ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2-5729

В.С. Барашенков, Х.М. Бештоев

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ УНИТАРНЫХ ВЕСОВ В ТЕОРИИ МНОЖЕСТВЕННОГО ОБРАЗОВАНИЯ ЧАСТИЦ

Р2-5729

В.С. Барашенков, Х.М. Бештоев *

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ УНИТАРНЫХ ВЕСОВ В ТЕОРИИ МНОЖЕСТВЕННОГО ОБРАЗОВАНИЯ ЧАСТИЦ

Направлено в "Acta Physica Polonica"

* Московский государственный университет

В статистической SU_3 -симметричной теории рождения элементарных частиц [1] для определения вероятностей отдельных каналов реакции необходимо знать так называемые "унитарные веса". Расчёт этих весов связан с серьезными техническими трудностями. Для того чтобы обойти эти трудности, недавно в развитие работы [2] была выполнена параметризация SU_3-группы и получены интегральные выражения для вычисления унитарных весов [3]. Однако ввиду громоздкости эти выражения малоэффективны при практических вычислениях.

Ниже показано, что 8-параметрическое представление в действительности можно заменить простым 2-параметрическим для характеров неприводимого представления, что существенно упрощает расчёт унитарных весов.

Метод расчёта мы иллюстрируем простыми примерами, что позволяет использовать его и тем физикам, которые плохо знакомы с теорией групп.

Поскольку в группе SU_3 класс определяется двумя параметрами, то характер является лишь функцией этих двух параметров. Для триплета характер имеет вид

$$\chi_0^1(a_1, a_2) \equiv \chi = e^{ia_1} + e^{ia_2} + e^{-i(a_1+a_2)} .$$

Для других часто используемых в статистической теории неприводимых представлений характеры можно выразить через характер триплета χ_0^1 :

$$\chi^0_0 = 1 \; ; \quad \chi^0_1 = \chi^* \; ;$$

$$\chi^1_1 = \chi \cdot \chi^* - 1 \; ; \quad \chi^3_0 = (\chi \quad)^3 - 2\chi\chi^* + 1 \; ;$$

$$\chi^0_3 = \chi^{3\,*}_0 \; ; \qquad \chi^2_2 = (\chi)^2(\chi^*)^2 - (\chi)^3 - (\chi^*)^3 \; ;$$

и т.д.

Используя далее методы, предложенные в монографии /4/, определим элемент объема группы

$$dV = \frac{8}{3\pi^2}\sin^2((a_1 - a_{2/2})\sin^2((a_1 + 2a_2)/2),$$

$$\sin^2((2a_1 + a_2)/2)\, da_1 da_2 \; . \tag{1}$$

Пределы интегрирования здесь следует выбирать так, чтобы

$$-\pi < a_1 \le \pi \quad , \quad -\pi < a_2 \le \pi \; .$$

Проекция произведений неприводимых представлений на представление $[p,q]$ (унитарный вес) приобретает при этом вид простого двукратного интеграла:

$$U[p,q\,;p_1\;,q_1,\ldots,p_N,q_N] = \int \chi^{p^*}_q \prod_{i=1}^{N} \chi^{p_i}_{q_i}\, dV \; . \tag{2}$$

Полный унитарный вес, определяющий вероятность N -частичного канала неупругой реакции

$$[p',q'] \times [p'',q''] \to [q_1,q_1] \times [p_2,q_2] \times \ldots \times [p_N,q_N]$$

запишется теперь как

$$U \equiv U[p', q', p'', q''; p_1, q_1, \ldots, p_N, q_N] \equiv$$

$$\equiv \sum_{p,q} \int \chi_q^{p^*} \chi_{q'}^{p'} \chi_{q''}^{p''} \, dV \int \chi_q^{p^*} \prod_{i=1}^{N} \chi_{q_i}^{p_i} \, dV, \tag{3}$$

где суммирование выполняется по всем неприводимым SU_3 -представлениям, на которые разлагается произведение "начальных" представлений $[p', q'] \times [p'', q'']$ x/.

Например, в случае реакции $B_1 + B_2 \to B_1^* + B_2^* + M_1 + M_2$, когда при столкновении двух октетных барионов рождаются два барионных резонона и два октетных мезона (8 + 8 10 + 10 + 8 + 8), первый интеграл в правой части выражения (3) имеет вид

$$U[0,0; \ldots] = \int \chi_0^{0^*} (\chi_1^1)^2 dV = 1;$$

аналогично вычисляются $U([1,1;\ldots] = 2$, $U[3,0;\ldots] = U[0,3;\ldots] = 1, U[2,2;\ldots] = 1$.

Таким же образом вычисляется и второй интеграл выражения (3), представляющий собой унитарный вес в разложении конечного состояния рассматриваемой нами реакции на неприводимые представления в разложении начального состояния 8 + 8:

$$U_1[0,0; \ldots] = \int \chi_0^{0^*} (\chi_1^1)^2 (\chi_0^3)^2 dV = 2; \quad U_1[2,2; \ldots] = 22;$$

$$U_1[1,1; \ldots] = 12; \quad U_1[3,0; \ldots] = 12; \quad U_1[0,3; \ldots] = 10.$$

Полный унитарный вес

$$U = \sum_{p,q} U[p,q; \ldots] U_1[p, q; \ldots] = 70. \tag{4}$$

---

x/ Формулу (3) нетрудно обобщить на реакции любого числа начальных частиц $M > 2$, надо только произведение $\chi_{q'}^{p'} \chi_{q''}^{p''}$ заменить на произведение M соответствующих характеров $\prod_j \chi_{q_j}^{p_j}$. Точно такое же соотношение имеет место для любой SU_n -группы, интегрирование в этом случае будет выполняться по $n-1$ параметрам.

Вычисление унитарного веса U еще более упрощается, если заметить, что правую часть соотношения (3) можно заменить выражением

$$\int \chi^{p'*}_{q'} \chi^{p''*}_{q''} \prod_{i=1}^{N} \chi^{p_i}_{q_i} \, dV . \tag{5}$$

Это позволяет значительно сократить число интегрирований. Так, в рассмотренном примере нам пришлось вычислить десять отдельных интегралов, в то же время выражение (4) позволяет обойтись всего лишь одним интегрированием:

$$\int (\chi^{1*}_{1} \chi^{1}_{1} \chi^{8}_{0})^2 dV = 70 .$$

Очень просто унитарный вес вычисляется также и в том случае, когда начальное состояние реакции полностью конкретизировано (например, $p + n \to 8 + 8 + 10 + 10$). При этом

$$U = \sum_{p,q} (K^{p}_{q})^2 U_1 [p, q ; \dots] ,$$

где K^{p}_{q} – табулированные коэффициенты Клебша-Гордона, выражающие начальное состояние реакции через неприводимые SU_3-состояния (в случае реакции $p + n \to \dots$ это проекции состояния $p + n$ на неприводимые представления разложения $8 + 8$); величины U_1 имеют тот же смысл, что и в формуле (4).

Если вместо (3) воспользоваться выражением (5), то можно опять обойтись лишь одним интегрированием:

$$U = \int \sum_{p,q} \chi^{p*}_{q} (K^{p}_{q})^2 \prod_{i=1}^{N} \chi^{p_i}_{q_i} \, dV . \tag{6}$$

Наиболее сложным является случай, когда полностью конкретизированы состояния частиц как в начальном, так и в конечном состояниях (например, $p + n \to 2N^* + K^+ + K^-$). Выражение для унитарного веса в этом случае получается заменой характеров в формуле (3) на диагональной функции D соответствующих представлений:

$$\prod_{i=1}^{N} \chi^{p_i}_{q_i} \to n^p_q \prod_{i=1}^{N} D^{p_i}_{q_i} \quad ; \quad U = \int \sum_{p,q} \chi^{p*}_{q} C^p_q \prod_{i=1}^{N} D^{p_i}_{q_i} d\omega \; . \qquad (7)$$

Здесь обозначено

$$C^p_q = (n^p_q)^2 \int \chi^{p*}_q \; D^{p'}_{q'} \, D^{p''}_{q''} \, d\omega \; ,$$

$$d\omega = dV \sin 2\theta \cos^2\theta \sin 2\phi_1 \sin 2\phi_2 \, d\phi_1 \, d\phi_2 \, d\sigma_1 \, d\sigma_2 \, d\sigma_3$$

$$0 < (\theta, \phi_1, \phi_2) \le \pi/2 \,½; \; -\pi < (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \le \pi \; ,$$

n^p_q – размерность представления $[p,q]$; $D^{p'}_{q'}$ и $D^{p''}_{q''}$ – диагональные функции частиц в начальном состоянии (явный вид этих функций приведен, например, в работах [3]).

Величины C^p_q просто связаны с табулированными коэффициентами Клебша-Гордона:

$$C^p_q = n^p_q (K^p_q)^2 \; .$$

Использование для расчета унитарных весов формул (5), (6) и (7) значительно упрощает вычисления.

Мы благодарны И.Т. Тодорову за обсуждение результатов.

Литература

1. V.S. Barashenkov, G.M. Zinovjev. Fort.d.Phys., 16, 719 (1968).
2. F. Cerulus. Nuovo Cim., 19, 528 (1961).
3. В.М. Мальцев и др. Сообщения ОИЯИ Р2-4845, Р2-4367, Р5-4352, Дубна, 1969.
4. F.D. Murnahan. The Unitary and Rotation Croups, Spartan Books, Washington, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 апреля 1971 года.