

5694

ЭКЗ. ЧИТ. ЗАЛА

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна.



P 2- 5694

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Г.В. Ефимов

К ПОСТРОЕНИЮ
НЕЛОКАЛЬНОЙ КВАНТОВОЙ
ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

1971

P 2-5694

Г.В. Ефимов

К ПОСТРОЕНИЮ
НЕЛОКАЛЬНОЙ КВАНТОВОЙ
ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Направлено в "Annals of Physics"

**Научно-техническая
библиотека
ОИЯИ**

1. В в е д е н и е

За последние годы усилился интерес к нелокальному обобщению квантовой электродинамики в связи с проведением экспериментов по проверке справедливости электродинамики на малых расстояниях (см., например, обзоры В.А. Петрунькина на II Международном совещании по нелокальной квантовой теории поля в Азау^{/1/} и Л.Д. Соловьева на XV Международной конференции по физике элементарных частиц в Киеве^{/2/}).

Для оценок ожидаемых эффектов, связанных с нелокальной природой электродинамики, обычно вводят формфакторы в отдельные структурные элементы диаграмм Фейнмана: пропагаторы, вершины и т.д. Например, пропагатор фотона изменяется следующим образом:

$$D_{\mu\nu}(k) = \delta_{\mu\nu} \left[\frac{1}{-k^2 - i\epsilon} - \frac{1}{M^2 - k^2 - i\epsilon} \right], \quad (1.1)$$

где M — импульс обрезания, связанный с "элементарной" длиной ℓ соотношением $\ell = \frac{1}{M}$. Имеющиеся схемы построения внутренне непротиворечивой нелокальной электродинамики основаны на предприсаниях, заимствованных из метода регуляризации Паули-Вилларса (см.^{/3,4,5/} и ссылки там на более ранние работы).

Основным источником трудностей, возникающих при построении теории с формфактором типа регуляризации Паули-Вилларса (как, например, в (1.1)), является появление дополнительных особенностей в амплитудах физических процессов. Следствием этого является нарушение унитарности и причинности S -матрицы, а также трудности с выполнением градиентной инвариантности теории. Чтобы спасти положение, приходится прибегать к теориям с индефинитной метрикой ^{/5,6/} и формулировать довольно громоздкие правила вычисления матричных элементов, которые реально могут быть использованы лишь в низших порядках теории возмущений.

Нам кажется, что класс аналитических мероморфных функций, к которому относится регуляризация Паули-Вилларса, не является приемлемым с точки зрения требований, накладываемых на S -матрицу в квантовой теории поля.

Классы целых аналитических функций уже не обладают основным недостатком мероморфных функций - не имеют особенностей в конечной комплексной области. При подходящем выборе промежуточной регуляризации целые функции вполне могут играть роль формфакторов при построении нелокальной теории. Полученная теория не будет обладать трудностями, связанными с унитарностью S -матрицы, и не требует привлечения индефинитной метрики. Эта программа была выполнена при построении нелокальной теории скалярного нейтрального поля ^{/7/}. В настоящей работе эти методы применены для построения S -матрицы в квантовой электродинамике.

Основная идея построения нелокальной электродинамики состоит в следующем. Предполагается, что электромагнитное поле $A_\mu(x)$ связано нелокально с локальным током $I_\mu(x) = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ фермионного поля

$$L_1(x) = e \int d y A_\mu(x) K(x-y) I_\mu(y), \quad (1.2)$$

где $K(x-y)$ - нелокальная обобщенная функция, такая, что ее фурье-образ $\tilde{K}(p^2 \ell^2)$ представляет собой целую функцию. Эффективно в ряду теории возмущений для S -матрицы это приводит к изменению пропагатора фотона:

$$\frac{\delta_{\mu\nu}}{-k^2 - i\epsilon} \rightarrow \delta_{\mu\nu} \frac{[\tilde{K}(p^2 \ell^2)]^2}{-k^2 - i\epsilon} . \quad (1.3)$$

Далее в ряду теории возмущений надо так подобрать промежуточную регуляризационную процедуру, чтобы в пределе снятия регуляризации получающаяся S -матрица была конечна и удовлетворяла всем требованиям, накладываемым в квантовой электродинамике. Оказалось, что эта программа может быть проведена в предлагаемом варианте нелокальной электродинамики. При этом оказывается, что никаких бесконечных контр-членов не надо вводить в лагранжиан взаимодействия.

Мы не считаем, что предлагаемая схема построения нелокальной квантовой электродинамики является окончательным решением проблемы, однако нам кажется, что эта схема заслуживает дальнейшего исследования, так как, во-первых, она удовлетворяет требованиям унитарности, причинности, релятивистской ковариантности и градиентной инвариантности; во-вторых, вся неоднозначность предлагаемой схемы сосредоточена в выборе нелокальной размазки в лагранжиане взаимодействия (1.2) и, в-третьих, исследование ряда теории возмущений для нелокальной S -матрицы технически проще, чем в ранее предлагавшихся вариантах нелокальной квантовой электродинамики ^{/5,6/}.

2. Введение нелокальности в электродинамику

Как известно ^{/8,9/}, взаимодействие заряженного электронного поля с электромагнитным определяется требованием калибровочной инвариантности. Это означает, что при описании электромагнитного поля потенциа-

лами A_μ физическое содержание теории не изменяется при калибровочном преобразовании вида

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{\partial f}{\partial x_\mu}, \quad (2.1)$$

так как тензор электромагнитного поля

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$

инвариантен по отношению к калибровочному преобразованию (2.1).

В квантовой теории электромагнитного поля произвольная функция f в (2.1) должна удовлетворять уравнению

$$\square f = 0,$$

что является следствием выбора лагранжиана свободного электромагнитного поля:

$$L_{em,0} = -\frac{1}{2} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}.$$

Для учёта взаимодействия электромагнитного и электронно-позитронного полей в лагранжиане дираковского поля^{x/}

$$L_{e,0} = -\bar{\psi} \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{i \partial x_\mu} + m \right) \psi$$

необходимо сделать замену

$$\frac{\partial}{i \partial x_\mu} \rightarrow \frac{\partial}{i \partial x_\mu} - e A_\mu, \quad (2.2)$$

^{x/} Нами принята следующая система обозначений:

$$\gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = 2 g_{\alpha\beta}, \quad g_{\alpha\beta} = 0, \quad \alpha \neq \beta,$$

$$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1,$$

$$\hat{p} = p_\alpha \gamma_\alpha = p_0 \gamma_0 - \vec{p} \vec{\gamma}, \quad p k = p_0 k_0 - \vec{p} \vec{k}.$$

где e — заряд электрона. Таким образом, мы получаем обычную локальную квантовую электродинамику.

Такой способ введения взаимодействия электронов с фотонами обычно называют принципом минимальности взаимодействия. Вообще говоря, в лагранжиан взаимодействия можно добавить градиентно инвариантные члены вида $\lambda F_{\mu\nu} \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi$, где $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)$ и т.д. Однако мы не будем касаться такого сорта модификаций теории.

Если оставаться в рамках постулата (2.2), то легко видеть, что это преобразование может быть обобщено следующим образом:

$$\frac{\partial}{i \partial x_\mu} \rightarrow \frac{\partial}{i \partial x_\mu} - e K(\ell^2 \square) A_\mu(x),$$

где $K(\ell^2 \square) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(2n)!} (\ell^2 \square)^n$ — нелокальный оператор, т.е. $K(\ell^2 p^2)$ — целая функция, а $K(x-y) = K(\ell^2 \square) \delta^{(4)}(x-y)$ принадлежит подходящему пространству нелокальных обобщенных функций^{/7/}. Параметр ℓ имеет смысл элементарной длины. Оператор $K(\ell^2 \square)$ нормирован следующим образом:

$$K(0) = 1.$$

Тогда лагранжиан системы взаимодействующих дираковского и электромагнитного полей имеет вид

$$L(x) = L_{em,0}(x) + L_{e,0}(x) + L_I(x),$$

$$L_{em,0}(x) = -\frac{1}{2} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu},$$

$$L_{e,0}(x) = -\bar{\psi} \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{i \partial x_\mu} + m \right) \psi,$$

$$L_I(x) = e K(\ell^2 \square) A_\mu \cdot \bar{\psi} \gamma_\mu \psi.$$

Полный лагранжиан, очевидно, инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$\psi \rightarrow \psi e^{i\theta f} \quad , \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{-i\theta f} \quad ,$$

$$A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} + \frac{\partial f}{\partial x_{\mu}}$$

при условии $\square f = 0$.

Лагранжиан взаимодействия можно записать в виде

$$L_I(x) = e \mathcal{Q}_{\mu}(\ell, x) \cdot \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi \quad ,$$

где

$$\mathcal{Q}_{\mu}(\ell, x) = K(\ell^2 \square) A_{\mu}(x) = \int dy K(x-y) A_{\mu}(y) \quad .$$

Иными словами, электромагнитный потенциал $A_{\mu}(x)$ связан нелокальным формфактором с локальным током дираковского поля $I_{\mu}(x)$.

Следует заметить далее, что требование градиентной инвариантности означает, что электромагнитное поле $A_{\mu}(x)$ описывает фотон со спином 1, а часть потенциала $A_{\mu}(x)$, соответствующая фотону со спином 0, полностью исключается из взаимодействия (см. /10/).

Разложение S-матрицы по нормальным произведениям операторов не взаимодействующих электромагнитного поля A_{μ} и поля электронов ψ имеет вид

$$S = \sum_{n,m,\ell} \frac{1}{n! m! \ell!} \int dk_1 \dots \int dk_n \int dp_1 \dots \int dp_m \int dq_1 \dots \int dq_{\ell} \times$$

$$\times F_{\mu_1 \dots \mu_n} (k_1, \dots, k_n; p_1, \dots, p_m; q_1, \dots, q_{\ell}) \times$$

$$\times : A_{\mu_1}(k_1) \dots A_{\mu_n}(k_n) \psi(p_1) \dots \psi(p_m) \bar{\psi}(q_1) \dots \bar{\psi}(q_{\ell}) :$$

Требование градиентной инвариантности означает, что в разложении (2.3) коэффициентные функции $F_{\mu_1 \dots \mu_n}$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned}
 k_{\mu_1} F_{\mu_1 \dots \mu_1 \dots \mu_n}(\dots) &= 0, \\
 k_{\mu_1} k_{\mu_2} F_{\mu_1 \dots \mu_1 \dots \mu_2 \dots \mu_n}(\dots) &= 0 \\
 \dots \dots \dots \dots \dots \dots
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

При этом надо иметь в виду, что каждое из условий (2.4) выполняется, когда все остальные импульсы, от которых зависит функция $F_{\mu_1 \dots \mu_n}(\dots)$, лежат на массовой оболочке.

3. S-матрица и теория возмущений

Формально S-матрица записывается в виде

$$S = T \exp \left\{ i e \int d^4 x \mathcal{A}_\mu(\ell, x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) \right\}, \tag{3.1}$$

где

$$\mathcal{A}_\mu(\ell, x) = K(\ell^2 \square) A_\mu(x).$$

Для получения ряда теории возмущений необходимо разложить экспоненту в (3.1) по заряду e и перейти к N-произведению операторов поля $A_\mu(x)$ и $\psi(x)$ согласно теореме Вика.

Следует отметить, что в нелокальной теории смысл T-произведения, как строгого упорядочивания операторов поля по времени, уже теряет смысл. Хотя мы сохраняем символ T, но под ним понимается некоторая операция, согласно которой строится ряд теории возмущений. В нашем случае под символом T подразумевается выбор пропагаторов частиц плюс некоторая промежуточная регуляризационная процедура,

позволяющая строить матричный элемент S -матрицы в любом порядке теории возмущений. Об этой процедуре будет сказано ниже.

Как и в локальной теории ^{/8,9/}, инвариантность полного лагранжиана относительно градиентных преобразований еще не гарантирует градиентную инвариантность S -матрицы. Необходимо ввести такую промежуточную регуляризацию, которая бы гарантировала выполнение всех требований, накладываемых на S -матрицу теории и обеспечивала единственность построения S -матрицы в рамках вводящейся нелокальной модификации теории.

По определению будем считать, что "хронологическая" свертка операторов фермионного поля будет обычной:

$$\begin{aligned}
 S(x-y) &= \langle 0 | T(\psi(x)\bar{\psi}(y)) | 0 \rangle = \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^4 p e^{-ip(x-y)}}{m - \hat{p} - i\epsilon}, \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

а "причинная" функция "размазанного" электромагнитного поля $\hat{G}_\mu(\ell, x)$ запишется в виде

$$\begin{aligned}
 D_{\mu\nu}(x-y) &= \overline{\hat{G}_\mu(\ell, x)\hat{G}_\nu(\ell, y)} = \\
 &= K(\ell^2 \square_x)K(\ell^2 \square_y) \langle 0 | T(A_\mu(x)A_\nu(y)) | 0 \rangle = \quad (3.3) \\
 &= \frac{\delta_{\mu\nu}}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^4 k [K(\ell^2 k^2)]^2}{-k^2 - i\epsilon} e^{-ik(x-y)}.
 \end{aligned}$$

Такой выбор свертки двух операторов поля соответствует так называемому Т-произведению в "форме Вика", или операции T^* /8,11/.

Заметим далее, что в то время как в теории с высшими производными (порядок производных операторов поля ограничен) введение операции T^* формально гарантирует унитарность теории /11/, в нелокальной теории этого в настоящее время сказать нельзя. Поэтому доказательство унитарности производится отдельно и основано на использовании теоремы Кутковского для нормальных порогов /7/.

Далее, действуя обычными алгебраическими методами, принятыми в квантовой теории поля, получим по структуре обычный ряд теории возмущений с единственным отличием, что обычная причинная функция фотонного поля заменяется на функцию (3.3).

Соответственно результатам, полученным в нелокальной теории скалярного поля /7/, будем предполагать, что формфактор $V(-\ell^2 k^2) = [K(\ell^2 k^2)]^2$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $V(z)$ - целая функция в комплексной z -плоскости порядка роста $-\frac{1}{2} \leq \rho < 1$;
- 2) $[V(z)]^* = V(z^*)$;
- 3) $V(x) > 0$ при вещественных x ;
- 4) $V(0) = 1$, $V'(0) < 0$;
- 5) $\int_0^\infty du V(u) < \infty$.

Для вычисления матричных элементов S -матрицы необходимо ввести промежуточную регуляризационную процедуру.

4. Регуляризационная процедура

Построение S -матрицы по теории возмущений невозможно без введения некоторой промежуточной несобственной регуляризующей процедуры. Нелокальный пропагатор фотона регуляризуем функцией R^δ (подробнее см. /7/):

$$\text{reg } D_{\mu\nu}(x) = \frac{\delta_{\mu\nu}}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^4 k V(-\ell^2 k^2)}{-k^2 - i\epsilon} R^\delta(k^2) e^{-ikx}.$$

Функцию $R^\delta(z)$ выберем в виде

$$R^\delta(z) = \exp\left\{-\delta(z + iM^2)^{\frac{1}{2} + \nu} e^{-i\pi\sigma}\right\},$$

где $0 < \nu < \sigma < \frac{1}{2}$, а M^2 — некоторый параметр размерности квадрата массы. Для регуляризующей функции $R^\delta(z)$ при больших $|z|$ справедливы оценки:

$$|R^\delta(z)| \approx \exp\left\{-\delta|z|^{\frac{1}{2} + \nu}\right\}, \quad -\pi a_2 < \arg z < \pi(1 + a_1),$$

$$|R^\delta(z)| \approx \exp\left\{\delta|z|^{\frac{1}{2} + \nu}\right\}, \quad \pi(1 + a_1) < \arg z < 2\pi\left(1 - \frac{a_2}{2}\right),$$

где

$$a_1 = \frac{2(\sigma - \nu)}{1 + 2\nu} > 0, \quad a_2 = \frac{1 - 2\sigma}{1 + 2\nu} > 0.$$

Иными словами, в комплексной плоскости z функция $R^\delta(z)$ аналитична и убывает как экспонента порядка $\rho_1 = \frac{1}{2} + \nu < 1$ по $|z|$ в верхней полуплоскости, включая вещественную ось. Поскольку $V(z)$ — целая функция порядка $\rho < 1$, то, выбирая $\rho < \rho_1 < 1$, получим, что интегралы от функции $\text{reg } D_{\mu\nu}(x)$ хорошо сходятся при $\delta > 0$. Перейти к пределу $\delta \rightarrow 0$ в амплитудах физических процессов можно, повернув контур интегрирования по k_0 на угол $\frac{\pi}{2}$, что можно сделать при $\delta > 0$. После поворота можно положить $\delta = 0$, так как интегралы будут сходитьсь благодаря убыванию формфакторы $V(-\ell^2 k^2)$ при $k \rightarrow -\infty$. Иными словами, введение регуляризующей процедуры R^δ обеспечивает переход к евклидовой метрике.

Прежде чем переходить к описанию регуляризации спинорных причинных функций, сделаем несколько замечаний о построении перенорми-

рованной матрицы рассеяния в обычной локальной квантовой электродинамике. Символически S-матрица может быть записана в форме (см., например, /8/)

$$S = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} T_{\Lambda} \exp \left\{ i e \int d^4 x L_I(x, \Lambda) \right\}. \quad (4.1)$$

Здесь введены следующие обозначения. T_{Λ} обозначает хронологическое упорядочение операторов плюс некоторую регуляризационную процедуру (обычно это регуляризационная процедура Паули-Вилларса с различными возможными модификациями), которая делает конечными все матричные элементы ряда теории возмущений; Λ - параметр регуляризации, при стремлении которого к бесконечности возникают бессмысленные расходящиеся выражения. Для компенсации получающихся расходящихся выражений в лагранжиан взаимодействия вводят некоторое число контрчленов, зависящих от Λ как от параметра, причем операторная структура контрчленов и их явная зависимость от Λ подбирается таким образом, чтобы полностью компенсировать все возникающие при вычислении амплитуд расходящиеся при $\Lambda \rightarrow \infty$ выражения, и предел при $\Lambda \rightarrow \infty$ в (4.1) существует. Таким образом, нефизический параметр Λ фигурирует как в определении регуляризационной процедуры T_{Λ} , так и в задании лагранжиана взаимодействия $L_I(x, \Lambda)$. Это делает физически бессмысленным лагранжиан взаимодействия, поскольку параметр Λ никакого физического смысла не имеет.

Поэтому, как нам кажется, было бы целесообразно подобрать так регуляризационную процедуру, зависящую от параметра Λ , чтобы никаких бессмысленных контрчленов не появлялось в лагранжиане взаимодействия. Следовательно, должно быть

$$S = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} [T_{\Lambda} \cdot \exp \{ i e \int d^4 x L_I(x) \}],$$

где $L_I(x)$ не зависит от параметра регуляризации Λ .

Оказывается, эта задача может быть решена в рамках нелокальной квантовой электродинамики. Мы будем следовать идее Д.А. Славнова^{/12/}, который исследовал квантовую теорию самодействующего скалярного поля.

Как известно^{/8/}, в квантовой электродинамике применяют так называемую градиентно-инвариантную процедуру Паули-Вилларса. Это означает, что спинорные причинные функции электрона регуляризируются не по отдельности, а замкнутыми спинорными циклами.

$$\sum_{j=0}^2 c_j \text{Sp} [\gamma S_{M_j}(x_1 - x_2) \gamma S_{M_j}(x_2 - x_3) \dots].$$

Поскольку в квантовой электродинамике максимальная расходимость квадратичная, то достаточно ограничиться двумя вспомогательными массами M_1 и M_2 . В этом случае условия на коэффициенты c_j записываются в виде:

$$\begin{aligned} 1 + c_1 + c_2 &= 0, \\ 1 + c_1 \Lambda_1 + c_2 \Lambda_2 &= 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

где $M_j^2 = m^2 \Lambda_j$; $\Lambda_j (j=1,2)$ - большой безразмерный параметр регуляризации. При такой регуляризации электрон-электронная петля, так называемая поляризация вакуума, расходится логарифмически при $\Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2 \rightarrow \Lambda \rightarrow \infty$.

Мы предлагаем вместо условий (4.2) ввести три вспомогательных массы со следующими условиями на коэффициенты c_1 , c_2 и c_3 :

$$\begin{aligned} 1 + c_1 + c_2 + c_3 &= 0, \\ 1 + c_1 \Lambda_1 + c_2 \Lambda_2 + c_3 \Lambda_3 &= 0, \\ c_1 \log \Lambda_1 + c_2 \log \Lambda_2 + c_3 \log \Lambda_3 &= 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Оказывается, что при переходе к пределу $\Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2 \rightarrow \Lambda_3 \rightarrow \Lambda \rightarrow \infty$ все замкнутые спинорные циклы, встречающиеся в электродинамике, сходятся в пределе $\Lambda = \infty$.

Заметим, что предлагаемая регуляризационная процедура устраняет расходимости только из замкнутых спинорных циклов. Для устранения расходимостей в диаграммах собственной массы электрона и в вершинных диаграммах необходимо привлекать дополнительные требования. Эти требования естественно удовлетворяются в рамках нелокальной теории, поскольку формфактор фотона делает эти диаграммы конечными.

В обычной локальной квантовой электродинамике (см., например, /8,9/) расходящимися являются матричные элементы, соответствующие следующим примитивным неприводимым диаграммам Фейнмана:

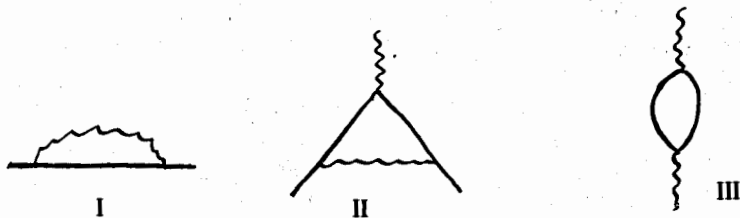


Рис. 1

Мы не будем рассматривать ниже диаграммы,



Рис. 2

поскольку вклад диаграмм (IV) равен нулю согласно теореме Фарри, а интегралы, соответствующие диаграммам (V), сходятся в силу градиентной инвариантности, так как пропагаторы электронов соответствуют обычной локальной теории (см., например, /8/).

Элементы S -матрицы, соответствующие диаграммам собственной энергии (I) и вершинной части (II) будут сходиться, поскольку пропагатор фотона (3.4) убывает достаточно быстро в евклидовой области. То же самое можно сказать о любых неприводимых диаграммах, описывающих вершинную часть:



Рис. 3

Диаграммы вида

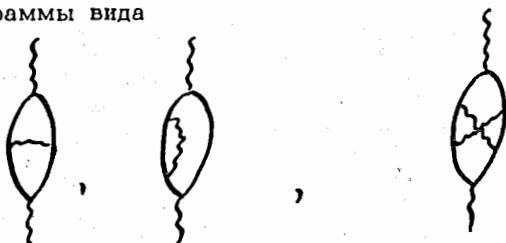


Рис. 4

и все остальные диаграммы в ряду теории возмущений также сходятся.

Интеграл, соответствующий диаграмме (III) на рис. 1, так называемой поляризации вакуума, будет также конечен в силу выбранной нами модифицированной процедуры Паули-Вилларса.

Итак, в рамках введенных нами регуляризаций все диаграммы, встречающиеся в теории возмущений, оказываются конечными.

Ниже мы рассмотрим подробно матричные элементы, соответствующие диаграммам (I), (II), (III).

5. Физический смысл формфактора

Как было сказано выше, в рассматриваемой теории возможен переход к евклидовой метрике. Приведем несколько формул, полезных при дальнейших вычислениях. В евклидовом x -пространстве пропагатор фотона можно записать в виде

$$D(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k V(k^2 \ell^2)}{k^2} e^{ikx},$$

где k и x - евклидовы векторы ($x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \geq 0$).

Введем пропагатор "точечного" фотона:

$$D_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k e^{ikx}}{k^2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{x^2}.$$

Представим функцию $D(x)$ в виде

$$D(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{x^2} U\left(\frac{x^2}{\ell^2}\right). \quad (5.1)$$

Тогда функция $U\left(\frac{x^2}{\ell^2}\right)$ связана с формфактором $V(k^2 \ell^2)$ соотношением

$$\begin{aligned} U\left(\frac{x^2}{\ell^2}\right) &= V(0) - \frac{1}{\pi^2} \int d^4 k e^{ikx} V''(k^2 \ell^2) = \\ &= 1 + \int_0^\infty du J_0\left(\sqrt{u} \frac{x^2}{\ell^2}\right) V'(u). \end{aligned}$$

Воспользовавшись свойствами (1)-(5), получим

$$U\left(\frac{x^2}{\ell^2}\right) = \begin{cases} \frac{x^2}{4\ell^2} \int_0^\infty du V(u) + O(x^4) & \text{при } x^2 \rightarrow 0, \\ 1 + O\left(\exp\left\{-\left(\frac{x^2}{\ell^2}\right)^\gamma\right\}\right) & \text{при } x^2 \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (5.2)$$

где $\gamma = \frac{\rho}{2\rho - 1} > 1$. При этом для всех $x^2 > 0$

$$|D(x^2)| = \left| \frac{1}{x^2} U\left(\frac{x^2}{\ell^2}\right) \right| < \frac{U\left(\frac{x^2}{\ell^2}\right)}{x^2} \Big|_{x^2=0} = \frac{1}{4\ell^2} \int_0^\infty du V(u),$$

т.е. функция $D(x^2)$ принимает максимальное значение в нуле, причем $D(0) < \infty$.

Формфактор $V(k^2 \ell^2)$ связан с функцией $U\left(\frac{x^2}{\ell^2}\right)$ соотношением

$$\begin{aligned} V(k^2 \ell^2) &= \int_0^\infty du J_0(\sqrt{u k^2 \ell^2}) \overline{U'(u)} = \\ &= \frac{1}{2i} \int_{-\beta+1-i\infty}^{-\beta-1-i\infty} \frac{d\zeta v(\zeta)}{\sin \pi \zeta \cdot \Gamma^2(1+\zeta)} \left(\frac{k^2 \ell^2}{4}\right)^\zeta, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где $0 < \beta < 1$ и функция

$$v(\zeta) = \int_0^\infty du u^\zeta U'(u)$$

регулярна в полуплоскости $\text{Re } \zeta > -1$, и в этой области справедлива оценка

$$|v(\xi + i\eta)| < \text{Const} \cdot \exp \left\{ \frac{|\xi|}{\gamma} \log \frac{|\xi|}{\gamma} - \frac{|\xi|}{\gamma} \right\}$$

при больших $|\xi|$ и любых $\eta \in (-\infty, +\infty)$. Условие нормировки (4) для функции $v(\zeta)$ записывается в виде $v(0) = 1$.

Изменение свободного пропагатора фотона, согласно (3.3), физически означает изменение закона Кулона на малых расстояниях. Потенциал взаимодействия заряженных частиц за счёт обмена виртуальным фотоном вычисляется в приближении, когда пренебрегается отдачей частиц, и связан с функцией распространения соотношением

$$W(r) = \frac{e}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} e^{i\vec{k}r} D(k^2).$$

Подставляя $D(\vec{k}^2)$ согласно (5.4) и используя приведенные выше формулы, получим

$$W(r) = \frac{e}{2\pi^2} \int_r^\infty \frac{d\rho}{\rho \sqrt{\rho^2 - r^2}} U\left(\frac{\rho^2}{\ell^2}\right).$$

Если $U(u) \equiv 1$, тогда $W(r) = \frac{e}{4\pi} \frac{1}{r}$, т.е. мы получаем обычный закон Кулона. Для функции $V(u)$, удовлетворяющей условиям (5.2), легко получить

$$W(r) = \begin{cases} \frac{e}{2\pi^2} \frac{1}{\ell} \int_0^\infty du V(u) + O\left(\frac{r^2}{\ell^2}\right) & \text{при } r \ll \ell, \\ \frac{e}{4\pi} \frac{1}{r} [1 + O(\exp\{-\frac{r^2}{\ell^2}\})] & \text{при } r \gg \ell. \end{cases}$$

Таким образом, потенциал $W(r)$ конечен при $r=0$ и убывает при $r \rightarrow \infty$, причем при $r \gg \ell$ отклонение потенциала $W(r)$ от кулоновского порядка $O(\exp\{-\frac{r^2}{\ell^2}\})$, т.е. это добавочное слагаемое убывает быстрее любой гауссовой экспоненты.

Так как формфактор у пропагатора фотона появляется как следствие нелокального взаимодействия фотонного поля A_μ с электромагнитным током $\bar{\psi} \gamma_\mu \psi$, то изменение потенциала на малых расстояниях означает, что заряд электрона сосредоточен не в точке, а имеет некоторое пространственное распределение. Пусть $\rho(r)$ означает плотность распределения заряда, тогда при $r > 0$

$$\rho(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (rW(r)).$$

При $r \rightarrow \infty$ получим

$$\rho(r) = O\left(\exp\left\{-\frac{r^2}{\ell^2}\right\}\right),$$

т.е. плотность заряда быстро убывает. Подсчитаем средний квадратичный радиус распределения

$$\begin{aligned}
\langle r^2 \rangle &= \frac{1}{e} \int d\vec{r} \cdot r^2 \rho(r) = 2 \int_0^\infty dr \cdot r \left[1 - \frac{4\pi}{e} r W(r) \right] = \\
&= \int_0^\infty d\rho \cdot \rho \left[1 - U\left(\frac{\rho^2}{\ell^2}\right) \right] = 2 \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2} [1 - V(k^2 \ell^2)] e^{ikx} = \\
&= \ell^2 \frac{2}{\pi^2} [-V'(0)] = \ell^2 \frac{2|V'(0)|}{\pi^2}.
\end{aligned}$$

Таким образом, заряд электрона сосредоточен главным образом внутри сферы радиуса порядка ℓ .

6. Диаграмма собственной энергии

Рассмотрим диаграмму собственной энергии, представленную на рис. 1 (I). Этой диаграмме соответствует матричный элемент

$$-i : \psi(x) \tilde{\Sigma}(x-y) \psi(y) :$$

где

$$\tilde{\Sigma}(x-y) = -i e^2 \gamma_\mu S(x-y) \gamma_\mu D(x-y).$$

Переходя в импульсное представление и воспользовавшись регуляризационной процедурой R^δ , что позволяет перейти к евклидовой метрике поворотом $k_0 \rightarrow e^{i\frac{\pi}{2}} k_4$, получим в пределе $\delta \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Sigma}(p) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} (-i e^2) \int d^4 x e^{ipx} \gamma_\mu S(x) \gamma_\mu D^\delta(x) = \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{i e^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k D(k^2 \ell^2) R^\delta(k^2) \gamma_\mu S(p-k) \gamma_\mu = \\
&= \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k_E \frac{V(k_E^2 \ell^2)}{k^2} \gamma_\mu \frac{(\hat{p}_E - \hat{k}_E) + m}{(p_E - k_E)^2 + m} \gamma_\mu,
\end{aligned}$$

где $p_E = (ip_0, \vec{p})$, $\hat{k}_E = \gamma_0 i k_4 - \vec{\gamma} \vec{k}$, $p_E^2 = -p^2$. Воспользовавшись представлением (5.3) для формфактора $V(k_E^2 \ell^2)$, получим после некоторых вычислений

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}(p) &= \frac{e^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{2i} \int_{-\beta+i\infty}^{-\beta-1\infty} \frac{d\zeta v(\zeta)}{\sin \pi \zeta \cdot \Gamma^2(1+\zeta)} \left(\frac{\ell^2}{4}\right)^\zeta \times \\ &\times \int \frac{d^4 k_E [4m-2(\hat{p}_E - \hat{k}_E)]}{(k_E^2)^{1-\zeta} [(k_E - p_E)^2 + m^2]} = \\ &= -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \frac{2\pi^3}{2i} \int_{-\beta+i\infty}^{-\beta-1\infty} \frac{d\zeta v(\zeta) F(\zeta, p)}{(\sin \pi \zeta)^2 \Gamma^3(1+\zeta)} \left(\frac{m^2 \ell^2}{4}\right)^\zeta, \\ F(\zeta, p) &= \frac{1}{\Gamma(1-\zeta)} \int_0^1 du \left(\frac{1-u}{u}\right)^\zeta \left(1-u \frac{p^2}{m^2}\right)^\zeta [2m-u\hat{p}] . \end{aligned}$$

Функция $F(\zeta, p)$ регулярна в полуплоскости $\text{Re } \zeta > -1$. Получим окончательно:

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}(p) &= -\frac{e^2}{8\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v(n)}{(n!)^3} \left(\frac{m^2 \ell^2}{4}\right)^n \times \\ &\times \{ F(n, p) \left[\log \frac{m^2 \ell^2}{4} + \frac{v'(n)}{v(n)} - 3\psi(n+1) \right] + F'(n, p) \} . \end{aligned}$$

Мы считаем, что элементарная длина ℓ достаточно мала, т.е.

$$m^2 \ell^2 \ll 1 .$$

Тогда легко получить до членов порядка $(m^2 \ell^2)^2$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Sigma}(p) &= \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 du (2m - u\hat{p}) \log \frac{m^2}{m^2 - u p^2} + \\
&+ \frac{e^2}{16\pi^2} m \left[(3 \log \frac{4}{m^2 \ell^2} + 3 v'(0) - 3 \psi(1) + 1) + \right. \\
&+ m^2 \ell^2 v(1) \left(\log \frac{4}{m^2 \ell^2} - \frac{v'(1)}{v(1)} + 2 \psi(1) - \frac{5}{12} \cdot \frac{p^2}{m^2} \right) + O((m^2 \ell^2)^2) \left. \right] - \\
&- \frac{e^2}{16\pi^2} (\hat{p} - m) \left[\left(\log \frac{4}{m^2 \ell^2} - v'(0) + 2 \psi(1) + 1 \right) - \right. \\
&- m^2 \ell^2 v(1) \left. \left(\frac{1}{12} - \frac{p^2}{m^2} + O((m^2 \ell^2)^2) \right) \right].
\end{aligned}$$

Это разложение справедливо для импульса p^2 в области $p^2 \ell^2 \ll 1$.

Интересно подсчитать поправку к массе электрона:

$$\delta m = m - m_0 = \tilde{\Sigma}(m) = \frac{e^2}{16\pi^2} m \left\{ \log \frac{4}{m^2 \ell^2} + O(1) \right\}.$$

Если считать, что масса электрона целиком электромагнитного происхождения, т.е. $m = 0$, тогда получим

$$m \ell = 2 \exp \left\{ -\frac{8\pi^2}{e^2} \right\} \approx 10^{-10^4} \quad \text{и} \quad \ell < 10^{-10^4} \text{ см.}$$

Иными словами, мы получили для элементарной длины исключительно "бессмысленно" маленькое значение.

Поскольку в этом случае имеем $\frac{e^2}{16\pi^2} \log \frac{4}{m^2 \ell^2} \approx 1$, то, строго говоря, мы не имеем права пользоваться теорией возмущений. Поэтому полученные числа должны рассматриваться как очень грубая оценка.

Если же считать, что величина элементарной длины лежит где-то в области

$$\ell^{-1} \approx 100 + 1000 \text{ ГэВ},$$

тогда $\log \frac{4}{m^2 \ell^2} \approx 50 + 60$

и

$$\delta m = m - m_0 \approx 2 \cdot 10^{-3} \quad m \approx 10^{-3} \text{ МэВ}.$$

Это означает, что в этом случае масса электрона имеет в основном неэлектромагнитное происхождение, и электромагнитные поправки реально малы.

7. Вершинная диаграмма

Рассмотрим вершинную диаграмму, представленную на рис. 1 (II).
Этой диаграмме соответствует матричный элемент

$$i e : \bar{\psi}(x) \Gamma_{\mu}(x, z | y) \psi(z) : A_{\mu}(y),$$

где введена вершинная функция третьего порядка

$$\Gamma_{\mu}(x, z | y) = i e^2 \gamma_{\nu} S(x-y) \gamma_{\mu} S(y-z) \gamma_{\nu} D(x-z).$$

Выберем импульсные переменные, как показано на рис. 5.

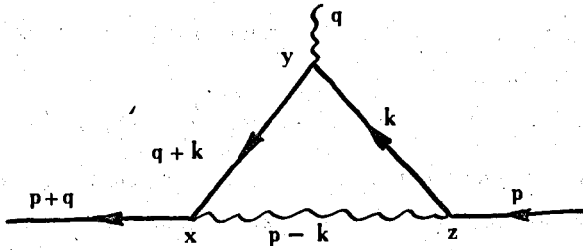


Рис. 5

Переходя к импульсному представлению, согласно принятой нами регуляризационной процедуре, получим в евклидовой метрике

$$\begin{aligned}
 \bar{\Gamma}_\mu(p, q) &= i e^2 \int d y \int d z e^{i p z + i q y} \gamma_\nu S(y) \gamma_\mu S(z-y) \gamma_\nu D(z) = \\
 &= -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k_E V(\ell^2(p_E - k_E)^2)}{(p_E - k_E)^2} \gamma_\nu \frac{m + \hat{k}_E + \hat{q}_E}{m^2 + (k_E + q_E)^2} \gamma_\mu \frac{m + \hat{k}_E}{m^2 + k_E^2} \gamma_\nu = \\
 &= -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{2i} \int_{-\beta+1\infty}^{-\beta-1\infty} \frac{d\zeta v(\zeta) \left(\frac{\ell^2}{4}\right)^\zeta}{\sin \pi \zeta \cdot \Gamma^2(1+\zeta)} \int \frac{d^4 k_E \gamma_\nu (m + \hat{k}_E + \hat{q}_E) \gamma_\mu (m + \hat{k}_E) \gamma_\nu}{[(p_E - k_E)^2]^{1-\zeta} [m^2 + (k_E + q_E)^2] [m^2 + k_E^2]} = \\
 &= -\frac{e^2}{8\pi} \frac{1}{2i} \int_{-\beta+1\infty}^{-\beta-1\infty} \frac{d\zeta v(\zeta)}{[\sin \pi \zeta]^2 \Gamma^2(1+\zeta)} \left(\frac{m^2 \ell^2}{4}\right)^\zeta \{ \gamma_\mu F_1(\zeta; p, q) + F_{2\mu}(\zeta; p, q) \},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 F_1(\zeta; p, q) &= \frac{1}{\Gamma(1-\zeta)} \iiint_0^1 \frac{d a d \beta d y a^{-\zeta} \delta(1-a-\beta-y)}{[\beta + \gamma + a \gamma \frac{p_E^2}{m^2} + \beta \gamma \frac{q_E^2}{m^2} + \frac{(p_E + q_E)^2}{m^2} a \beta]^{-\zeta}} \\
 F_{2\mu}(\zeta; p, q) &= \frac{1}{\Gamma(-\zeta)} \iiint_0^1 \frac{d a d \beta d y a^{-\zeta} \delta(1-a-\beta-y)}{[\beta + \gamma + a \gamma \frac{p_E^2}{m^2} + \beta \gamma \frac{q_E^2}{m^2} + a \beta \frac{(p_E + q_E)^2}{m^2}]^{1-\zeta}} \times
 \end{aligned}$$

$$\times [m^2 \gamma_\mu - 2mq_\mu + 4m(\beta q_\mu - \alpha p_\mu) + (\alpha \hat{p} - \beta \hat{q}) \gamma_\mu \hat{q} + \\ + (\alpha \hat{p} - \beta \hat{q}) \gamma_\mu (\alpha \hat{p} - \beta \hat{q})].$$

Легко проверить, что вершинная часть удовлетворяет условию градиентной инвариантности

$$q_\mu \bar{u}(\vec{p} + \vec{q}) \Gamma_\mu(p, q) u(\vec{p}) = 0,$$

где $u(\vec{p})$ и $\bar{u}(\vec{p} + \vec{q})$ — спиноры Дирака, описывающие электрон в начальном и конечном состояниях.

Считая величину $m^2 \ell^2$ малой, можно получить для вершинной функции $\Gamma_\mu(p, q)$ выражение

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_\mu(p, q) = & \gamma_\mu \frac{e^2}{16\pi^2} \left\{ \left(\log \frac{4}{m^2 \ell^2} - v'(0) + 2\psi(1) + 1 \right) + \right. \\ & + \left[\frac{m^2}{(p+q)^2} - \frac{3}{2} - \frac{(m^2 + (p+q)^2)^2}{[(p+q)^2]^2} \log \frac{m^2 - (p+q)^2}{m^2} \right] - \\ & \left. - 2 \int_0^1 d\alpha \int_0^{1-\alpha} d\beta \beta \frac{(1-2\beta)q^2 + 2\alpha(pq)}{[(1-\alpha)m^2 - \alpha p^2 - \beta q^2 + (\alpha p - \beta q)^2]} \right\} + \\ & + \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 d\alpha \int_0^{1-\alpha} d\beta \frac{\gamma_\mu m^2 - 2mq_\mu + 4m(\beta q_\mu - \alpha p_\mu) + (\alpha \hat{p} - \beta \hat{q}) \gamma_\mu \hat{q} + (\alpha \hat{p} - \beta \hat{q}) \gamma_\mu (\alpha \hat{p} - \beta \hat{q})}{[(1-\alpha)m^2 - \alpha p^2 - \beta q^2 + (\alpha p - \beta q)^2]} + \\ & + O(m^2 \ell^2). \end{aligned}$$

8. Диаграмма поляризации вакуума

Рассмотрим диаграмму поляризации вакуума, представленную на рис. 1. Член матрицы рассеяния, соответствующий этой диаграмме, представим в виде

$$-i : A_{\mu}(x) \Pi_{\mu\nu}(x-y) A_{\nu}(y) : ,$$

где

$$\Pi_{\mu\nu}(x-y) = -i e^2 \text{Sp} [\gamma_{\mu} S(x-y) \gamma_{\nu} S(y-x)] .$$

Используя принятый нами метод регуляризации, получим в импульсном пространстве:

$$\text{reg } \Pi_{\mu\nu}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \text{reg } \bar{\Pi}_{\mu\nu}(p) e^{ip(x-y)}$$

где

$$\begin{aligned} \text{reg } \bar{\Pi}_{\mu\nu}(p) &= \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \sum_{j=0}^3 c_j \text{Sp} \left\{ \gamma_{\mu} \frac{1}{m_j - \hat{k} - i\epsilon} \gamma_{\nu} \frac{1}{m_j - (\hat{k} - \hat{p}) - i\epsilon} \right\} = \\ &= (p_{\mu} p_{\nu} - \delta_{\mu\nu} p^2) \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 da \alpha(1-\alpha) \left\{ \log \frac{m^2 - \alpha(1-\alpha)p^2}{m^2} + \sum_{j=1}^3 c_j \log \left(\Lambda_j - \alpha(1-\alpha) \frac{p^2}{m^2} \right) \right\} . \end{aligned}$$

Согласно нашему дополнительному условию (4.3), сумма по j в фигурных скобках исчезает в пределе $\Lambda_j \rightarrow \Lambda \rightarrow \infty$, и мы получим окончательно:

$$\bar{\Pi}_{\mu\nu}(p) = \lim_{\Lambda_j \rightarrow \Lambda \rightarrow \infty} \text{reg } \bar{\Pi}_{\mu\nu}(p) = (\delta_{\mu\nu} p^2 - p_{\mu} p_{\nu}) \bar{\Pi}(p^2)$$

$$\bar{\Pi}(p^2) = \frac{e^2}{12\pi^2} p^2 \int_{4m^2}^{\infty} \frac{du}{(u - p^2 - i\epsilon)u} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{u}} \left(1 + \frac{2m^2}{u} \right) .$$

$$\times [m^2 \gamma_\mu - 2mq_\mu + 4m(\beta q_\mu - \alpha p_\mu) + (\alpha \hat{p} - \beta \hat{q}) \gamma_\mu \hat{q} + \\ + (\alpha \hat{p} - \beta \hat{q}) \gamma_\mu (\alpha \hat{p} - \beta \hat{q})].$$

Легко проверить, что вершинная часть удовлетворяет условию градиентной инвариантности

$$q_\mu \bar{u}(\vec{p} + \vec{q}) \Gamma_\mu(p, q) u(\vec{p}) = 0,$$

где $u(\vec{p})$ и $\bar{u}(\vec{p} + \vec{q})$ — спиноры Дирака, описывающие электрон в начальном и конечном состояниях.

Считая величину $m^2 \ell^2$ малой, можно получить для вершинной функции $\Gamma_\mu(p, q)$ выражение

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_\mu(p, q) = & \gamma_\mu \frac{e^2}{16\pi^2} \left\{ \left(\log \frac{4}{m^2 \ell^2} - v'(0) + 2\psi(1) + 1 \right) + \right. \\ & + \left[\frac{m^2}{(p+q)^2} - \frac{3}{2} - \frac{(m^2 + (p+q)^2)^2}{[(p+q)^2]^2} \log \frac{m^2 - (p+q)^2}{m^2} \right] - \\ & - 2 \int_0^1 d\alpha \int_0^{1-\alpha} d\beta \beta \frac{(1-2\beta)q^2 + 2\alpha(pq)}{[(1-\alpha)m^2 - \alpha p^2 - \beta q^2 + (\alpha p - \beta q)^2]} \left. \right\} + \\ & + \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 d\alpha \int_0^{1-\alpha} d\beta \frac{\gamma_\mu m^2 - 2mq_\mu + 4m(\beta q_\mu - \alpha p_\mu) + (\alpha \hat{p} - \beta \hat{q}) \gamma_\mu \hat{q} + (\alpha \hat{p} - \beta \hat{q}) \gamma_\mu (\alpha \hat{p} - \beta \hat{q})}{[(1-\alpha)m^2 - \alpha p^2 - \beta q^2 + (\alpha p - \beta q)^2]} + \\ & + 0(m^2 \ell^2). \end{aligned}$$

8. Диаграмма поляризации вакуума

Рассмотрим диаграмму поляризации вакуума, представленную на рис. 1. Член матрицы рассеяния, соответствующий этой диаграмме, представим в виде

$$-i : A_{\mu}(x) \Pi_{\mu\nu}(x-y) A_{\nu}(y) : ,$$

где

$$\Pi_{\mu\nu}(x-y) = -i e^2 \text{Sp} [\gamma_{\mu} S(x-y) \gamma_{\nu} S(y-x)] .$$

Используя принятый нами метод регуляризации, получим в импульсном пространстве:

$$\text{reg } \Pi_{\mu\nu}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \text{reg } \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p) e^{ip(x-y)}$$

где

$$\begin{aligned} \text{reg } \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p) &= \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \sum_{j=0}^3 c_j \text{Sp} \left\{ \gamma_{\mu} \frac{1}{m_j - \hat{k} - i\epsilon} \gamma_{\nu} \frac{1}{m_j - (\hat{k} - \hat{p}) - i\epsilon} \right\} = \\ &= (p_{\mu} p_{\nu} - \delta_{\mu\nu} p^2) \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 d\alpha \alpha(1-\alpha) \left\{ \log \frac{m^2 - \alpha(1-\alpha)p^2}{m^2} + \sum_{j=1}^3 c_j \log \left(\Lambda_j - \alpha(1-\alpha) \frac{p^2}{m^2} \right) \right\} . \end{aligned}$$

Согласно нашему дополнительному условию (4.3), сумма по j в фигурных скобках исчезает в пределе $\Lambda_j \rightarrow \Lambda \rightarrow \infty$, и мы получим окончательно:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p) &= \lim_{\Lambda_j \rightarrow \Lambda \rightarrow \infty} \text{reg } \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p) = (\delta_{\mu\nu} p^2 - p_{\mu} p_{\nu}) \tilde{\Pi}(p^2) \\ \tilde{\Pi}(p^2) &= \frac{e^2}{12\pi^2} p^2 \int_{4m^2}^{\infty} \frac{du}{(u - p^2 - i\epsilon)u} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{u}} \left(1 + \frac{2m^2}{u} \right) . \end{aligned}$$

Итак, в рамках принятой нами регуляризации поляризационный оператор конечен при снятии регуляризации и совпадает с перенормированным выражением в обычной локальной электродинамике. Он нормирован условием

$$\tilde{\Pi}(0) = 0.$$

Это означает, что по крайней мере во втором порядке теории возмущений не происходит перенормировки заряда e , т.е. физический заряд электрона совпадает с затравочным.

9. Градиентная инвариантность S-матрицы

Легко видеть, что полученная S-матрица будет градиентно-инвариантна. Действительно, в рассматриваемой нами нелокальной электродинамике выполнено тождество Уорда:

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu} \tilde{\Sigma}(p) = -\tilde{\Gamma}_\mu(p, 0), \quad (9.1)$$

поскольку оно является следствием тождества

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu} \frac{1}{m - \hat{p}} = \frac{1}{m - \hat{p}} \gamma_\mu \frac{1}{m - \hat{p}}. \quad (9.2)$$

Так как нам не надо делать никаких вычитаний бесконечных контрчленов, то в ряду теории возмущений не могут возникнуть никакие опасные члены, которые могли бы нарушать тождество (9.1), когда справедливо (9.2).

Доказательство градиентной инвариантности в форме (2.4) в ряду теории возмущений довольно просто и основано на использовании тождества

$$k_{\mu} \left\{ \frac{1}{m - \hat{p}_1} \gamma_{\mu} \frac{1}{m - \hat{p}_2} \right\} = \frac{1}{m - \hat{p}_1} - \frac{1}{m - \hat{p}_2},$$

если $k = p_1 - p_2$.

Диаграмма поляризации вакуума градиентно-инвариантна согласно выбранной нами регуляризационной процедуре.

10. Заключение

Каков произвол в построенной нами электродинамике? Это формфактор фотона. С теоретической точки зрения необходимо привлечь какие-то новые физические или математические идеи, чтобы как-то однозначно выбрать этот формфактор.

Если провести перенормировку в нелокальной электродинамике, т.е. перейти к наблюдаемым величинам заряда и массы электрона, тогда члены ряда теории возмущений, логарифмически зависящие от элементарной длины, как $\log \frac{1}{m^2 \ell^2}$, исчезнут из перенормированного ряда для S -матрицы. Это будет означать, что поправки, связанные с нелокальными эффектами, будут порядка

$$O(m^2 \ell^2) \quad \text{и} \quad O(p^2 \ell^2).$$

Если теперь принять гипотезу электромагнитного происхождения массы электрона, т.е.

$$m^2 \ell^2 \approx 10^{-10^4},$$

будет видно, что эффекты нелокальности спрятаны столь глубоко, что не существует никаких надежд экспериментально добраться до этой области.

Следовательно, если даже реальная теория является нелокальной, то тогда обычная локальная электродинамика в области реально достижимых энергий является, безусловно, прекрасным приближением нелокальной теории.

Если же масса электрона неэлектромагнитного происхождения, тогда элементарная длина должна быть связана с неизвестной пока физической взаимодействием. Поэтому поправки типа $O(m^2 \ell^2)$ или $O(p^2 \ell^2)$ можно пытаться измерить на опыте.

Нелокальная интерпретация квантовой электродинамики позволяет придать теории математический смысл без введения бесконечных контрчленов и дает нам моральное удовлетворение, что можно избавиться от трудностей, связанных с ультрафиолетовыми расходимостями, имея конечную связь между затравочными и наблюдаемыми параметрами теории (e , m , Z_2 , Z_3 , Z_1).

И, наконец, построенная S -матрица удовлетворяет всем аксиомам нелокальной квантовой теории поля в каждом порядке теории возмущений (см. ^{17/}).

При $\ell \rightarrow 0$ нелокальная теория переходит в обычный вариант локальной перенормированной электродинамики.

В заключение выражаю глубокую благодарность проф. Д.И. Блохинцеву, академику М.А. Маркову и В.И. Огневцову за полезные обсуждения.

Л и т е р а т у р а

1. В.А. Петрунькин. Труды II Международного совещания по нелокальной квантовой теории поля. Издание ОИЯИ, 2-5400, Дубна, 1971.
2. Л.Д. Соловьев. Труды XV Международной конференции по физике элементарных частиц в Киеве. Издание ОИЯИ, 5454, Дубна, 1970.
3. Д.И. Блохинцев. УФН, 61, 137 (1957).
4. Д.А. Киржниц. УФН, 90, 129 (1966); Труды Международного совещания по нелокальной квантовой теории поля, Препринт ОИЯИ, P2-3590, Дубна, 1968.
5. Д.А. Киржниц, А.Н. Лезнов. ЖЭТФ, 48, 622 (1965).

6. T.D.Lee, G.C.Wick. Nucl. Phys., 39, 209 (1969).
7. Г.В. Ефимов. Commun. Math. Phys., 5, 42 (1967); 7, 138 (1968); ЯФ, 4, 432, 1966; Препринт ИТФ-68-52,54,55, Киев, 1968; Проблемы физики, ЭЧАЯ, том 1, вып. 1, 256 (1970).
8. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат, 1957.
9. С. Швебер, Г. Бете, Ф. Гофман. Мезоны и поля, том 1, ИЛ, Москва, 1957.
10. V.I.Ogievetski, I.V.Polubarinov. Nuovo Cim., 23, 173 (1962).
11. Х. Умэдзава. Квантовая теория поля. ИЛ, Москва, 1958.
12. Д.А. Славнов. ДАН СССР, 143, 570 (1962); ЖЭТФ, 42, 1543 (1962); 47, 224 (1964).

Рукопись поступила в издательский отдел

16 марта 1971 года.