ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2- 5691

Р.Н. Фаустов

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ И ФОРМФАКТОРЫ СВЯЗАННОЙ СИСТЕМЫ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1971

P2-5691

Р.Н. Фаустов

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ И ФОРМФАКТОРЫ СВЯЗАННОЙ СИСТЕМЫ

Направлено в "Annals of Physics"

Введение

Квазипотенциальный метод в теории поля, предложенный Логуновым и Тавхелидзе [1], является весьма эффективным средством исследования как свойств связанных состояний [2], так и задач рассеяния [3]. Система частиц в этом подходе описывается одновременной волновой функцией, удовлетворяющей уравнению типа Шредингера с комплексным, зависящим от энергии и, вообще говоря, нелокальным ядром - квазипотенциалом. Основным достоинством этого уравнения является его трехмерный характер, что проявляется в отсутствии нефизического параметра относительного времени (или соответственно относительной энергии). Это обстоятельство позволяет найти интерпретацию физического смысла волновой функции [4]. Для вычисления уровней энергии связанного состояния системы и амплитуды рассеяния частиц системы достаточно провести все рассмотрение в системе центра масс (с.ц.м.), и поэтому можно ограничиться нековариантной формулировкой метода. При изучении поведения составной системы во внешних (например, электромагнитных) полях и процессов рассеяния на такой системе возникает необходимость использовать волновые функции связанного состояния в произвольной системе отсчёта. Обобщению квазипотенциального метода на этот случай были посвящены работы [5,6,7,8]. В этих работах, однако, мало внимания уделялось трансформационным свойствам волновых функций при переходе из одной системы отсчёта в другую. В идейном смысле наш подход близок к работам [6,7,10]. Простейшей задачей, где находят применение указанные выше обобщения, является задача нахождения матричных элементов локальных операторов (например, токов) между связанными состояниями. Рассмотрению этого вопроса посвящены работы [7,9-13]. В [12] получен приближенный закон преобразования волновых функций при переходе из с.ц.м. в произвольную систему отсчёта. Ниже мы покажем, что в подходе, использованном в настоящей работе, этот закон является точным. Свойства преобразования волновых функций Бете-Солпитера рассмотрены в [14].

2. Ковариантная одновременная волновая функция связанной системы

В нерелятивистской квантовой механике состояние системы частиц может быть описано волновой функцией, зависящей от координат (импульсов) частиц, в определенный момент времени. Наиболее естественным релятивистски инвариантным обобщением такого описания является задание волновой функции в собственном времени системы [15]. Для этого нужно направить ось времени по вектору полного импульса системы. Таким образом, понятие одновременности приобретает вполне определенный и лоренц-инвариантный смысл: следует приравнять времена частиц в системе центра масс (с.ц.м.). Эта замена индивидуальных временных координат общей временной координатной составляет сущность процесса соединения - она определяет изменение нашей точки зрения, когда мы рассматриваем систему как целое вместо составляющих ее частей [16]. По образному выражению Эддингтона [16] "атом водорода состоит из протона и электрона, но протон сегодня и электрон вчера не образуют атома водорода".

Рассмотрим двухчастичную волновую функцию Бете-Солпитера, описывающую связанное состояние с массой M_B и со спином s :

$$\Psi_{B\vec{K}}(x_1, x_2) = \langle 0 | T \{ \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \} | M_B, s ; \vec{K} \rangle .$$

U^{-1} $\quad U U^{-1}$ $\quad (U(L) U^{-1}(L_K))$.

Использование пуанкаре-инвариантности позволяет представить эту волновую функцию в виде:

$$\Psi_{B\vec{K}}(x_1, x_2) = e^{-iK\frac{x_1+x_2}{2}} S_1(L_K) S_2(L_K) \langle 0 | T \{ \phi_1\left(\frac{\overset{0}{x}_1 - \overset{0}{x}_2}{2}\right) \phi_2\left(\frac{\overset{0}{x}_2 - \overset{0}{x}_1}{2}\right) \} | M_B, s; \vec{0} \rangle$$

$$= e^{-iM_B\tau} S_1(L_K) S_2(L_K) \langle 0 | T \{ \phi_1(\Delta\tau, \vec{\overset{0}{x}}) \phi_2(-\Delta\tau, -\vec{\overset{0}{x}}) \} | M_B, s ; \vec{0} \rangle ,$$

где L_K- чистое преобразование Лоренца, такое, что

$$L_K(M_B, \vec{0}) = (E, \vec{K}) ; \quad E = \sqrt{M_B^2 + K^2} ,$$

$$L_K \overset{0}{x}_{1,2} = x_{1,2} \quad ; \quad \vec{\overset{0}{x}} = \frac{1}{2} (\vec{\overset{0}{x}}_1 - \vec{\overset{0}{x}}_2)$$

$$\tau_{1,2} = \overset{0}{t}_{1,2} = \frac{1}{M_B}(K \cdot x_{1,2}) ; \quad \tau = \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2) ; \quad \Delta\tau = \frac{1}{2}(\tau_1 - \tau_2) .$$

$S_{1,2}(L_K)$- матрицы конечномерных представлений группы Лоренца, по которым преобразуются операторы поля $\phi_{1,2}$, и мы используем канонический базис в пространстве векторов состояний.

При этом

$$U^{-1}(L_K) \phi_\alpha (L_K \overset{0}{x}) U(L_K) = S_{\alpha\beta}(L_K) \phi_\beta(\overset{0}{x})$$

$$| M_B, s; \vec{K} \rangle = U(L_K) | M_B, s; \vec{0} \rangle .$$

Согласно приведенным выше рассуждениям, мы можем определить релятивистскую одновременную волновую функцию связанной системы следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\Psi_{B\vec{K}}(\tau, \vec{\overset{0}{x}}) &= \langle 0 | \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) | M_B, s; \vec{K} \rangle |_{\Delta\tau = 0} = \\
&= e^{-iM_B\tau} S_1(L_K) S_2(L_K) \langle 0 | \phi_1(0, \vec{\overset{0}{x}}) \phi_2(0, -\vec{\overset{0}{x}}) | M_B, s; \vec{0} \rangle = \\
&= e^{-iM_B\tau} \Psi_{B\vec{K}}(\vec{\overset{0}{x}}).
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Волновую функцию в импульсном пространстве нам будет удобно, имея в виду рассмотрение в дальнейшем функций Грина, записать в следующей форме:

$$
(2\pi)^4 \delta^4(P-K)\, \Psi_{B\vec{K}}(\vec{\overset{0}{p}}) =
$$

(2.2)

$$
= \int d^4x_1\, d^4x_2\, e^{ip_1 x_1 + ip_2 \cdot x_2}\, \delta(h \cdot x_1 - h \cdot x_2) \langle 0 | \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) | M_B, s; \vec{K} \rangle ,
$$

где

$$
h^\mu = \frac{P^\mu}{\sqrt{P^2}}, \quad \mu = 0,1,2,3 \; ; \quad P = p_1 + p_2 \; ; \quad P^2 > 0 \tag{2.2}
$$

и предполагается, что координаты и импульсы частиц выражены через соответствующие величины в системе центра масс:

$$x^{\mu}_{1,2} = \{ L_P \overset{0}{x}_{1,2} \}^{\mu} = \tau_{1,2}\, h^{\mu}(P) + \sum_{i=1}^{3} (n^{(i)\mu}(P) \cdot \overset{0}{x}{}^{i}_{1,2})$$

$$p^{\mu}_{1,2} = \{ L_P \overset{0}{p}_{1,2} \}^{\mu} = \overset{0}{\epsilon}_{1,2}\, h^{\mu}(P) + \sum_{i=1}^{3} (n^{(i)\mu}(P) \cdot \overset{0}{p}{}^{i}_{1,2}) \qquad (2.3)$$

$$\overset{0}{\epsilon}_1 + \overset{0}{\epsilon}_2 = \sqrt{P^2}\,; \quad \vec{\overset{0}{p}}_1 = -\vec{\overset{0}{p}}_2 = \vec{\overset{0}{p}}\,.$$

Три линейно независимых четырех-вектора $n^{(i)}(P)$ обладают свойствами: $P \cdot n^{(i)}(P) = 0$; $n^{(i)} \cdot n^{(j)} = -\delta^{ij}$ и в явном виде

$$n^{(i)\mu}(P) = L^{\mu}_{P\,i} = \{ \frac{P^i}{\sqrt{P^2}},\ \frac{P^i P^j}{\sqrt{P^2}(E+\sqrt{P^2})} + \delta_{ij} \}\,.$$

Преобразования Лоренца действуют на векторы $n^{(i)}$ по закону

$$\Lambda n^{(i)}(P) = \sum_{j=1}^{3} n^{(j)}(\Lambda P)\, R^{W}_{ji}\,,$$

где вигнеровское вращение

$$R^{W} = L^{-1}_{\Lambda P}\, \Lambda\, L_{P}\,.$$

Таким образом, $\overset{0}{x}{}^{i}$ и $\overset{0}{p}{}^{i}$, с одной стороны,являются пространственными компонентами векторов координат и импульса в системе центра масс, а с другой стороны, их можно рассматривать как параметры, определяющие трехмерные относительные координаты и импульсы частиц в произвольной системе отсчёта /17/. При переходе из одной системы отсчёта в другую они в этом случае преобразуются по представлению малой группы Лоренца

$$\vec{\overset{0}{x}}{}' = R^{W} \vec{\overset{0}{x}} \quad ; \quad \vec{\overset{0}{p}}{}' = R^{W} \vec{\overset{0}{p}}\,.$$

При таком подходе трехмерные скалярные произведения этих векторов вида $(\vec{\overset{0}{x}}\cdot\vec{\overset{0}{p}})$, $\vec{\overset{0}{x}}{}^2$, $\vec{\overset{0}{p}}{}^2$ будут релятивистски инвариантными величинами, $d\vec{\overset{0}{x}}$ и $d\vec{\overset{0}{p}}$ – инвариантными элементами объема, а $\delta(\vec{\overset{0}{p}}-\vec{\overset{0}{q}})$ – инвариантной дельта-функцией. Заметим, что пространство трехмерных относительных координат и импульсов является плоским евклидовым пространством в отличие от подхода в работах /5/.

Подставляя выражение (2.1) в равенство (2.2) и используя параметризацию (2.3), получим:

$$\delta^4(P-K)\Psi_{B\vec{K}}(\vec{\overset{0}{p}})=\delta(\sqrt{P^2}-M_B)\frac{E}{\sqrt{P^2}}\delta(\vec{P}-\vec{K})S_1(L_P)S_2(L_P)\Psi_{B0}(\vec{\overset{0}{p}}),$$

где

$$\Psi_{B0}(\overset{0}{p})=\int d\overset{0}{x}\, e^{-i\vec{\overset{0}{p}}\cdot\vec{\overset{0}{x}}}\langle 0\,|\,\phi_1(0,\frac{\vec{\overset{0}{x}}}{2})\phi_2(0,-\frac{\vec{\overset{0}{x}}}{2})\,|\,M_B,s;\vec{0}\rangle. \qquad (2.5)$$

Равенство (2.5), таким образом, определяет закон преобразования волновой функции связанной системы при переходе из с.ц.м. в произвольную систему отсчёта.

Аналогичным образом определим двухвременную функцию Грина двух частиц:

$$(2\pi)^4\delta^4(P-Q)G(\vec{\overset{0}{p}},\vec{\overset{0}{q}};P)=\int dx_1dx_2dy_1dy_2\; e^{ip_1\cdot x_1+ip_2\cdot x_2-iq_1\cdot y_1-iq_2\cdot y_2}\times$$

$$\times\delta(h\cdot x_1-h\cdot x_2)\delta(h\cdot y_1-h\cdot y_2)\;G(x_1,x_2;y_1,y_2), \qquad (2.6)$$

$$G(x_1,x_2;y_1,y_2)=\langle 0\,|\,T\{\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\bar\phi_2(y_2)\bar\phi_1(y_1)\}|0\rangle, \qquad (2.7)$$

$$\bar\phi_\alpha=\overset{+}{\phi}_\beta A_{\beta\alpha}\;;\quad \overset{+}{S}(L)A=A\,S(L^{-1});\quad \overset{+}{A}=A,$$

$\overset{+}{\phi}$ – эрмитово-сопряженные операторы поля.

Нетрудно выразить волновую функцию (2.2) и функцию Грина (2.6) непосредственно через Фурье-образы в импульсном пространстве волновой функции (2.1) и функции Грина (2.7)[6]:

?

$$\Psi_{BK}(\vec{\overset{0}{p}})=\int d\overset{0}{\epsilon}_1\, d\overset{0}{\epsilon}_2\, \delta(\overset{0}{\epsilon}_1+\overset{0}{\epsilon}_2-\sqrt{P^2})\Psi_{BK}(p),$$

$$(2.8)$$

$$G(\vec{\overset{0}{p}},\vec{\overset{0}{q}};P)=\int d\overset{0}{\epsilon}_1\, d\overset{0}{\epsilon}_2\, d\overset{0}{\epsilon}{}'_1\, d\overset{0}{\epsilon}{}'_2(\delta(\overset{0}{\epsilon}_1+\overset{0}{\epsilon}_2-\sqrt{P^2})\delta(\overset{0}{\epsilon}{}'_1+\overset{0}{\epsilon}{}'_2-\sqrt{P^2})G(p,q;P).$$

Используя определение T-произведения через θ-функции, нетрудно получить[1,7] спектральное представление двухвременной функции Грина

$$G(\vec{\overset{0}{p}},\vec{\overset{0}{q}};P)=\int dM\left\{\frac{I(\vec{\overset{0}{p}},\vec{\overset{0}{q}};Mh)}{\sqrt{P^2}-M+i0}-\frac{\bar I(\vec{\overset{0}{p}},\vec{\overset{0}{q}};Mh)}{\sqrt{P^2}+M-i0}\right\},\quad h=\frac{P}{\sqrt{P^2}}, \qquad (2.9)$$

где

$$I(\vec{\overset{0}{p}},\vec{\overset{0}{q}};Mh)=(2\pi)^3\sum_n\delta(M-M_n)\frac{E}{\sqrt{P^2}}\delta(M_n\vec h-\vec K_n)\chi_{0n}(\vec{\overset{0}{p}})\otimes\bar\chi_{0n}(\vec{\overset{0}{q}})$$

$$\bar{I}(\vec{\overset{0}{p}},\vec{\overset{0}{q}};Mh)=(2\pi)^3\sum_n \delta(M-M_n)\frac{E}{\sqrt{P^2}}\delta(M_n\vec{h}+\vec{K}_n)\chi_{n0}(\vec{\overset{0}{p}})\otimes\bar{\chi}_{n0}(\vec{\overset{0}{q}})$$

$$\chi_{0n}(\vec{\overset{0}{p}})=\int d\overset{0}{\vec{x}}\, e^{-i\vec{\overset{0}{p}}\cdot\vec{\overset{0}{x}}} S_1(L_P)S_2(L_P)\langle 0|\phi_1(0,\frac{\vec{\overset{0}{x}}}{2})\phi_2(0,-\frac{\vec{\overset{0}{x}}}{2})|M_n,\vec{0}\rangle \tag{2.9a}$$

$$\bar{\chi}_{0n}=\overset{*}{\chi}_{0n}A_1A_2 .$$

Если среди полного набора состояний $|n\rangle$ имеется связанное состояние с массой M_B , то, как видно из представления (2.9), функция Грина имеет полюс в точке $\sqrt{P^2}=M_B$ и вблизи полюса

$$G(\vec{\overset{0}{p}},\vec{\overset{0}{q}};P)=\frac{\Psi_{BP}(\vec{\overset{0}{p}})\otimes\bar{\Psi}_{BP}(\vec{\overset{0}{q}})}{2M_B(\sqrt{P^2}-M_B)} . \tag{2.10}$$

Используя спектральное представление (2.9), можно также получить выражение для функции Грина свободных невзаимодействующих частиц /7/ :

$$(2\pi)^3\frac{E}{\sqrt{P^2}}\delta(\vec{P}-\vec{Q})G^f(\vec{\overset{0}{p}},\vec{\overset{0}{q}};P)=$$

$$=(2\pi)^6\frac{\delta(\vec{\overset{0}{p}}_1-\vec{\overset{0}{q}}_1)\delta(\vec{\overset{0}{p}}_2-\vec{\overset{0}{q}}_2)}{2\epsilon(\overset{0}{p})2\epsilon(\overset{0}{p})}\left\{\frac{\Lambda_1^{(+)}(p_1)\Lambda_2^{(+)}(p_2)}{\sqrt{P^2}-\epsilon_1(\overset{0}{p})-\epsilon_2(\overset{0}{p})}-\frac{\Lambda_1^{(-)}(p_1)\Lambda_2^{(-)}(p_2)}{\sqrt{P^2}+\epsilon_1(\overset{0}{p})+\epsilon_2(\overset{0}{p})}\right\}, \tag{2.11}$$

где

$$\Lambda^{(+)}(p)=\sum_{\lambda=-s}^{s}u^\lambda(p)\otimes\bar{u}^\lambda(p);\quad \Lambda^{(-)}(p)=-\sum_{\lambda=-s}^{s}v^\lambda(p)\otimes\bar{v}^\lambda(p),$$

$$p_{1,2} = L_P\{\epsilon_{1,2}(\overset{0}{p}), \overset{0}{\vec{p}}_{1,2}\} = \epsilon_{1,2}(\overset{0}{p})h + \sum_{i=1}^{3}(n^{(i)}(P)\cdot \overset{0}{p}{}^{i}_{1,2}),$$

$$\epsilon_{1,2}(\overset{0}{p}) = \sqrt{\overset{0}{p}{}^2 + m^2_{1,2}}\ ; \quad \overset{0}{\vec{p}}_1 = -\overset{0}{\vec{p}}_2 = \overset{0}{\vec{p}} \quad ,$$

u^λ и v^λ – положительно и отрицательно частотные функции свободных частиц с массой m, спином s и проекцией спина на фиксированную ось λ $(-s<\lambda<s)$, а $\Lambda^{(\pm)}$, таким образом, являются обычными операторами проецирования на положительно и отрицательно частотные подпространства волновых функций.

Аналогично предыдущему

$$\bar{u}_\alpha = \overset{*}{u}_\beta A_{\beta\alpha}.$$

Одночастичные волновые функции будем нормировать условиями:

$$c = \bar{u}(p)\,u(p) = \begin{cases} 1 & \text{для бозонов} \\ 2m & \text{для фермионов} \end{cases} = -\bar{v}(p)\,v(p).$$

Пусть Λ – произвольное преобразование Лоренца. Тогда можно показать, что функции $u^\lambda(p)$ обладают следующими трансформационными свойствами:

$$\begin{aligned} S^{-1}_{\alpha\beta}(\Lambda)\,u^\lambda_\beta(\Lambda p) &= u^\sigma_\alpha(p)\,\overset{+}{D}{}^s_{\sigma\lambda}(R^W), \\ \bar{u}^\lambda_\beta(\Lambda p)\,S_{\beta\alpha}(\Lambda) &= D^s_{\lambda\sigma}(R^W)\,\bar{u}^\sigma_\alpha(p), \end{aligned} \qquad (2.12)$$

где $D^s(R)$ – хорошо известные матрицы конечных вращений.

Как сразу же следует из явного вида (2.11), функция G^f не имеет обратной. В целях дальнейшего рассмотрения удобно будет поэтому спроецировать все величины на положительно частотное подпространство. Более подробно этот вопрос обсуждается в работах [2,7]. Операцию проецирования проще всего осуществить следующим образом:

$$\Psi^{(+)}_{BP}(\vec{\overset{0}{p}}) = \frac{2}{c_1 c_2}\sqrt{\epsilon_1(\overset{0}{p})\epsilon_2(\overset{0}{p})}\ \bar{u}_1(p_1)\bar{u}_2(p_2)\,\Psi_{BP}(\vec{\overset{0}{p}}),$$

$$(2.13)$$

$$G^{(+)}(\vec{\overset{0}{p}},\vec{\overset{0}{q}};P) = \frac{4}{c_1^2 c_1^2}\sqrt{\epsilon_1(\overset{0}{p})\epsilon_2(\overset{0}{p})}\,u_1(p_1)u_2(p_2)\,G(\vec{\overset{0}{p}},\vec{\overset{0}{q}};P)\,u_1(q_1)u_2(q_2)\sqrt{\epsilon_1(\overset{0}{q})\epsilon_2(\overset{0}{q})}.$$

Отсюда, в частности,

$$G^{f(+)}(\vec{\overset{0}{p}},\vec{\overset{0}{q}};P) = \frac{(2\pi)^3\,\delta(\vec{\overset{0}{p}}-\vec{\overset{0}{q}})}{\sqrt{P^2}-\epsilon_1(\overset{0}{p})-\epsilon_2(\overset{0}{p})}. \qquad (2.13a)$$

Подставляя выражение (2.5) для Ψ_B в равенство (2.13) и используя свойства (2.12) функций u^λ, мы получим важное соотношение

$$\Psi^{(+)}_{BP}(\vec{\overset{0}{p}}) = D^{s_1}(R^W)D^{s_2}(R^W)\,\Psi^{(+)}_{B0}(\vec{\overset{0}{p}}), \qquad (2.14)$$

где волновая функция в с.ц.м.

$$\Psi^{(+)}_{B0}(\vec{\overset{0}{p}}) = \frac{2}{c_1\,c_2}\sqrt{\epsilon_1(\overset{0}{p})\epsilon_2(\overset{0}{p})}\,\bar{u}_1(\overset{0}{p})\,\bar{u}_2(\overset{0}{p})\,\Psi_{B0}(\vec{\overset{0}{p}}).$$

Соотношение (2.14) таким образом позволяет выразить спроецированную волновую функцию в произвольной системе отчсёта через аналогичную величину в с.ц.м. Формула (2.14), как приближенное равенство в несколько ином подходе, была получена ранее в работе [12].

Введем [1] теперь оператор квазипотенциала V :

$$V = [\, G^{f(+)}\,]^{-1} - [\, G^{(+)}]^{-1} . \qquad (2.15)$$

Тогда, используя выражение (2.10) для функции G , нетрудно получить [1,7] уравнение для волновой функции $\Psi^{(+)}_{BP}$:

$$(M_B - \sqrt{\overset{\circ}{p}{}^2 + m_1^2} - \sqrt{\overset{\circ}{p}{}^2 + m_2^2})\, \Psi^{(+)}_{BP}(\vec{\overset{\circ}{p}}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{\overset{\circ}{q}}\, V(\vec{\overset{\circ}{p}}, \vec{\overset{\circ}{q}}; P)\, \Psi^{(+)}_{BP}(\vec{\overset{\circ}{q}}) . \qquad (2.16)$$

Волновая функция $\Psi^{(+)}_{BP}$ нормирована условием [7] :

$$\frac{1}{(2\pi)^6} \int d\vec{\overset{\circ}{p}}\, d\vec{\overset{\circ}{q}}\; \bar{\Psi}^{(+)}_{BP}(\vec{\overset{\circ}{p}}) \left[\frac{\partial}{\partial \sqrt{P^2}} \{ G^{(+)}(\vec{\overset{\circ}{p}}, \vec{\overset{\circ}{q}}; P) \}^{-1} \right]_{\sqrt{P^2} = M_B} \Psi^{(+)}_{BP}(\vec{\overset{\circ}{q}}) = 2M . \qquad (2.17)$$

Уравнение (2.16) и условие (2.17) имеют явно релятивистски инвариантный вид.

3. Матричные элементы локальных операторов между связанными состояниями

Следуя работе [9], рассмотрим пятиточечную гриноподобную функцию и ее фурье-образ в импульсном пространстве:

$$R(\vec{\overset{0}{p}},\vec{\overset{0}{q}};P,Q)=\int dx_1\,dx_2\,dy_1\,dy_2\;e^{ip_1\cdot x_1+ip_2\cdot x_2-iq_1\cdot y_1-iq_2\cdot y_2}\times \tag{3.1}$$

$$\times\delta(h_P\cdot x_1-h_P\cdot x_2)\,\delta(h_Q\cdot y_1-h_Q\cdot y_2)\,R(x_1,x_2;y_1,y_2),$$

где

$$R(x_1,x_2;y_1,y_2)=\langle 0\,|\,T\{\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)J(0)\bar\phi_2(y_2)\bar\phi_1(y_1)\}\,|\,0\rangle,$$

$$P=p_1+p_2,\;Q=q_1+q_2;\;h_P=\frac{P}{\sqrt{P^2}},\;h_Q=\frac{Q}{\sqrt{Q^2}}.$$

$J(z)$ – произвольный локальный оператор (например, векторного тока). Предполагается, что для координат и импульсов введена параметризация (2.3), причем векторы $x_{1,2}$ и $p_{1,2}$ выражены через векторы h_P и $n^{(i)}(P)$, а векторы $y_{1,2}$ и $q_{1,2}$ – через h_Q и $n^{(i)}(Q)$.

Используя представление T-произведения через θ-функции, можно получить /7/ двумерное спектральное представление для функции R, аналогичное (2.9). Мы приведем здесь в явном виде только один член этого представления, который понадобится нам в дальнейшем:

$$R(\vec{\overset{0}{p}},\vec{\overset{0}{q}};P,Q)=\iint_0^\infty dM\,dM'\,\frac{N(\vec{\overset{0}{p}},\vec{\overset{0}{q}};Mh_P,M'h_Q)}{(\sqrt{P^2}-M+i0)(\sqrt{Q^2}-M'+i0)}+\cdots, \tag{3.2}$$

где

$$N(\vec{\overset{0}{p}},\vec{\overset{0}{q}};Mh_P,M'h_Q)=(2\pi)^6\sum_{m,n}\delta^4(Mh_P-K_m)\,\delta^4(M'h_Q-K_n)\times$$

$$\times\chi_{0m}(\vec{\overset{0}{p}})\,\langle m\,|\,J(0)\,|\,n\rangle\,\bar\chi_{0n}(\vec{\overset{0}{q}}),$$

а величина $\chi_{0_n}(\vec{\overset{0}{p}})$ определена равенством (2.9а). Для функции R нетрудно также получить соотношение, аналогичное формулам (2.8).

Если среди полных наборов состояний $|m>$ и $|n>$ имеются связанные состояния $|A>$ и $|B>$ с массами M_A и M_B то, как видно из представления (3.2), функция R имеет полюса при $\sqrt{P^2} = M_A$ и $\sqrt{Q^2} = M_B$, и вблизи этих полюсов

$$R(\vec{\overset{0}{p}}, \vec{\overset{0}{q}}; P, Q) = \frac{\Psi_{AP}(\vec{\overset{0}{p}}) < A \,|\, J(0) \,|\, B > \bar{\Psi}_{BQ}(\vec{\overset{0}{q}})}{2M_A 2M_B(\sqrt{P^2} - M_A)(\sqrt{Q^2} - M_B)} . \qquad (3.3)$$

Нас интересует выражение для матричного элемента оператора J . С этой целью введем обобщенную вершинную функцию Γ с помощью равенства

$$R = G\,\Gamma\,G , \qquad (3.4)$$

где под операцией умножения здесь понимается интегрирование по пространству терхмерных импульсов $\overset{0}{p}$ и $\overset{0}{q}$.

Графически это определение можно представить в виде диаграмм (нефейнмановских)

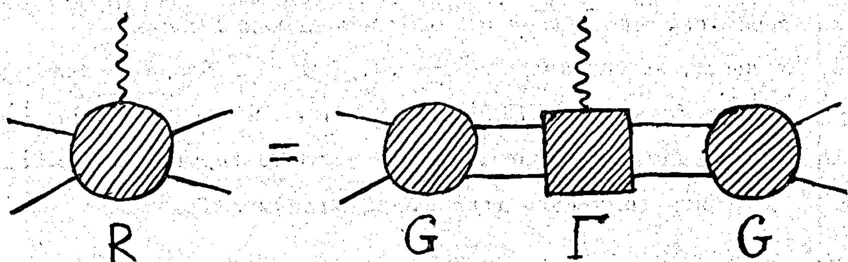

Рис. 1.

Функция Грина G также имеет полюса при наличии связанных состояний и вблизи такого полюса представима в виде (2.10). Сравнивая выражения (3.3) и (3.4) для функции R вблизи полюсов, мы приходим к искомому равенству

$$
\begin{gathered}
\langle A \,|\, J(0) \,|\, B \rangle = \int d\vec{\overset{0}{p}}\, d\vec{\overset{0}{q}}\, \bar{\Psi}_{AP}(\vec{\overset{0}{p}})\, \Gamma(\vec{\overset{0}{p}}, \vec{\overset{0}{q}}; P, Q)\, \Psi_{BQ}(\vec{\overset{0}{q}}), \\
\vec{K}_A = \vec{P}\,; \quad \vec{K}_B = \vec{Q}\,.
\end{gathered}
\tag{3.5}
$$

Это соотношение является точным и явно релятивистски инвариантным определением матричного элемента локального оператора между связанными состояниями (форм-факторов связанной системы) через волновые функции связанной системы и обобщенную вершинную функцию.

В качестве примера рассмотрим случай, когда $J_\mu(z)$ является оператором сохраняющегося векторного тока. В этом случае имеется условие нормировки:

$$
\langle m \,|\, (h \cdot J(0)) \,|\, n \rangle = Z_n\, \delta_{mn}\, 2(h \cdot K_n)\,, \qquad \frac{\vec{K}_m}{M_m} = \frac{\vec{K}_n}{M_n}\,, \tag{3.6}
$$

где h – произвольный единичный времениподобный вектор.

В частности, можно положить $h = K_n / M_n$. Тогда, используя спектральные представления (3.2) для функции R и (2.9) для G, а также определение (3.4) функции Γ и условие нормировки (3.6), нетрудно[7] получить тождество типа Уорда-Фрадкина-Такахаши:

$$
(P-Q)^\mu\, \Gamma_\mu(P,Q) = Z\,\{\, G^{-1}(P) - G^{-1}(Q) \,\}\,, \qquad \frac{P}{\sqrt{P^2}} = \frac{Q}{\sqrt{Q^2}} \tag{3.7}
$$

или, дифференцируя по $\sqrt{P^2}$,

$$\frac{P^{\mu}}{\sqrt{P^2}} \Gamma_{\mu}(P,Q) = Z \frac{\partial}{\partial\sqrt{P^2}} G^{-1}(P).$$

Последнее соотношение, в совокупности с равенствами (3.5) и (3.6), немедленно приводит к условию нормировки (2.17).

Вершинную функцию Γ обычно удается вычислить лишь приближенно в виде разложения по взаимодействию между частицами [7]. В низшем порядке, когда взаимодействие отсутствует, согласно определению (3.4), мы имеем:

$$\Gamma_0 = [G^f]^{-1} R_0 [G^f]^{-1}, \tag{3.8}$$

где G^f – функция Грина свободных невзаимодействующих частиц, а R_0 соответствует диаграммам типа изображенной на рис. 2 (импульсное приближение)

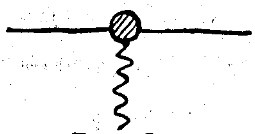

Рис. 2.

Как и раньше, удобно спроецировать функцию R на положительно-частотные состояния с помощью равенства, аналогичного (2.13):

$$R^{(+)} = \frac{4}{c_1^2 c_2^2} \sqrt{\epsilon_1(\overset{0}{p})\epsilon_2(\overset{0}{p})}\, \bar{u}_1(p_1)\bar{u}_2(p_2)\, R\, u_1(q_1)\, u_2(q_2) \sqrt{\epsilon_1(\overset{0}{q})\epsilon_2(\overset{0}{q})} \tag{3.9}$$

и соответственно определить:

$$\Gamma^{(+)} = [G^{(+)}]^{-1} R^{(+)} [G^{(+)}]^{-1}. \tag{3.10}$$

Тогда в импульсном приближении (3.8), используя спектральное представление (3.2) и выражение (2.13а), можно получить [7]:

$$\Gamma_0^{(+)}(\overset{0}{\vec p},\overset{0}{\vec q};P,Q)=\frac{\langle\vec p_1\,|J^{(1)}(0)|\,\vec q_1\rangle}{2\sqrt{\epsilon_1(\overset{0}{p})\,\epsilon_1(\overset{0}{q})}}(2\pi)^3\frac{\epsilon_2(p_2)\,\delta(\vec p_2-\vec q_2)}{\sqrt{\epsilon_2(\overset{0}{p})\,\epsilon_2(\overset{0}{q})}}+(1\leftrightarrow 2)\qquad(3.11)$$

где

$$p_{1,2}=\epsilon_{1,2}(\overset{0}{p})\,h_P+\sum_{i=1}^{3}(n^{(i)}(P)\cdot\overset{0}{p}{}^i_{1,2}),\quad \overset{0}{\vec p}_1=-\overset{0}{\vec p}_2=\overset{0}{\vec p};$$

$$q_{1,2}=\epsilon_{1,2}(\overset{0}{q})\,h_Q+\sum_{i=1}^{3}(n^{(i)}(Q)\cdot\overset{0}{q}{}^i_{1,2}),\quad \overset{0}{\vec q}_1=-\overset{0}{\vec q}_2=\overset{0}{\vec q};$$

$$\epsilon_{1,2}(\overset{0}{p})=\sqrt{\overset{0}{p}{}^2+m^2_{1,2}}\,,\quad P^2=M_A^2,\ Q^2=M_B^2\,,$$

а матричный элемент оператора $J^{(1)}$ берется между одночастичными свободными состояниями. Вычисления упрощаются, если положить $M_A=M_B$ и перейти в брейтовскую систему отсчёта, где

$$\vec P=-\vec Q=\frac{\vec\Delta}{2}\ ;\quad E_A=E_B=\sqrt{M^2+\frac{\Delta^2}{4}}=E\ ;\ M_A=M_B=M.\qquad(3.12)$$

Тогда δ-функция в первом члене равенства (3.11) приводит к уравнению:

$$\vec p_2-\vec q_2\equiv\frac{\vec\Delta}{2M}[\epsilon_2(\overset{0}{p})-\epsilon_2(\overset{0}{q})]-\sum_{i=1}^{3}\vec n^{(i)}\left(\frac{\Delta}{2}\right)\cdot(\overset{0}{p}-\overset{0}{q})^i=0,$$

которое дает

$$\overset{0}{\vec p}-\overset{0}{\vec q}=\frac{\vec\Delta E}{M^2}\left[\epsilon_2(\overset{0}{p})-\frac{(\vec\Delta\cdot\overset{0}{\vec p})}{2E}\right],\qquad(3.13)$$

$$\epsilon_2(\overset{0}{q})=\left(1+\frac{\Delta^2}{2M^2}\right)\epsilon_2(\overset{0}{p})-\frac{E}{M^2}(\vec\Delta\cdot\overset{0}{\vec p}).$$

Производная от аргумента δ -функции

$$\mathrm{Det}\left\{\frac{\partial(q_2-p_2)^i}{\partial \overset{0}{q}{}^j}\right\}=\frac{(\vec\Delta\cdot\vec{\overset{0}{q}})}{2M\epsilon_2'(\overset{0}{q})}+\frac{E}{M}. \tag{3.14}$$

Таким образом, если известны волновые функции связанной системы (хотя бы приближенно), то можно исследовать на основе этих выражений различные свойства релятивистских формфакторов этой системы (например, магнитный момент системы, асимптотическое поведение при больших передачах импульса и т.д.).

Рассмотрим асимптотическое поведение формфактора в простейшем случае, когда обе частицы, составляющие систему, и оператор J являются скалярными величинами и положим одночастичный матричный элемент оператора $J^{(1)}$ в (3.12) равным константе g. Тогда, подставляя выражение (3.12) в равенство (3.5) с учётом соотношений (2.5), (3.13) и (3.14), мы получим при больших передачах импульса:

$$\langle B|J(0)|B\rangle_{\Delta\to\infty}=\frac{g}{(2\pi)^3}\int\frac{d\vec p}{2\sqrt{\epsilon_1(p)\epsilon_2(p)}}\left\{\bar\Psi_{B0}(\vec p)\Psi_{B0}\left(\vec p-\vec\Delta\frac{E\epsilon_2(p)}{M^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\bar\Psi_{B0}(\vec p)\Psi_{B0}\left(\vec p+\vec\Delta\frac{E\epsilon_1(p)}{M^2}\right)\right\}. \tag{3.15}$$

При выводе этой формулы было также предположено, что относительное движение частиц (в с.ц.м.) является нерелятивистским, т.е. $p^2 \ll m^2_{1,2}$ и, следовательно, система слабо связана, т.е. $m_1+m_2-M \ll m_{1,2}$. Выражение (3.15) находится в явном разногласии с результатами работы /18/. Причина этого разногласия состоит в том, что в работе /18/ было сделано, на наш взгляд, ничем неоправданное предположение о сохранении одновременного характера волновой функции при переходе из с.ц.м.

в брейтовскую систему отсчёта. Такое предположение, очевидно, противоречит смыслу релятивистской инвариантости и преобразований Лоренца.

Автор выражает глубокую благодарность академику Н.Н. Боголюбову, профессорам А.Н. Тавхелидзе и И. Тодорову, докторам В.Г. Кадышевскому, В.А. Матвееву, Р.М. Мурадяну за ценные советы и обсуждения.

Литература

1. A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze. Nuovo Cim., 29, 380 (1963).
2. R.N. Faustov. Nucl. Phys., 75, 669 (1966).
   Г.М. Зиновьев, Б.В. Струминский, Р.Н. Фаустов, В.Л. Черняк. ЯФ 11, 1284 (1970).
3. В.Р. Гарсеванишвили, В.А. Матвеев, Л.А. Слепченко. ЭЧАЯ, т. 1, вып. 1, стр. 92, Атомиздат, Москва (1970).
4. F.J. Dyson. Phys. Rev., 91, 1543 (1953).
5. V.G. Kadyshevsky. Nucl. Phys., B6, 125 (1968).
   V.G. Kadyshevsky, R.M. Mir-Kasimov, N.B. Skachkov. Nuovo Cim., 55A, 233 (1968).
6. В.А. Матвеев, Р.М. Мурадян, А.Н. Тавхелидзе. Препринты ОИЯИ Р2-3900, Дубна 1968 и Е2-3498, Дубна 1967.
7. Р.Н. Фаустов. ТМФ 3, 240 (1970).
8. П.Н. Боголюбов. ТМФ 5, 244 (1970).
9. S. Mandelstam. Proc.Roy.Soc., 233A, 248 (1955).
10. Н.Н. Боголюбов, В.А. Матвеев, А.Н. Тавхелидзе. "Вопросы теории элементарных части" стр. 269, Дубна 1968.
11. В.П. Шелест. "Вопросы теории элементарных частиц", стр. 280, Дубна 1968.
12. R.N. Faustov. Nuovo Cim., 69A, 37 (1970).

13. R.N. Faustov. Phys. Lett., 33B, 422 (1970).
14. S. Brodsky and J. Primack. Ann. of Phys., 52, 315 (1969).
15. Ю.М. Широков. ЖЭТФ, 21, 748 (1951).
16. A. Eddington. Relativity Th eory of Protons and Electrons, Cambridge, University Press (1936).
17. A.S. Wightman. "Relation de dispertion et particules elementaires", p. 160, Hermann Paris (1960).
18. AL. Licht, A. Pagnamenta. Phys. Rev., D2, 1150 (1970).

Рукопись поступила в издательский отдел
16 марта 1971 года.