СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 5738

Р.А. Асанов

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

МОДИФИЦИРОВАННОЕ СКАЛЯРНОЕ УРАВНЕНИЕ И ЗАМКНУТЫЙ МИР С ИСТОЧНИКАМИ ПОЛЯ

1971

P2 - 5738

Р.А. Асанов

МОДИФИЦИРОВАННОЕ СКАЛЯРНОЕ УРАВНЕНИЕ И ЗАМКНУТЫЙ МИР С ИСТОЧНИКАМИ ПОЛЯ

Асанов Р.А. P2-5738

Модифицированное скалярное уравнение и замкнутый мир с источниками поля

Рассматриваются некоторые свойства статических решений уравнения (3) Пенроуза в случае точечного источника поля и открытой эвклидовой бесконечности.

При наличии вещества без давления и распределенных источников скалярного поля Черникова-Тагирова (2) найдено точное решение эйнштейновых уравнений без космологического члена в форме статической замкнутой изотропной вселенной.

Результаты сравниваются со случаем обычного скалярного уравнения (1).

Сообщения Объединенного института ядерных исследований

Дубна, 1971

Asanov R.A. P2-5738

Modified Scalar Field Equation and Closed World with Field Sources

Some properties of static solutions of Penrose equation (3) in the presence of point field source are considered.

The exact solution of Einstein's equations (without cosmological term) in the presence of dust-like matter and Chernikov-Tagirov scalar field (2) sources is given.

The solution is the closed static isotropic world ("Einstein's world").

Results are compared with that for the ordinary scalar field equation (1).

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.

Dubna, 1971

Исторически свойства скалярного поля в общей теории относительности изучались на основе простейшего обобщения уравнения Клейна-Гордона

$$\left(\nabla_\sigma \nabla^\sigma + \mu^2\right)\varphi = 0 \quad , \tag{I}$$

здесь μ - масса скалярной частицы, $\hbar = c = 1$. В 1968 году появилась работа Тагирова и Черникова /I/ по квантовой теории скалярного поля в пространстве де Ситтера, в которой авторы смогли добиться успеха в квантовании, только используя модифицированное скалярное уравнение

$$\left(\nabla_\sigma \nabla^\sigma + \frac{R}{6} + \mu^2\right)\varphi = 0 \quad , \tag{2}$$

здесь R - скалярная кривизна.

Ими показано, что требованию квазиклассичности движения при больших импульсах можно удовлетворить, только используя уравнение (2) со скалярной кривизной, но не обычное уравнение (I).

Впервые уравнение такого типа вводилось, по-видимому, Пенроузом в 1963 г. /2/ из соображений конформной инвариантности, для безмассового скалярного поля

$$\left(\nabla_\sigma \nabla^\sigma + \frac{R}{6}\right) \varphi = 0 \quad . \tag{3}$$

Работа Черникова и Тагирова дала серьезное указание на преимущество уравнения (2) по сравнению с обычным уравнением. Материальный тензор для скалярного поля (2) Черникова-Тагирова

$$4\pi \overset{(\varphi)}{T}_{\mu\nu} = \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\left(\nabla_\sigma \varphi \nabla^\sigma \varphi - \frac{R}{6}\varphi^2 - \mu^2 \varphi^2\right) - \frac{1}{6}\left(R_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \nabla_\sigma \nabla^\sigma\right)\varphi^2 \ , \tag{4}$$

здесь $R_{\mu\nu}$ - тензор Риччи, отличается от обычного тензора даже при переходе к плоскому ("галилееву") 4-пространству. Как показали Коллан, Кольман и Джекив /3/, этот материальный тензор при наличии взаимодействия, в отличие от обычного тензора, имеет конечные матричные элементы в любом порядке перенормированной теории возмущений.

В связи с этим остановимся на некоторых свойствах модифицированного скалярного уравнения с целью сравнения со свойствами обычного уравнения, проявляющимися в неквантовых задачах. Конечно, прежде всего было бы важно знать, насколько некоторые основные свойства скалярного поля (2), такие как вклад в собственную энергию, характер соответствующих сил и т.п., отличаются от свойств поля (I). Однако эти вопросы еще недостаточно изучены.

Вначале остановимся на поведении решений в случае точечного источника скалярного и гравитационного полей. Соответствующая задача для обычного уравнения безмассового скалярного поля была решена Фишером /4/. Примеры построения решений с распределенным источником приведены в нашей работе /5/. Затем рассмотрим поведение скалярного поля в случае пространственно замкнутого мира. Пример такой системы для обычного уравнения приведен в работе /6/.

Рассмотрим систему уравнений Эйнштейна и безмассового скалярного поля вне вещества в статической сферически-симметричной открытой метрике

$$ds^2 = -e^{\lambda} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + e^{\nu} dt^2 , \qquad \lambda = \lambda(r), \quad \nu = \nu(r) . \tag{5}$$

В этой метрике уравнения Эйнштейна (в форме $G_\mu^\nu = -8\pi\varkappa T_\mu^\nu$, здесь $\varkappa$ - ньютонова гравитационная постоянная) принимают вид

$$\left(1 - \frac{\varkappa\varphi^2}{3}\right) \frac{1 - r\lambda' - e^{\lambda}}{r^2} = -\frac{\varkappa}{3}\varphi'^2 - \frac{\varkappa\nu'}{6}(\varphi^2)' , \tag{6}$$

$$\left(1 - \frac{\varkappa\varphi^2}{3}\right) \frac{1 + r\nu' - e^{\lambda}}{r^2} = \varkappa\varphi'^2 + \left(\frac{\varkappa\nu'}{6} + \frac{2\varkappa}{3r}\right)(\varphi^2)' , \tag{7}$$

$$\left(1 - \frac{\varkappa\varphi^2}{3}\right)\left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4}\right) = -\frac{\varkappa}{3}\varphi'^2 - \frac{\varkappa}{3r}(\varphi^2)' , \tag{8}$$

здесь штрихом обозначена производная $\frac{d}{dr}$.

Скалярное уравнение становится

$$\varphi'' + \left(\frac{2}{r} + \frac{\nu' - \lambda'}{2}\right)\varphi' = 0 \quad . \tag{9}$$

Несмотря на то, что в этом случае скалярная кривизна $R = 0$ и уравнение (9) имеет "обычный" вид, уравнения Эйнштейна сильно усложняются.

Легко видеть, что если ни одна из функций e^{λ} и e^{ν} при $r \to 0$ не сингулярна (не обращается в бесконечность), то поведение в нуле может быть только следующим

$$e^{\lambda} = A r^2 + \ldots , \quad e^{\nu} = B r^2 + \ldots , \tag{10}$$

здесь A и B - постоянные.

Следовательно, в решении задачи с точечным источником будет иметь место (при $r \to 0$) либо сингулярность, либо особенность вида $e^{\lambda} \to 0$. Особенность вида $e^{\lambda} \to 0$ соответствует тому, что отношение длины малой окружности к диаметру при $r \to 0$ не равно π . Очевидно, эта особенность - истинная (не устранимая никаким преобразованием координат).

Заметим, что в случае Фишера решение (для безмассового поля) при $r \to 0$ ведет себя следующим образом

$$e^{\lambda} = \frac{4}{(1-p)^2}\left(\frac{2\varkappa m}{p}\right)^{\frac{2}{p-1}} r^{\frac{2}{1-p}} + \ldots , \quad e^{\nu} = \left(\frac{2\varkappa m}{p}\right)^{\frac{2p}{p-1}} r^{\frac{2p}{1-p}} + \ldots , \tag{11}$$

$$p = \frac{\varkappa m}{\sqrt{\varkappa^2 m^2 + \varkappa G^2}} < 1 ,$$

здесь G - скалярная константа, т.е. имеется особенность $e^{\lambda} \to 0$.

Таким образом, в случае модифицированного уравнения, в месте нахождения точечного источника поля имеется особенность и возникает вопрос о возможности использования решения хотя бы в качестве "внешнего" решения.

Интересно отметить найденное в работе /7/ точное частное решение задачи (6 - 9) с точечным источником поля. Если интеграл скалярного уравнения (9) записать в виде

$$\varphi' = -\frac{G}{r^2}\, e^{\frac{\lambda-\nu}{2}}, \tag{12}$$

то точное частное решение имеет вид

$$e^{\nu} = e^{-\lambda} = \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2, \quad a = \sqrt{\frac{\varkappa G^2}{3}}. \tag{13}$$

Знак $a > 0$ выбирается, конечно, для соответствия с ньютоновским приближением и для положительности массы всей системы, которая определится из соотношения

$$2\varkappa m = 2a = 2\sqrt{\frac{\varkappa G^2}{3}}. \tag{14}$$

Для этого решения можно показать, что особенность при $r = a$ фиктивна (т.е. инварианты тензора кривизны в этой точке неособенны), но особенность при $r \to 0$ очевидно - истинная. Заметим, что здесь скалярное поле $\varphi = \frac{G}{r-a}$ при $r \to 0$ вообще несингулярно (в отличие от случая Фишера, где сингулярность логарифмическая), но имеется линейная сингулярность при $r \to a$.

Наконец, отыскивая разложение решения системы (6 - 9) при $r \to \infty$, при условии "галилеевости" ($e^{\nu} \to 1, e^{\lambda} \to 1$) и соответствия с ньютоновским приближением ($e^{\nu} \to 1 - \frac{2\varkappa m}{r}$), находим

$$e^{\nu} = 1 - \frac{2\varkappa m}{r} + \frac{\varkappa G^2}{3r^2} + \frac{D}{r^4} + \ldots, \tag{15}$$

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2\varkappa m}{r} + \frac{\varkappa G^2}{3r^2} + \frac{2\mathcal{D}}{r^4} + \ldots , \qquad (16)$$

здесь $\mathcal{D} = \frac{\varkappa G^2}{9}\left(\frac{\varkappa G^2}{3} - \varkappa^2 m^2\right)$, т.е. имеем вполне "шварцшильдовское" поведение решений на пространственной бесконечности, аналогично случаю обычного скалярного уравнения.

Рассмотрим теперь возможность построения изотропного замкнутого мира с "пылевидным" веществом без давления и источниками скалярного поля Тагирова-Черникова. Оказывается, что в этом случае существует решение уравнений (разумеется, без космологического члена) в форме статической вселенной Эйнштейна

$$ds^2 = -dr^2 - a_c^2 \sin^2\frac{r}{a_c}\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) + d\tau^2 , \qquad (17)$$

здесь a_c - постоянная.

Действительно, в системе отсчета, связанной с веществом, при отсутствии давления материальный тензор вещества имеет одну неисчезающую компоненту ${}^{(m)}T_4^4 = \rho$, здесь ρ - инвариантная плотность массы, и уравнения Эйнштейна в метрике (17) принимают вид

$$\frac{3}{a_c^2}\left(1 - \frac{\varkappa\varphi^2}{3}\right) = \varkappa\dot{\varphi}^2 + \varkappa\mu^2\varphi^2 + 8\pi\varkappa\rho , \qquad (18)$$

$$-\frac{1}{a_c^2}\left(1 - \frac{\varkappa\varphi^2}{3}\right) = \frac{1}{3}\varkappa\dot{\varphi}^2 - \varkappa\mu^2\varphi^2 - \frac{2\varkappa}{3}\varphi\ddot{\varphi} , \qquad (19)$$

здесь точкой обозначена производная $\frac{d}{d\tau}$.

Уравнение для скалярного поля имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{1}{a_c^2} + \mu^2\right)\varphi = -4\pi\check{j} , \qquad (20)$$

здесь $\check{j}$ - инвариантная плотность источников поля. Общее решение уравнения (I9) есть

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}\,K}\left(\pm\sqrt{C_1^2+3} + C_1\cos\frac{K\tau}{a_0}\right), \quad K=\sqrt{1+3\mu^2 a_0^2}, \qquad (21)$$

здесь C_1 - постоянная и отброшена вторая постоянная интегрирования, которая может быть прибавлена к времени τ.

Для плотности источников поля из (20) получаем

$$\left(4\pi\sqrt{\varkappa}K\right)\check{j} = \mp\sqrt{C_1^2+3}\left(\frac{1}{a_0^2}+\mu^2\right) + 2C_1\mu^2\cos\frac{K\tau}{a_0} . \qquad (22)$$

Чтобы рассмотреть поведение плотности массы ρ, положим для определенности в формуле (2I) $C_1=-1$ и знак плюс. Тогда из (I8) имеем

$$\left(8\pi\varkappa a_0^2\right)\rho = 3 - \sin^2\frac{K\tau}{a_0} - \frac{1+\mu^2 a_0^2}{K^2}\left(2-\cos\frac{K\tau}{a_0}\right)^2 . \qquad (23)$$

Отсюда видно, что имеется область значений времени τ, при которых плотность массы положительна. Эта область во всяком случае не меньше, чем следующая

$$-\frac{\pi}{3} < K\frac{\tau}{a_0} < \frac{\pi}{3} . \qquad (24)$$

В ней решение не имеет особенностей.

Отметим своеобразность полученного изотропного статического мира со скалярным полем. В нем вещество неподвижно, а скалярное поле и заряды непрерывно "перекачиваются" в вещество (либо наоборот, вещество переходит в поле).

Существует также решение с постоянным скалярным полем. Положим в формуле (21) постоянную $C_1 = 0$ и знак плюс. Тогда получаем

$$\varphi = \sqrt{\frac{3}{\varkappa}}\,\frac{1}{K} \quad , \quad \rho = \frac{3\mu^2}{4\pi\varkappa\left(1+3\mu^2 a_0^2\right)} \quad , \tag{25}$$

$$\check{j} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{a_0^2}+\mu^2\right)\sqrt{\frac{3}{\varkappa}}\,\frac{1}{K} \quad . \tag{26}$$

Здесь, как следует из (26), получается связь между "радиусом кривизны" мира a_0, гравитационной константой и параметрами, характеризующими скалярное поле.

Некоторое отличие ситуации от случая обычного скалярного уравнения состоит в том, что для него не существует статического изотропного решения, если поле - безмассовое. Если же поле "массивное", то статическое решение существует, и притом вполне однозначное. Действительно, при наличии вещества без давления и обычного скалярного поля с массой уравнения Эйнштейна и скалярного поля в метрике (17) имеют вид

$$\frac{3}{a_0^2} = \varkappa\dot{\varphi}^2 + \varkappa\mu^2\varphi^2 + 8\pi\varkappa\rho \quad , \tag{27}$$

$$\frac{1}{a_0^2} = -\varkappa\dot{\varphi}^2 + \varkappa\mu^2\varphi^2 \quad , \tag{28}$$

$$\ddot{\varphi} + \mu^2\varphi = -4\pi\check{j} \quad . \tag{29}$$

Общее решение уравнения (28) есть

$$\varphi = \frac{ch\,\mu\tau}{a_c\mu\sqrt{\varkappa}} \quad , \qquad (30)$$

где отброшена константа интегрирования, которая может быть прибавлена к времени τ. Для плотности скалярного заряда из (29) получаем

$$\check{j} = -\frac{\mu}{2\pi a_c\sqrt{\varkappa}}\, ch\,\mu\tau \;. \qquad (31)$$

Плотность массы

$$\rho = \frac{1 - sh^2\mu\tau}{4\pi\varkappa a_o^2} \qquad (32)$$

остается положительной в некоторых пределах изменения времени τ, приблизительно определяемых соотношением $|\mu\tau| < 0{,}9$.

В рамках рассмотренных задач скалярное поле, описываемое модифицированным уравнением, не обнаруживает принципиального отличия в свойствах от случая обычного уравнения.

В работе /8/ рассматривалась задача о замкнутом изотропном мире и двух скалярных полях без источников (с модифицированными уравнениями), причем материальный тензор одного из полей вводился с противоположным знаком, и было найдено статическое решение. Заметим, что в нашем подходе (при участии одного скалярного поля с обычным знаком у материального тензора), как легко видеть из выражений (22) и (31) и уравнения (28), взятого при $\mu = 0$, не существует статического замкнутого изотропного решения для поля без источников, описываемого как обычным, так и модифицированным скалярным уравнением. Разумеется, это не означает, что не существует динамических решений (вселенных Фридмана).

Благодарю профессора М.А.Маркова и профессора Н.А.Черникова за интерес к работе и Э.А.Тагирова за обсуждения.

Литература:

1. N.A.Chernikov, E.A.Tagirov. Ann.Inst. H.Poincaré 9, 109 (1968).
2. Р. Пенроуз. Лекции, прочитанные в школе Лез-уш, 1963 г. В сборнике "Гравитация и топология", "Мир", М., 1966.
3. C.G.Callan, S.Coleman, R.Jackiw. Ann.of Phys. 59, 42 (1970).
4. И.З.Фишер. ЖЭТФ 18, 636 (1948)
5. Р.А.Асанов. ЖЭТФ 53, 673 (1967).
6. Р.А.Асанов. ТМФ 2, 289 (1970).
7. К.А.Бронников, В.Н.Мельников. Препринт ВНИИОФИ 70-2, М., 1970.
8. K.A.Bronnikov, V.N.Melnikov. Препринт ИТФ 69-21, Киев, 1969.

Рукопись поступила в издательский отдел 15 апреля 1971 года.