва, 1958 г.
3. М.Хамермеш. Теория групп и её применение к физическим проблемам. Москва, 1966г.
4. Нгуен Ван Хьеу. Лекции по теории симметрии элементарных частиц. Часть I. Дубна, 1966г.
5. А.Г.Курош. Теория групп, Москва,1967г.
6. А.С.Понтрягин. Непрерывные группы. Москва, 1954 г.
7. Н.Г.Чеботарёв. Теория групп Ли. Москва, 1940г.
8. К.Морен. Методы гильбертова пространства. Москва, 1965г.
9. G. C.Wick. On simmetry transformations.Preludes in Theoretical Physics in Honor of V.F. Weisskopf, North-Holand Publishing Company - Amsterdam. 1966.
10. Рисс Ф. и Секефальви - Надь, Б. Лекции по функциональному анализу. Москва, 1954г.
11. Н.И.Ахиезер, И.М.Глазман, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.Москва, 1966г.
12. Н.Я.Виленкин. Специальные функции и теория представлений групп. Москва, 1965г.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 апреля 1971 года.