ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна.

Р2 – 5692

В.И. Огиевецкий

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ КИРАЛЬНОЙ $SU(3) \times SU(3)$ СИММЕТРИИ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1971

P2-5692

В.И. Огиевецкий

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ КИРАЛЬНОЙ SU(3)×SU(3) СИММЕТРИИ

Направлено в сборник, посвященный 75-летию со дня рождения академика И.Е. Тамма

Теории симметрии элементарных частиц находятся сейчас на той же стадии, что и периодическая система элементов Менделеева, когда велись её поиски. Сегодняшние исследования отнюдь не решают фундаментальной проблемы понимания законов явлений, протекающих в ультрамалых масштабах и при экстремально высоких энергиях.

И.Е. ТАММ

I. Введение

Понятие симметрии в физике элементарных частиц претерпело в последние годы существенное изменение. Симметрии, с которыми приходится иметь дело, оказываются сильно нарушенными, но, как это ни парадоксально, такое нарушение разумно предполагать имеющим простые трансформационные свойства. Примеры - унитарная симметрия с октетным нарушением, киральная $SU(2) \times SU(2)$ симметрия с нарушением типа 4-й компоненты кирального вектора, и, наконец, киральная $SU(3) \times SU(3)$ симметрия, связанная с векторными и аксиальными токами из слабого взаимодействия, в которой по гипотезе Гелл-Манна-Оакса-Реннера /1/ нарушение имеет трансформационные свойства $(3,3^*)+(3^*,3)$ представления. Как показал Вайнберг /2/ на примере киральной $SU(2) \times SU(2)$- симметрии, такую ситуацию можно феноменологически понять следующим образом.

Пусть теория инвариантна относительно некоторой группы G, которая реализуется нелинейными преобразованиями полей и только её "хорошая" подгруппа H представляется линейными преобразованиями. Тогда алгебраические следствия - классификация частиц по мультиплетам и, вообще, соотношения между процессами с фиксированным числом частиц - будут связаны только с "хорошей" подгруппой H. В целом же симметрия G будет динамической, она будет давать ограничения на вид взаимодействий и теоремы малых энергий, но не приведет к алгебраическим следствиям, в частности, к классификации по мультиплетам группы G. Симметрия окажется спонтанно нарушенной, в теории должны быть голдстоновские поля (ниже-голдоны) с квантовыми числами генераторов группы G, порождающих нелинейные преобразования. Для динамических симметрий характерно, что производные полей входят в лагранжиан через так называемые "ковариантные" производные. При этом амплитуды рассеяния вперед голдонов, описываемые графиками типа деревьев (т.е. без замкнутых петель), растут слишком быстро при больших энергиях. Вайнберг выдвинул постулат, что совокупность всех деревьев должна давать амплитуды с разумным асимптотическим поведением, не портящим, например, предсказаний теории полюсов Редже. Это требование приводит к восстановлению алгебраических свойств в нужном направлении. Восстанавливается классификация по мультиплетам для частиц с заданной спиральностью, но массовый оператор не инвариант, а обладает простыми трансформационными свойствами. В киральной $SU(2)\times SU(2)$ динамике оператор квадрата массы m^2 может содержать примесь 4-й компоненты кирального вектора /2/. В унитарной симметрии восстанавливается классификация по унитарным супермультиплетам, но оператор квадрата массы может содержать примесь октета (и только октета) /3/. Эти примеси возникают в теории с точной динамической симметрией, не нарушают её, и поэтому могут быть большими, они есть следствие динамического ограничения на возможный рост амплитуд вперед, описываемых графиками-деревьями.

Симметрию $SU(3)\times SU(3)$ с линеаризацией на унитарной группе $SU(3)$ рассматривал в этом плане Садбери /4/. Однако унитарная симметрия сама сильно нарушается. Представляется более последовательным изучать динамическую симметрию $SU(3)\times SU(3)$ с линеаризацией на заведомо хорошей подгруппе изотопического спина и гиперзаряда $SU(2)\times Y$. Этой задаче посвящена настоящая работа.

Результаты получаются обнадеживающими. Восстанавливаются алгебраические свойства $SU(3)\times SU(3)$ таким образом, что оператор квадрата массы может содержать примесь представления $(3,3^*) + (3^*,3)$ и только такую примесь в соответствии с популярной сейчас гипотезой /1/, и возникают дополнительные ограничения. Важное отличие рассматриваемой динамической симметрии от изученных ранее /2-4/ в том, что ковариантные производные голдонов (π- , K- , η- и $\varkappa$ -мезонов) содержат билинейные по полям члены. Перспективы и трудности подхода, в частности, проблема массы π- , K- , η- и $\varkappa$ -мезонов, обсуждаются в заключении.

2. Динамическая симметрия $SU(3)\times SU(3)$ с линеаризацией на подгруппе изоспина и гиперзаряда $U_2 = SU(2)\times Y$

Обозначим генераторы $SU(3)\times SU(3)$ через F^α, $F^{\alpha 5}$ ($\alpha = 1,\dots 8$). Генераторами её хорошей подгруппы изоспина и гиперзаряда $U(2)$ будут F^i ($i = 1,2,3$) и F^8 . Согласно общей теории /5,6/, введем необходимые в этом случае голдоны: π- мезоны $\pi_i = \frac{f_\pi}{2}\bar{\theta}_i$, η - мезон $\eta = \frac{f_\eta}{2}\bar{\theta}_8$, K - мезоны $K_a = \frac{f_K}{2}\bar{\theta}_a$ и скалярные изоспинорные $\varkappa$ - мезоны $\varkappa_a = \frac{f_\varkappa}{2}\theta_a$ ($a = 4,5,6,7$), где F_π , F_η , F_K , $F_\varkappa$ - распадные константы размерности энергии. Пусть $\theta=\sum_{\alpha=1}^{8}\bar{\theta}_\alpha F^{\alpha 5}+\sum_{a=4}^{7}\theta_a F^a$. Тогда нелинейное преобразование голдонов можно определить согласно /5/

$$g\in SU(3)\times SU(3):\quad g e^{i\theta}=e^{i\theta'}e^{i\sum_{i=1,2,3,8}u_i(\theta,g)F^i}, \tag{2.I}$$

где θ' представляют преобразованные поля, а $u_i(\theta,g)$ - некоторые функции элемента группы g и полей θ . При этом произвольное поле ψ преобразуется согласно

$$\psi'=D\left(e^{i\sum_{i=1,2,3,8}u_i(\theta,g)F^i}\right)\psi, \tag{2.2}$$

где $D(e^{iu_iF^i})$ есть линейное представление группы $U(2)$ для поля ψ . Иными словами, преобразование (2,2) есть изотопическое плюс гиперзарядное вращение с параметрами $u_i(\theta(x),g)$, нелинейно зависящими от полей $\theta(x)$. Поэтому возникает необходимость в ковариантных производных $\mathcal{D}_\mu\psi$, которые преобразовывались бы в точности по такому же закону

$$(\mathcal{D}_\mu\psi)'=D(e^{u_iF^i})\mathcal{D}_\mu\psi \tag{2.3}$$

и ковариантных производных голдонов $\mathcal{D}_\mu\theta$ с аналогичным законом преобразования, определяемым изоспином и гиперзарядом каждого из них. Ковариантные производные определяются из

$$-ie^{-i\theta}\partial_\mu e^{i\theta}=\sum_{\alpha=1}^{8}\mathcal{D}_\mu\bar{\theta}_\alpha\cdot F^{\alpha 5}+\sum_{a=4}^{7}\mathcal{D}_\mu\theta_a\cdot F^a+\sum_{i=1,2,3,8}v_\mu^i(\theta)F^i, \tag{2.4}$$

где $\mathcal{D}_\mu\bar{\theta}$, $\mathcal{D}_\mu\theta$ - ковариантные производные голдонов ,а величины $v_\mu^i(\theta)$ определяют ковариантные производные любых других полей; для произвольного поля ψ

$$\mathcal{D}_\mu\psi=\partial_\mu\psi+i\sum_{i=1,2,3,8}v_\mu^i T^i\psi, \tag{2,5}$$

где T^i – матрицы, представляющие изотопические вращения поля Ψ, а $\frac{2}{\sqrt{3}}T^8 = Y$ – его гиперзаряд. Из (2.4) следует

$$
\begin{aligned}
&F_\pi^{-1}(\mathcal{D}_\mu-\partial_\mu)\pi_i = F_K^{-1}F_\varkappa^{-1} f_{iab}\, \varkappa_a \overleftrightarrow{\partial_\mu} K_b + O(\theta^3),\\
&F_\eta^{-1}(\mathcal{D}_\mu-\partial_\mu)\eta = F_K^{-1}F_\varkappa^{-1} f_{8ab}\, \varkappa_a \overleftrightarrow{\partial_\mu} K_b + O(\theta^3),\\
&F_K^{-1}(\mathcal{D}_\mu-\partial_\mu)K_a = F_\varkappa^{-1}\left(F_\pi^{-1} f_{abi}\, \varkappa_b \overleftrightarrow{\partial_\mu}\pi_i + F_\eta^{-1} f_{ab8}\, \varkappa_b \overleftrightarrow{\partial_\mu}\eta\right) + O(\theta^3),\\
&F_\varkappa^{-1}(\mathcal{D}_\mu-\partial_\mu)\varkappa_a = F_K^{-1}\left(F_\pi^{-1} f_{abi} K_b \overleftrightarrow{\partial_\mu}\pi_i + F_\eta^{-1} f_{ab8} K_b \overleftrightarrow{\partial_\mu}\eta\right) + O(\theta^3),\\
&v_\mu^i(\theta) = F_\pi^{-2}\varepsilon_{ijk}\pi_j \overleftrightarrow{\partial_\mu}\pi_k + f_{iab}\left(F_K^{-2}K_a \overleftrightarrow{\partial_\mu} K_b + F_\varkappa^{-2}\varkappa_a\overleftrightarrow{\partial_\mu}\varkappa_b\right) + O(\theta^3),\\
&v_\mu^8(\theta) = f_{8ab}\left(F_K^{-2}K_a \overleftrightarrow{\partial_\mu} K_b + F_\varkappa^{-2}\varkappa_a\overleftrightarrow{\partial_\mu}\varkappa_b\right) + O(\theta^3),
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

где явно выписаны только интересующие нас билинейные по полям члены, $O(\theta^3)$ – члены третьей степени, $f_{\alpha\beta\gamma}$ – структурные константы $SU(3)$, $A\overleftrightarrow{\partial_\mu}B = A\partial_\mu B - \partial_\mu A\, B$. Подчеркнем, что в случаях киральной группы $SU(2)\times SU(2)$ и унитарной симметрии ковариантные производные не содержали билинейных по полям членов. Здесь же, в $SU(3)\times SU(3)$, они появляются и будут играть важную роль. Вид этих членов зависит от выбора "представителя" группы $SU(3)\times SU(3)/U(2)$. Для других выборов, например $e^{i\theta_\alpha F^{\alpha5}}\cdot e^{i\theta_a F^a}$ или $e^{i\theta_i F^{i5}+i\theta_8 F^{85}}e^{i\bar\theta_a F^{a5}+i\theta_a F^a}$, обсуждаемых в /6/, билинейные члены имеют другой вид. Различные выборы представителей соответствуют различным выборам переменных поля для описания пионов, каонов и каппаонов. Наш выбор наиболее симметричен и упрощает дальнейшие вычисления.

Все поля, их ковариантные производные и ковариантные производные голдонов преобразуются по линейным представлениям группы изоспина и гиперзаряда $U(2)$ при любых преобразованиях $SU(3)\times SU(3)$ (только параметры зависят от голдонов). Поэтому любой лагранжиан будет $SU(3)\times SU(3)$ инвариантным, если он построен из различных изомультиплетов, их ковариантных производных и ковариантных производных π-, η-, K- и $\varkappa$-мезонов так, чтобы соблюдалась изотопическая инвариантность и сохранялся гиперзаряд. При этом не нужны никакие связи между значениями масс частиц с разным изоспином, гиперзарядом, четностью и т.д., и нет никаких ограничений на константы связи. Все алгебраические следствия динамической симметрии $SU(3)\times SU(3)$ сводятся к законам сохранения изоспина и гиперзаряда, связанным с её подгруппой $U(2)$, на которой она линеаризуется. Симметрия $SU(3)\times SU(3)$ в таком подходе спонтанно нарушена и дает только динамические ограничения типа теорем малых энергий для π-, η-, K- и $\varkappa$-мезонов.

Лагранжиан существенно нелинеен и с необходимостью содержит взаимодействия с производными. Из вида ковариантных производных (2.6) следует, что обязательно имеется минимальное контактное взаимодействие, описывающее рассеяние π-, η- , K и $\varkappa$ -мезонов вида

$$\mathcal{L}_{min}=V_\mu^i(x)\left[F_\pi^{-2}\varepsilon_{ijk}\pi_j\overleftrightarrow{\partial}_\mu\pi_k+\left(F_K^{-2}K_a\overleftrightarrow{\partial}_\mu K_b+F_\varkappa^{-2}\varkappa_a\overleftrightarrow{\partial}_\mu\varkappa_b\right)f_{iab}\right]+ \tag{2.7}$$

$$+V_\mu^8(x)\left(F_K^{-2}K_a\overleftrightarrow{\partial}_\mu K_b+F_\varkappa^{-2}\varkappa_a\overleftrightarrow{\partial}_\mu\varkappa_b\right)f_{8ab}+O(\theta^3).$$

Кроме того, могут быть неминимальные взаимодействия с одной ковариантной производной

$$\mathcal{L}' = F_\pi^{-1} V_{\mu 5}^{i} \mathcal{D}_\mu \pi_i + F_K^{-1} V_{\mu 5}^{a} \mathcal{D}_\mu K_a + F_{\varkappa}^{-1} V_\mu^{a} \mathcal{D}_\mu \varkappa_a' + F_\eta^{-1} V_{\mu 5}^{8} \mathcal{D}_\mu \eta \tag{2.8}$$

и взаимодействия с большим числом ковариантных производных π-, K-, $\varkappa$ и η - мезонов. В (2.7) и (2.8) $V_\mu^i(x)$ - сохраняющийся изотопический ток, $\frac{2}{\sqrt{3}} V_\mu^8(x)$ - сохраняющийся гиперзарядный ток, $V_{\mu 5}^{i}(x)$ (i = I,2,3), $V_{\mu 5}^{a}(x)$ ($a = 4,5,6,7$) и $V_{\mu 5}^{8}(x)$ феноменологические аксиальные токи, $V_\mu^a(x)$ ($a = 4,5,6,7$) - феноменологический меняющий странность векторный ток. Отметим, что (2.8) описывает не только вершины, но и контактное взаимодействие за счет билинейных по полям членов в ковариантных производных (2.6).

Каждый отдельный график Фейнмана дает недопустимо быстро растущий с энергией вклад в амплитуду, по крайней мере в низшем порядке, когда используются графики-деревья, т.е. диаграммы Фейнмана без замкнутых петель. Следуя Вайнбергу /2/, мы потребуем, чтобы совокупность всех возможных деревьев для рассеяния вперед приводила к амплитудам, которые не портят предсказаний теории полюсов Редже. Мы требуем, чтобы недопустимые вклады графиков-деревьев компенсировались взаимно, отдельно от вкладов графиков с петлями. Это требование постулативно, обосновать его трудно. Оно оказалось плодотворным в киральной $SU(2)\times SU(2)$ симметрии /2/ и унитарной симметрии $SU(3)$ /3/, и дало разумные результаты. Здесь мы проведем эту программу для киральной симметрии $SU(3)\times SU(3)$.

3. Асимптотика амплитуд, описываемых графиками-деревьями

Рассмотрим, следуя Вайнбергу /2/, коллинеарные процессы $M+\alpha \to M'+\beta$, где α и β - любые частицы или резонансы, а M , M' - π-, η- , K- и $\varkappa$–мезоны, которые в этом подходе являются голдонами, и мы будем пренебрегать их массой. Удобна коллинеарная система, в которой

$$q_\mu = n_\mu \omega,\ q'_\mu = n_\mu \omega',\ \vec{p} = -\vec{n}p,\ \vec{p}' = -\vec{n}p',\ |\vec{n}| = n_0 = 1, \tag{3.1}$$

где $q_\mu, q'_\mu, p_\mu, p'_\mu$ – 4-импульсы частиц M , M' , α и β , соответственно. Сохранение энергии и импульса дает

$$p + \sqrt{p^2 + m_\alpha^2} = p' + \sqrt{p'^2 + m_\beta^2} \equiv E,\quad \omega' = \omega + \frac{m_\alpha^2 - m_\beta^2}{2E}, \tag{3.2}$$

и инвариантные переменные записываются

$$s = m_\alpha^2 + 2\omega E,\ t = 0,\ u = m_\alpha^2 - 2\omega' E. \tag{3.3}$$

Спиральность сохраняется, $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \lambda$.

В такой кинематике удобно параметризовать феноменологические токи, входящие в эффективный лагранжиан (2.8) в виде

$$\langle p', \lambda' \beta | n_\mu V_{\mu 5}^{a,i,8}(0) | p, \lambda, \alpha \rangle = \frac{4E\delta_{\lambda\lambda'}}{(2\pi)^3 \sqrt{4p_0 p'_0}} \left[T^{a,i,8;5}(\lambda) \right]_{\beta\alpha}, \tag{3.4}$$

$$\langle p' \lambda' \beta | n_\mu V_\mu^a (0) | p, \lambda, \alpha \rangle = \frac{4E\delta_{\lambda\lambda'}}{(2\pi)^3 \sqrt{4p_0 p'_0}} \left[T^a(\lambda) \right]_{\beta\alpha},$$

где $T^{a5}(\lambda)$, $T^{i5}(\lambda)$, $T^{85}(\lambda)$ и $T^a(\lambda)$ - эрмитовы матрицы, зависящие от спиральности.

Мы будем изучать асимптотику инвариантных амплитуд по энергии ω при фиксированных импульсах частиц α и β . Графики-деревья дают амплитуду вида

$$M_{\beta M', \alpha M}(\omega,\lambda) = P_{\beta M', \alpha M}(\omega,\lambda) + \tag{3.5}$$

$$+ \omega\cdot\omega' \sum_\gamma \frac{\tilde{\Omega}^\gamma_{\beta M', \alpha M}(\omega,\lambda)}{s - m_\gamma^2} + \frac{\tilde{\Omega}^\gamma_{\beta M, \alpha M'}(-\omega',\lambda)}{u - m_\gamma^2}$$

Здесь $P_{\beta M', \alpha M}(\omega,\lambda)$ – некоторый полином, описывающий контактные взаимодействия и обмены виртуальными частицами в t-канале, графики рис. I(см.стр.24). Остальная часть амплитуды соответствует графикам рис. 2 с обменом различными частицами γ в s – канале; $\tilde{\Omega}_{\beta H', \alpha H}(\omega,\lambda)$ – полином по ω, возникающий из числителей пропагаторов γ – частиц, и множитель $\omega\omega'$ дают производные голдонов в эффективном лагранжиане (2.8).

Удобно ввести амплитуды

$$M^{-}_{\beta H', \alpha H}(\omega,\lambda) = (\omega+\omega')^{-1}\left(M_{\beta H', \alpha H}(\omega,\lambda) - M_{\beta H, \alpha H'}(-\omega',\lambda)\right), \tag{3.6}$$

$$M^{+}_{\beta H', \alpha M}(\omega,\lambda) = \frac{1}{2}\left(M_{\beta H', \alpha H}(\omega,\lambda) + M_{\beta H, \alpha M'}(-\omega',\lambda)\right),$$

которые четны относительно замены $\omega \leftrightarrow -\omega'$, $M^{\mp}(-\omega') = M^{\mp}(\omega)$, в силу свойства кроссинг-симметрии. Амплитуды $M^{-}(M^{+})$ с индексами одного типа антисимметричны (симметричны) относительно замены индексов $i \leftrightarrow j$ для реакций $\pi_i \to \pi_j$, $a \leftrightarrow b$ для реакций $K_a \to K_b$, $\varkappa_a \to \varkappa_b$. Для идентификации квантовых чисел в t – канале полезно определить симметричные и антисимметричные амплитуды и для реакций $K \leftrightarrow \varkappa$:

$$\left(M^{\pm}_{\beta K_a, \alpha\varkappa_b}\right)_{\substack{\text{сим}\\ \text{асим}}} = \frac{1}{2}\left(M^{\pm}_{\beta K_a, \alpha\varkappa_b} \pm M^{\pm}_{\beta K_b, \alpha\varkappa_a}\right). \tag{3.7}$$

Для изучения асимптотики разложим амплитуды $M^{\pm}$ в ряд Лорана по ω

$$M^{\pm}_{\beta H', \alpha M}(\omega,\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{N} \omega^{n} M^{\pm}_{\beta H', \alpha H; n}(\lambda). \tag{3.8}$$

Коэффициенты при положительных степенях и зависят от неминимальных взаимодействий с двумя ковариантными производными голдонов, и не определяются однозначно. <u>Однако коэффициенты при</u>

нулевой и отрицательной степенях и определяются полностью однозначно и выражаются простым и элегантным образом через введенные выше формфакторы $T^{i,a,8;5}(\lambda)$, $T^{a}(\lambda)$ (3.4) и генераторы изоспина и гиперзаряда T^{i}, T^{8}. Действительно, полином $\mathcal{L}$ линейно содержит а) операторы изоспина и гиперзаряда T^{i} и T^{8} за счет минимального контактного взаимодействия (2.7), в которое входят соответствующие сохраняющиеся токи $V_{\mu}^{i}(x)$, $V_{\mu}^{8}(x)$, и б) формфакторы $T^{i,a,8;5}(\lambda)$ и $T^{a}(\lambda)$ за счет неминимальных контактных взаимодействий в (2.8), возникающих из-за наличия билинейных по полям членов в ковариантных производных (2.6).

Члены нулевой и отрицательной степени ω в части амплитуды, описываемой графиками рис. 2, определяются через $\tilde{\Omega}^{\gamma}_{\beta M',\alpha M}\left(\frac{m_\gamma^2-m_\alpha^2}{2E},\lambda\right)$, т.е. значениями полиномов $\tilde{\Omega}^{\gamma}$ в полюсе знаменателя, на массовой оболочке частиц γ. Это видно из аналитической структуры амплитуды в приближении деревьев. Однако на массовой оболочке частиц γ полиномы $\tilde{\Omega}^{\gamma}$ билинейно выражаются через формфакторы :

$$\tilde{\Omega}^{\gamma}_{\beta M',\alpha M}\left(\frac{m_\gamma^2-m_\alpha^2}{2E},\lambda\right)=16E^2F_M^{-1}F_{M'}^{-1}\left[T^{M'}(\lambda)\right]_{\beta\gamma}\left[T^{M}(\lambda)\right]_{\gamma\alpha}. \qquad (3.9)$$

Например, для процесса $K_a+\alpha\to\pi_i+\beta$

$$\tilde{\Omega}^{\gamma}_{\beta\pi_i,\alpha K_a}\left(\frac{m_\gamma^2-m_\alpha^2}{2E},\lambda\right)=\frac{16E^2}{F_\pi F_K}\left[T^{i5}(\lambda)\right]_{\beta\gamma}\left[T^{a5}(\lambda)\right]_{\gamma\alpha}. \qquad (3.9^{\mathrm{I}})$$

Константные члены амплитуд M^{Γ} записываются (здесь и ниже в статье подразумевается, что матрицы $T^{\cdot\cdot}$ есть функции спиральности λ и явно эта зависимость не выписывается для краткости).

$$M^{-}_{\beta\pi_j,\alpha\pi_i;0}(\lambda)=8EF_\pi^{-2}\{if_{ijk}T^k-[T^{i5},T^{j5}]\}_{\beta\alpha},$$

$$M^{-}_{\beta K_b,\alpha K_a;0}(\lambda)=8EF_K^{-2}\{if_{abi}T^i+if_{ab8}T^8-[T^{a5},T^{b5}]\}_{\beta\alpha},$$

$$M^{-}_{\beta\varkappa_b,\alpha\varkappa_a;0}(\lambda)=8EF_\varkappa^{-2}\{if_{abi}T^i+if_{ab8}T^8-[T^a,T^b]\}_{\beta\alpha},$$

$$M^{-}_{\beta K_b,\alpha\varkappa_a;0}(\lambda)=8EF_K^{-1}F_\varkappa^{-1}\{if_{abi}T^{i5}+if_{ab8}T^{8,5}-[T^a,T^{b5}]\}_{\beta\alpha},$$

$$M^{-}_{\beta\pi_i,\alpha K_a;0}(\lambda)=8EF_\pi^{-1}F_K^{-1}\{if_{aib}T^b-[T^{a5},T^{i5}]\}_{\beta\alpha},$$

$$M^{-}_{\beta\pi_i,\alpha\varkappa_a;0}(\lambda)=8EF_\pi^{-1}F_\varkappa^{-1}\{if_{aib}T^{b5}-[T^a,T^{i5}]\}_{\beta\alpha},$$

(3.10)

$$M^{-}_{\beta\eta,\alpha\pi_i;0}(\lambda)=-8EF_\pi^{-1}F_\eta^{-1}[T^{i5},T^{8,5}]_{\beta\alpha},$$

$$M^{-}_{\beta\eta,\alpha K_a;0}(\lambda)=8EF_K^{-1}F_\eta^{-1}\{if_{a8b}T^b-[T^{a5},T^{8,5}]\}_{\beta\alpha},$$

$$M^{-}_{\beta\eta,\alpha\varkappa_a;0}(\lambda)=8EF_\varkappa^{-1}F_\eta^{-1}\{if_{a8b}T^{b5}-[T^a,T^{8,5}]\}_{\beta\alpha}.$$

Константные члены в амплитудах M^+ имеют вид (выписаны только интересующие нас в дальнейшем амплитуды):

$$M^{+}_{\beta\pi_j,\alpha\pi_i;0}(\lambda)=-2F_\pi^{-2}\left([T^{i5},[T^{j5},m^2]]+[T^{j5},[T^{i5},m^2]]\right)_{\beta\alpha}, \quad (а)$$

$$M^{+}_{\beta K_b,\alpha K_a;0}(\lambda)=-2F_K^{-2}\{[T^{a5},[T^{b5},m^2]]+[T^{b5},[T^{a5},m^2]]\}_{\beta\alpha}, \quad (б)$$

$$M^{+}_{\beta\varkappa_a,\alpha\varkappa_b;0}(\lambda)=-2F_\varkappa^{-2}\{[T^a,[T^b,m^2]]+[T^b,[T^a,m^2]]\}_{\beta\alpha}, \quad (в) \qquad (3.11)$$

$$M^{+}_{\beta K_b,\alpha\varkappa_a;0}(\lambda)=-2F_K^{-1}F_\varkappa^{-1}\{[T^a,[T^{b5},m^2]]+[T^{b5},[T^a,m^2]]\}_{\beta\alpha} \quad (г)$$

$$M^{+}_{\beta\pi_i,\alpha K_a;0}(\lambda)=-2F_K^{-1}F_\pi^{-1}\{[T^{a5},[T^{i5},m^2]]+[T^{i5},[T^{a5},m^2]]\}_{\beta\alpha} \quad (д)$$

$$M^{+}_{\beta\pi_i,\alpha\varkappa_a;0}(\lambda)=-2F_{\varkappa}^{-1}F_{\pi}^{-1}\left\{[T^a,[T^{i5},m^2]]+[T^{i5},[T^a,m^2]]\right\}_{\beta\alpha}, \quad (e)$$

где введена диагональная массовая матрица

$$m^2_{\gamma\alpha}=m^2_{\alpha}\delta_{\gamma\alpha}. \tag{3.12}$$

Двойные коммутаторы в (3.11) есть запись выражений $\sum_{\gamma}(2m^2_{\gamma}-m^2_{\alpha}-m^2_{\beta})(T^{\theta}_{\beta\gamma}T^{\theta'}_{\gamma\alpha}+T^{\theta'}_{\beta\gamma}T^{\theta}_{\gamma\alpha})$, а ординарные коммутаторы в (3.10) означают $\sum_{\gamma}(T^{\theta}_{\beta\gamma}T^{\theta'}_{\gamma\alpha}-T^{\theta'}_{\beta\gamma}T^{\theta}_{\gamma\alpha})$.

Члены разложения (3.8) порядка ω^{-1} обращаются в нуль. Выпишем коэффициенты при ω^{-2} в (3.8) для нескольких интересующих нас амплитуд M^{-}:

$$M^{-}_{\beta K_b,\alpha K_a;-2}(\lambda)=2E^{-1}F_K^{-2}\left[[T^{a5},m^2],[T^{b5},m^2]\right]_{\beta\alpha},$$

$$M^{-}_{\beta\varkappa_b,\alpha\varkappa_a;-2}(\lambda)=2E^{-1}F_{\varkappa}^{-2}\left[[T^{a},m^2],[T^{b},m^2]\right]_{\beta\alpha},$$

$$M^{-}_{\beta K_b,\alpha\varkappa_a;-2}(\lambda)=2E^{-1}F_K^{-1}F_{\varkappa}^{-1}\left[[T^{a},m^2],[T^{b5},m^2]\right]_{\beta\alpha},$$

$$M^{-}_{\beta\pi_i,\alpha K_a;-2}(\lambda)=2E^{-1}F_K^{-1}F_{\pi}^{-1}\left[[T^{a5},m^2],[T^{i5},m^2]\right]_{\beta\alpha}, \tag{3.13}$$

$$M^{-}_{\beta\pi_i,\alpha\varkappa_a;-2}(\lambda)=2E^{-1}F_{\varkappa}^{-1}F_{\pi}^{-1}\left[[T^{a},m^2],[T^{i5},m^2]\right]_{\beta\alpha},$$

. . . .

Аналогично могут быть определены коэффициенты разложения амплитуд при ω^{-3}, ω^{-4} и т.д. Они нас не будут интересовать в дальнейшем. Как уже говорилось выше, коэффициенты разложения амплитуд при положительных степенях ω не выражаются через $\tilde{\Omega}^{\gamma}\left(\frac{m_\alpha^2-m_\gamma^2}{2E},\lambda\right)$. Однако всегда можно обратить их в нуль путем добавления соответствующим образом подобранных неминимальных взаимодействий с двумя и более ковариантными производными от π, η, K, $\varkappa$, которые не влияют на коэффициенты при нулевой и отрицательной степенях ω.

4. Возникновение алгебры $SU(3)\times SU(3)$

Перейдем теперь к извлечению следствий из основного требования алгебраической реализации, требованию, чтобы амплитуды, описываемые графиками рис. I,2, не нарушали предсказаний теории Редже. Начнем с амплитуд M^-. Амплитуды M^- должны расти при больших энергиях слабее, чем

$$M_R^- \sim \omega^{\alpha_{T,Y}(0)-1}, \tag{4.I}$$

где $\alpha_{T,Y}(0)$ - интерсепт ведущей траектории в t - канале с изоспином T и гиперзарядом Y. (ω^{-1} возникает из-за множителя $(\omega+\omega')^{-1}$ в определении M^- (3.6). Только для траектории Померанчука интерсепт равен I, для всех других траекторий $\alpha(0)<1$. Однако полюс Померанчука не дает вклада в амплитуды M^-. (см.табл.I) Следовательно, все амплитуды M^- должны убывать с ростом ω, и поэтому константные члены $M^-_{\dots;0}(\lambda)$ должны обращаться в нуль. Приравнивая нулю правые части равенств (3.IO), находим

$$[T^{\sigma 5}, T^{\tau 5}] = i f_{\sigma\tau\delta} T^{\delta} \quad (a) \quad (\sigma,\tau,\delta = 1,2,\dots,7,8)$$

$$[T^{\sigma 5}, T^{a}] = i f_{\sigma a\tau} T^{\tau} \quad (б) \tag{4.2}$$

$$[T^{a}, T^{b}] = i f_{abi} T^{i} + i f_{ab8} T^{8} \quad (в) \quad (a,b = 4,5,6,7;\ i=1,2,3)$$

Т а б л и ц а I.

Квантовые числа в t-канале, лидирующая траектория и ее интерсепт

Реакция	Амплитуды	$I^G(J^P)$	Y	Лидирующая траектория	Интерсепт $\alpha(0)$
$\pi\to\pi,\ K\to K,\ \varkappa\to\varkappa$	M^-	$1^+(\mathcal{N})^*$	0	ρ	0,57
$\pi\to\pi,\ \eta\to\eta,\ K\to K,\ \varkappa\to\varkappa$	M^+	$0^+(\mathcal{N})$	0	Померанчук	I
$\pi\to\pi$	M^+	$2^+(\mathcal{N})$	0	Экзотика	<0
$\pi\leftrightarrow\eta$	M^-, M^+	$1^-(\mathcal{N})$	0	A_2	0,35
$\pi\to K,\ \eta\leftrightarrow K$	M^-, M^+	$1/2(\mathcal{N})$	±1	K^*	0,3
$\pi\leftrightarrow K$	M^-, M^+	$3/2(\mathcal{N})$	±1	Экзотика	$<0,\ <-1?$
$\pi\leftrightarrow\varkappa,\ \eta\leftrightarrow\varkappa$	M^-, M^+	$1/2(A)$	±1	K	≤ 0
$\pi\leftrightarrow\varkappa$	M^-, M^+	$3/2(A)$	±1	Экзотика	$<0,\ <-1?$
$K\leftrightarrow K,\ \varkappa\to\varkappa$	M^-	$0^-(\mathcal{N})$	0	ω	0,45
$K\to K,\ \varkappa\to\varkappa$	M^-	$0\ (\mathcal{N})$	±2	Экзотика	$<0,\ <-1?$
$K\to K,\ \varkappa\to\varkappa$	M^+	$1^-(\mathcal{N})$	0	A_2	0,35
$K\to K,\ \varkappa\to\varkappa$	M^+	$1\ (\mathcal{N})$	±2	Экзотика	$<0,\ <-1?$
$\varkappa\leftrightarrow K$	$M^-_{асим}, M^+_{асим.}$	$1^-(A)$	0	π	≤ 0
$\varkappa\leftrightarrow K$	$M^-_{асим}, M^+_{асим.}$	$0^+(A)$	0	η	≤ 0
$\varkappa\leftrightarrow K$	$M^-_{асим}, M^+_{асим.}$	$0\ (A)$	±2	Экзотика	$<0,\ <-1?$
$\varkappa\leftrightarrow K$	$M^-_{сим}, M^+_{сим.}$	$1^+(A)$	0	B ?	<0
$\varkappa\leftrightarrow K$	$M^-_{сим}, M^+_{сим.}$	$0^-(A)$	0	?	<0
$\varkappa\leftrightarrow K$	$M^-_{сим}, M^+_{сим.}$	$1\ (A)$	±2	Экзотика	$<0,\ <-1?$

*Символ $\mathcal{N}$ означает нормальную серию $J^P = 0^+, 1^-, 2^+ \ldots$,
Символ A – анормальную серию $J^P = 0^-, 1^+, 2^- \ldots$

Из сохранения изоспина и гиперзаряда следует

$$[T^i, T^{\sigma 5}] = i f_{i\sigma\tau} T^{\tau 5}, \quad [T^8, T^{\sigma 5}] = i f_{8\sigma\tau} T^{\tau 5}$$
$$[T^i, T^{\sigma}] = i f_{i\sigma\tau} T^{\tau}, \quad [T^8, T^{\sigma}] = i f_{8\sigma\tau} T^{\tau}. \tag{4.3}$$

Коммутационные соотношения (4.2) и (4.3) означают, что матрицы $T^{\sigma 5}(\lambda)$, $T^{a}(\lambda)$, T^{i} и T^{8} образуют алгебру $SU(3)\times SU(3)$. Итак, доказано, что нужно включить в игру столько частиц $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ и таким образом, чтобы эти частицы при любой данной спиральности заполняли неприводимые или приводимые представления киральной группы $SU(3)\times SU(3)$.

Алгебраическое следствие, необходимость классификации частиц заданной спиральности по супермультиплетам $SU(3)\times SU(3)$ возникло из требования, чтобы в амплитудах M^- не было константных членов. Ограничение на массы дает исследование константных членов в амплитудах M^+.

5. Трансформационные свойства массового оператора

Следует потребовать, чтобы амплитуды M^+ имели при $\omega\to\infty$ поведение, не нарушающее режима

$$M_R^+ \sim \omega^{\alpha_{T,Y}(0)}. \tag{5.I}$$

В каждой из реакций амплитудам M^+ отвечает несколько значений изоспина и гиперзаряда мезонов в t – канале (табл.I), и они могут быть разбиты на части с определенным изоспином и гиперзарядом. В нуль должны обращаться константные члены тех частей амплитуд, для которых интерсепт $\alpha_{T,Y}(0)$ отрицателен. Для экзотических обменов с $T=\frac{3}{2}, 2$ или $Y = \pm 2$ интерсепт заведомо меньше нуля. Экзотические обмены можно выделить при помощи проекционных операторов: оператора R^2, выделяющего изоспин 2 в амплитуде реакций $\pi\to\pi$

$$R^2_{ij,kl} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\,, \quad (i,j,k,l=1,2,3) \tag{5.2}$$

оператора $R^{3/2}$, выделяющего изоспин $\frac{3}{2}$ в амплитуде реакций $\pi\leftrightarrow K$, $\pi\leftrightarrow \varkappa$

$$R^{3/2}_{ij,ab} = \frac{2}{3}\left(\delta_{ij}\delta_{ab} - \varepsilon_{ijk} f_{kab}\right) \quad (i,j=1,2,3;\ a,b=4,5,6,7) \tag{5.3}$$

и оператора квадрата гиперзаряда Y^2 для выделения частей с $Y=\pm 2$ в амплитудах реакций $K\to K$, $\varkappa\to\varkappa$ и $K\leftrightarrow\varkappa$

$$Y^2_{ab,cd} = 2\delta_{ac}\delta_{bd} - \frac{8}{3} f_{ac8} f_{bd8} \quad (a,b,c,d=4,5,6,7). \tag{5.4}$$

Обращая теперь в нуль константные части амплитуд $M^{+}\ldots;_0$ (3.II), отвечающие экзотическим обменам, находим

$$
\begin{aligned}
&[T^{i5},[T^{j5},m^2]] = \frac{1}{3}\delta_{ij}\,[T^{k5}[T^{k5},m^2]]\,, && (а)\\
&[T^{a},[T^{b},m^2]] = \frac{4}{3} f_{ac8} f_{bd8}\,[T^{c},[T^{d},m^2]]\,, && (б)\\
&[T^{a5},[T^{b5},m^2]] = \frac{4}{3} f_{ac8} f_{bd8}\,[T^{c5}[T^{d5},m^2]]\,, && (в)\\
&[T^{a},[T^{b5},m^2]] = \frac{4}{3} f_{ac8} f_{bd8}\,[T^{c},[T^{d5},m^2]]\,, && (г)\\
&[T^{i5},[T^{a},m^2]] = \varepsilon_{ijk} f_{kab}\,[T^{j5},[T^{b},m^2]]\,, && (д)\\
&[T^{i5}[T^{a5},m^2]] = \varepsilon_{ijk} f_{kab}\,[T^{j5},[T^{b5},m^2]] && (е)
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

При этом были учтены структурные соотношения (4.23), тождества Якоби и коммутативность m^2 с T^i и T^8. Соотношение (5.5а) совпадает с полученным Вайнбергом /2/ в киральной $SU(2)\times SU(2)$ теории, соотношение (5.5б) такое же, как у автора /3/ в алгебраической реализации унитарной группы.

В настоящем подходе мы пренебрегаем массой мезонов π, η, K, $\varkappa$. Поэтому последовательно считать интерсепт соответствующих траекторий условно равным нулю, и не накладывать ограничений на соответствующие части амплитуд. Учет их масс, связанный с введением прямого нарушения, представляет самостоятельную задачу.

Из таблицы I видно, что явно отрицательным интерсептом обладают траектории $1^+(A)$ и $0^-(A)$, дающие вклад в амплитуды $(M^+_{\beta b, da;o})_{сим}$. Приравнивая нулю этот вклад, приходим к важному соотношению

$$[T^a,[T^{b5},m^2]]+[T^b,[T^{a5},m^2]]=0 \qquad (a,b=4,5,6,7). \tag{5.6}$$

Оно следует из (3.IIв) с учетом тождества Якоби и структурного соотношения (4.2б).

Соотношения (5.5) и (5.6) исчерпывают следствия из ограничений на амплитуды M^+. Из них вытекает, что <u>массовая матрица m^2 должна быть представима в виде суммы инварианта и нулевой (u_0) и восьмой (u_8) компонент представления $(3^*,3)+(3,3^*)$ группы $SU(3)\times SU(3)$</u>

$$m^2 = m^2_{inv} + u_0 + c\,u_8 \tag{5.7}$$

в полном соответствии с гипотезой Гелл-Манна, Оакса-Реннера /I/. Легко проверить, что массовая матрица (5.7) удовлетворяет всем требуемым соотношениям (5.5) и (5.6), подставляя в них (5.7) и учитывая, что

$$[T^\sigma, m^2_{inv}]=0\,; \quad [T^\sigma, u_\tau]=i f_{\sigma\tau\delta} u_\delta\,; \quad [T^\sigma, v_\tau]=i f_{\sigma\tau\delta} v_\delta,$$

$$[T^{\sigma 5}, m^2_{inv}]=0\,; \quad [T^{\sigma 5}, u_\tau]=-i d_{\sigma\tau\delta} v_\delta\,; \quad [T^{\sigma 5}, v_\tau]=i d_{\sigma\tau\delta} u_\delta, \qquad (5.8)$$

если u_τ, v_τ $(\tau=0,1,\dots,8)$ – компоненты мультиплета $(3,3^*)+(3^*,3)$. Представление (8,I) + (I,8) удовлетворяет соотношениям (5.5), но нарушает соотношение (5.6) и поэтому не подходит.

Выделение u_0 и u_8 компонент диктуется тем, что m^2 есть скаляр, изоскаляр (т.е. $[T^i, m^2]=0$) и не меняет гиперзаряд, $[T^8, m^2]=0$.

В Приложении приводится исчерпывающее доказательство единственности разложения массовой матрицы (5.7), т.е. того, что она не может содержать в своем разложении никаких других представлений $SU(3)\times SU(3)$, например, (8,8), $(6,6^*)+(6^*,6)$ и т.д. Отметим, что качественно это естественно, так как сам способ вывода ограничений на массу (5.5) подсказывает, что массовый оператор может содержать только те мультиплеты $SU(3)\times SU(3)$, в которых нет экзотических состояний с $T=\frac{3}{2}$, 2 или $Y=\pm 2$. Отсюда напрашивается $(3,3^*)+(3^*,3)$ или (8,I) + (I,8). /I,7/ Но (8,I) + (I,8) оказывается запрещенным из-за соотношения (5.6).

6. Дополнительные ограничения

Можно высказать дополнительное предположение, что интерсепты экзотических траекторий ($T>1$ или $|Y|>1$) не только отрицательны, но даже меньше –I. Это предположение не противоречит, по-видимому, имеющимся опытным данным (см., например, обзор /8/).

Гипотеза $\alpha_{экз}(0) < -1$ приводит к дополнительным ограничениям на массовую матрицу. Именно, амплитуды M^- должны вести себя не хуже, чем (4.I). Тогда следует требовать обращения в нуль $M^-_{\ldots;-2}$ — коэффициентов при ω^{-2} для тех частей амплитуд M^-, которые отвечают экзотическим обменам. Применяя проекционные операторы (5.2; 3; 4), получаем

$$Y^{2}_{ab,cd}\left[[T^c, m^2], [T^d, m^2]\right] = 0 \qquad (a)$$

$$Y^{2}_{ab,cd}\left[[T^{c5}, m^2], [T^{d5}, m^2]\right] = Y^{2}_{ab,cd}\left[[T^c, m^2], [T^{d5}, m^2]\right] = 0 \qquad (б) \qquad (6.I)$$

$$R^{3/2}_{ij,ab}\left[[T^{j5}, m^2][T^b, m^2]\right] = R^{3/2}_{ij,ab}\left[[T^{j5}, m^2], [T^{b5}, m^2]\right] = 0 \qquad (в)$$

Эти соотношения дают дополнительные ограничения на выбор представлений $SU(3)\times SU(3)$ для описания частиц заданной спиральности и на углы смешивания с тем, чтобы массы частиц расщеплялись согласующимся с экспериментом образом. Первое из них (6.Ia) фигурировало в алгебраической реализации унитарной симметрии /3/ и оказалось разумным.

7. Заключение

Итак, рассмотрена спонтанно нарушенная динамическая киральная симметрия $SU(3)\times SU(3)$. Её алгебраические свойства восстанавливаются, если потребовать, чтобы амплитуды коллинеарных процессов в приближении графиков-деревьев имели разумное асимптотическое поведение при высоких энергиях. Доказано, что:

а) Частицы с данной спиральностью должны классифицироваться по неприводимым или приводимым представлениям киральной группы $SU(3) \times SU(3)$;

б) При этом оператор квадрата массы, кроме инвариантной части, может содержать примесь нулевой и восьмой компоненты $(3,3^*) + (3^*,3)$ представления в соответствии с гипотезой Гелл-Манна-Оакса-Реннера. Малость этих компонент не требуется.

Следует полагать, что подходящие для классификации частиц представления $SU(3) \times SU(3)$ будут приводимыми. Дело в том, что $(3,3^*) + (3^*,3)$ компоненты массового оператора не приводят к расщеплению масс внутри любого неприводимого супермультиплета $SU(3) \times SU(3)$. Так, прямое произведение

$$(3,3^*) + (3^*,3) \quad \times (6,3) = (8 + 10, 1 + 8) + (3 + 15, 3^* + 6)$$

не содержит самого представления (6,3). Простейшие представляющие интерес приводимые представления, в которых массы будут расщепляться, суть $(6,3) + (3,3^*)$, $(3,3^*) + (3^*,3)$ и т.д. В такого рода супермультиплетах возникают смешивания между состояниями с одинаковым изоспином и гиперзарядом. Дополнительные соотношения (6.1) приводят к ограничениям на возможные углы смешивания.

Исследование возможных конкретных моделей классификации барионов и бозонов по представлениям киральной группы $SU(3) \times SU(3)$ и получение конкретных массовых формул представляет самостоятельную задачу и проводится в настоящее время. Критерием адекватности таких моделей будут служить не только приближенно верные соотношения для масс частиц, но и выражение углов Кабиббо через массы частиц, аналогично тому, как в киральной симметрии $SU(2)\times SU(2)$ Вайнберг /2/ выражал G_A/G_V в терминах масс; эти выражения зависят от выбранной модели классификации.

Мы видим, что программа Вайнберга /2/ восстановления алгебраических свойств динамических симметрий из ограничения на асимптотическое поведение графиков-деревьев для рассеяния вперед проходит и дает разумные следствия и в случае киральной $SU(2)\times$ $\times SU(2)$ /2/ и в случае спонтанно нарушенной унитарной симметрии /3/ и для динамической спонтанно нарушенной $SU(3)\times SU(3)$ симметрии (настоящая статья). Это вселяет веру в перспективность такого феноменологического подхода, несмотря на присущие ему трудности, заключающиеся в следующем:

а) Подход конструктивно проходит только для коллинеарных процессов при $t=0$;

б) Пока не решен вопрос, как сделать совместными модели классификации частиц одного спина, но с различными спиральностями в рамках алгебраических симметрий. Выход, по-видимому, в том /2,9/, чтобы подходящим образом закрепить зависимость матриц $T^a(\lambda)$, $T^{a5}(\lambda)$ и m^2 от спина и спиральности, что возможно при учете низших парциальных волн и приведет к расширению рассматриваемой группы. Отметим, что неприводимые представления расширенной группы будут приводимы по исходной, в нашем случае по $SU(3)\times SU(3)$.

в) Наконец, главная трудность – в точной динамической $SU(3)\times SU(3)$ симметрии массы π-, η-, K- и $\varkappa$- мезонов следует полагать равными нулю (они – голдстоуновские мезоны). Для устранения этой трудности придется ввести прямое нарушение симметрии. Естественно связать его только с обобщенными массовыми членами π-, η-, K- и $\varkappa$-мезонов. При оценке асимптотического поведения амплитуд представляется разумным пренебрегать массой налетающего и рассеянного мезонов со спином 0, по сравнению с их энергией ω ($\omega \to \infty$), и полностью учитывать конечность масс π-, η-, K- и $\varkappa$- мезонов в виртуальных линиях или мишени. При этом интерсепты π-, η-, K- и $\varkappa$- траекторий уже следует считать отрицательными, и из соответствующих константных членов амплитуд M^+ появятся условия на массы скалярных и псевдоскалярных мезонов. Все результаты настоящей статьи для остальных частиц останутся в силе.

Автору приятно выразить в заключение сердечную благодарность Б.Валуеву, Ф.Гюрси, Б.Зумино, Б.Зупнику и М.Элиашвили за полезные обсуждения.

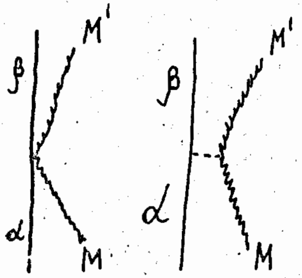

Рис. I.

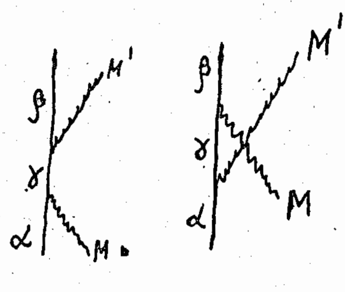

Рис. 2.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Доказательство $SU(3)\times SU(3)$ свойств массовой матрицы

В терминах генераторов правой и левой $SU(3)$- групп

$$T_R^\sigma=\frac{1}{2}\left(T^\sigma+T^{\sigma5}\right);\quad T_L^\sigma=\frac{1}{2}\left(T^\sigma-T^{\sigma5}\right);\quad \sigma=1,2,\dots 8 \tag{П.1}$$

соотношения (5.5) и (5.6) записываются (i,j,k =1,2,3, a,b,c,d = 4,5,6,7):

$$\left[T^i_{R,L},\left[T^j_{R,L},m^2\right]\right]+\left[T^j_{R,L},\left[T^i_{R,L},m^2\right]\right]=\frac{2}{3}\delta_{ij}\left[T^k_{R,L},\left[T^k_{R,L},m^2\right]\right], \tag{П.2}$$

$$\left[T^a_{R,L},\left[T^b_{R,L},m^2\right]\right]=\frac{4}{3}f_{ac8}f_{bd8}\left[T^c_{R,L},\left[T^d_{R,L},m^2\right]\right], \tag{П.3}$$

$$\left[T^i_{R,L},\left[T^a_{R,L},m^2\right]\right]=\varepsilon_{ijk}f_{kab}\left[T^j_{R,L},\left[T^b_{R,L},m^2\right]\right], \tag{П.4}$$

$$\left[T^a_R,\left[T^b_R,m^2\right]\right]+\left[T^b_R,\left[T^a_R,m^2\right]\right]=\left[T^a_L,\left[T^b_L,m^2\right]\right]+\left[T^b_L,\left[T^a_L,m^2\right]\right], \tag{П.5}$$

и, в частности, $\left[T^a_R,\left[T^a_R,m^2\right]\right]=\left[T^a_L,\left[T^a_L,m^2\right]\right].$ (П.6)

Из сохранения гиперзаряда и изоспина следует, что

$$\left[T^i_R,m^2\right]=-\left[T^i_L,m^2\right];\quad \left[T^8_R,m^2\right]=-\left[T^8_L,m^2\right], \tag{П.7}$$

отсюда

$$\left[T^i_R,\left[T^i_R,m^2\right]\right]=\left[T^i_L,\left[T^i_L,m^2\right]\right];\quad \left[T^8_R,\left[T^8_R,m^2\right]\right]=\left[T^8_L,\left[T^8_L,m^2\right]\right]. \tag{П.8}$$

Для квадратичных операторов Казимира $G_R^{(2)}$ и $G_L^{(2)}$ находим

$$G_R^{(2)}m^2=\left[T^\sigma_R,\left[T^\sigma_R,m^2\right]\right]=\left[T^\sigma_L,\left[T^\sigma_L,m^2\right]\right]=G_L^{(2)}m^2 \tag{П.9}$$

в силу (П.6) и (П.8). Рассмотрим кубичные операторы Казимира $G^3_{R,L}$.

$$G_R^{(3)} m^2 = 2 d_{\sigma\tau\delta} [T_R^\sigma [T_R^\tau, [T_R^\delta, m^2]]] = 6 [T_R^a, [T_R^b, [d_{abi} T_R^i + d_{ab8} T_R^8, m^2]]] =$$
$$= -6 [T_L^a [T_L^b, [d_{abi} T_L^i + d_{ab8} T_L^8, m^2]]] = - G_L^{(3)} m^2$$
т. е.
$$G_R^{(3)} m^2 = - G_L^{(3)} m^2 \tag{П.10}$$

в силу (П.5) и (П.7).

Так как в применении к представлению $SU(3)$ – группы $\mathcal{D}(p,q)$ собственное значение $G^{(2)}$ есть $\frac{p^2+pq+q^2}{3}+p+q$, а $G^{(3)} - \frac{(p-q)(2p+q+3)(2q+p+3)}{9}$, то из (П.9), (П.10) вытекает, что разложение m^2 по представлениям группы $SU(3)\times SU(3)$ имеет вид

$$m^2 = \sum_n \left(\mathcal{D}(p_n, q_n), \mathcal{D}(q_n, p_n)\right). \tag{П.11}$$

В частности, в это разложение <u>не может</u> входить часто обсуждаемое /1/ представление $(8,1)\oplus(1,8) = (\mathcal{D}(1,1), \mathcal{D}(0,0))\oplus(\mathcal{D}(0,0), \mathcal{D}(1,1))$. Для дальнейшей конкретизации найдем спектр $G_R^{(2)}$ (совпадающий со спектром $G_L^{(2)}$, (П.9)). Для этого изучим

$$\left(G_R^{(2)}\right)^2 m^2 = [T_R^\sigma, [T_R^\sigma, [T_R^\tau, [T_R^\tau, m^2]]]]. \tag{П.12}$$

Если все индексы изотопические, то

$$[T_R^i [T_R^i [T_R^j, [T_R^j, m^2]]]] = i\varepsilon_{ijk} [T_R^i, [T_R^k [T_R^j, m^2]]] + [T_R^i, [T_R^j, [T_R^i [T_R^j, m^2]]]] =$$

$$= -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ikm} [T_R^m, [T_R^j, m^2]] + \left(\frac{2}{3}-1\right) [T_R^i [T_R^i, [T_R^j [T_R^j, m^2]]]], \tag{П.13}$$

где использовано соотношение (П.2). Отсюда

$$[T_R^i, [T_R^i, [T_R^j, [T_R^j, m^2]]]] = \frac{3}{4} [T_R^i, [T_R^i, m^2]]. \tag{П.13$^{\rm I}$}$$

Аналогично, переставляя порядок операторов и используя соотношение (П.4) и тождества для структурных констант f_{abi}, f_{ab8} из Приложения к /3/, можно свести четверной коммутатор с двумя изотопическими (i) и двумя странными (a) индексами к двойному

$$[T_R^i,[T_R^i,[T_R^a,[T_R^a,m^2]]]]=[T_R^a,[T_R^a,[T_R^i,[T_R^i,m^2]]]]=\frac{1}{2}[T_R^i,[T_R^i,m^2]]. \tag{П.14}$$

Таким же образом, с использованием соотношения (П.3) и тождеств для структурных констант из /3/, находим

$$[T_R^a,[T_R^a,[T_R^b,[T_R^b,m^2]]]]=3[T_R^a,[T_R^a,m^2]]-[T_R^i,[T_R^i,m^2]]-6[T_R^8,[T_R^8,m^2]]. \tag{П.15}$$

С другой стороны, представляя согласно структурному соотношению в виде $T_R^8=-\frac{2}{3}if_{ab8}T_R^aT_R^b$, после манипуляций находим

$$[T_R^8,[T_R^8,m^2]]=\frac{1}{3}[T_R^a,[T_R^a,[T_R^b,[T_R^b,m^2]]]]. \tag{П.16}$$

Из (П.15) и (П.16) вытекает, что

$$[T_R^a,[T_R^a,[T_R^b,[T_R^b,m^2]]]]=[T_R^a,[T_R^a,m^2]]-\frac{1}{3}[T_R^i,[T_R^i,m^2]], \tag{П.17}$$

$$[T_R^8,[T_R^8,m^2]]=\frac{1}{3}[T_R^a,[T_R^a,m^2]]-\frac{1}{9}[T_R^i,[T_R^i,m^2]]. \tag{П.18}$$

Уравнений (П.12–П.18) достаточно для доказательства, что

$$\left(G_R^{(2)}\right)^2 m^2=\frac{4}{3}G_R^{(2)}m^2. \tag{П.19}$$

Отсюда $G_R^{(2)}$ в применении к m^2 (а также $G_L^{(2)}$, согласно (П.9)) может иметь только собственные значения 0 и $\frac{4}{3}$.

Первое из них соответствует инварианту , второе - фундаментальному представлению 3 или 3^*. Вспоминая (П.II), убеждаемся, что $m^2 = (1,1) + (3,3^*) + (3^*,3)$, и наше утверждение (5.7) исчерпывающе доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. M.Gell-Mann, R.Oakes, B.Renner. Phys.Rev., 175, 2195, 1968
   S.Glashow, S.Weinberg. Phys.Rev.Lett., 20, 224, 1968
2. S.Weinberg. Phys.Rev., 177, 2604, 1969;
   F.J.Gilman, H.Harari. Phys.Rev., 165, 1803, 1968
3. В.Огиевецкий. Phys.Lett., 33B, 227, 1970; ЯФ 13, 187, 1971
4. A.Sudbery.Nucl.Phys., B20, 1, 1970
5. S.Coleman, J.Wess, B.Zumino. Phys.Rev., 177, 2239, 1969
6. K.Dietz, J.Honerkamp Z.Physik, 222, 46, 1969;
   J.Honerkamp. Nucl.Physics, B12, 227, 1969;
   W.A.Bardeen, B.W.Lee. Phys.Rev., 177, 2389 (1969)
7. B.Renner, A.Sudbery. Prepr. DAMTP 69/5 (1969)
8. R.J.N.Phillips, in "Developments of High Energy Physics" Springer - Verlag, Wien - New York, 1970, p.214
9. C.Cronström, M.Noga. Nucl.Phys., B15, 61 (1970); Phys.Rev., D1, 2414, 1970.
   L.R.Ram Mohan. Phys.Rev., D2, 299 (1970).

Рукопись поступила в издательский отдел
16 марта 1971 года.