СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

P2 - 5684

П.Н. Боголюбов

МЕТОД КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ И КВАРКОВАЯ МОДЕЛЬ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1971

P2 - 5684

П.Н. Боголюбов

МЕТОД КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ И КВАРКОВАЯ МОДЕЛЬ

§ I.

В работе В.А.Матвеева и А.И.Тавхелидзе [1] исследовался метод когерентных состояний для изучения высокоэнергетических процессов сильных взаимодействий адронов. Здесь мы попытаемся установить связь этого метода с кварковыми моделями, рассмотренными в работах [2,3].

[2]

Рассмотрим уравнение :

$$\left\{ p_1^2 + p_2^2 + V\left((x_1 - x_2)^2\right) \right\} \psi(x_1, x_2) = 0, \qquad (I)$$

характеризующее движение кварка (I) и антикварка (2) в мезоне. Это уравнение соответствует пределу, в котором не учитывается нарушение ни спиновой симметрии, ни U_3 . Здесь мы пользуемся метрикой

$$g_{00} = 1 , \quad g_{\alpha\alpha} = -1 , \quad \alpha = 1,2,3$$

и

$$p_{j,\alpha} = i g_{\alpha\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{j,\alpha}} , \qquad \alpha = 0,1,2,3.$$

Вводя замену переменных, разделяющую движение мезона как целого и относительное движение кварка-антикварка

$$x_1 = x + \xi , \quad x_2 = x - \xi ,$$

получим

$$p_1 = \frac{1}{2}\hat{p} + \frac{1}{2}\eta ; \quad p_2 = \frac{1}{2}\hat{p} - \frac{1}{2}\eta ,$$

где*)

$$\hat{p}_\alpha = i g_{\alpha\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} , \quad \eta_\alpha = i g_{\alpha\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} .$$

Следовательно,

$$p_1^2 + p_2^2 = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \eta^2)$$

---

*) Знак $\hat{p}$ отличает оператор $i g_{\alpha\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ от фиксированного импульса мезона, который обозначим знаком p .

Таким образом, уравнение (I) приводится к виду

$$\{\hat{p}^2+\eta^2+2V(4\xi^2)\}\Psi(x_1,x_2)=0. \quad (2)$$

Рассмотрим движение мезона как целого с определенным импульсом p. Тогда, положив в(2)

$$\Psi(x_1,x_2)=e^{-i(px)}\psi(\xi), \quad (3)$$

получим

$$\{M^2+\eta^2+2V(4\xi^2)\}\psi(\xi)=0, \quad (4)$$

где $M^2=p^2$ представляет квадрат массы мезона.

При решении уравнений типа (4) возникает существенная трудность. Например, рассмотрим простой случай, когда потенциальная функция V соответствует гармоническому осциллятору

$$2V(4\xi^2)=\omega^2\xi^2+c, \quad (5)$$

где c - некоторая постоянная.

В данном случае можно написать:

$$\left\{M^2+c+\left(-\frac{\partial^2}{\partial\xi_0^2}+\omega^2\xi_0^2\right)-\sum_{\alpha=1}^{3}\left(-\frac{\partial^2}{\partial\xi_\alpha^2}+\omega^2\xi_\alpha^2\right)\right\}\psi(\xi)=0. \quad (6)$$

Поскольку оператор в левой части представляется суммой операторов, действующих на различные координаты ξ_α, решение этого уравнения можно выразить произведением

$$\psi(\xi)=\prod_{\alpha=0}^{3}\psi_\alpha(\xi_\alpha), \quad (7)$$

в котором $\left(-\frac{\partial^2}{\partial\xi_0^2}+\omega^2\xi_0^2\right)\psi_0(\xi_0)=\lambda_0\psi_0(\xi_0)$,

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial \xi_\alpha^2}+\omega^2 \xi_\alpha^2\right)\psi_\alpha(\xi_\alpha)=\lambda_\alpha \psi_\alpha(\xi_\alpha),\ \alpha=1,2,3. \tag{8}$$

λ – соответствующие собственные значения.

Для M^2 из (6) получим

$$M^2=-c-\lambda_0+\sum_{\alpha=1}^{3}\lambda_\alpha .$$

Как известно, решения уравнений одномерных гармонических осцилляторов (8) имеют вид

$$\psi_0(\xi_0)=H_{n_0}(\sqrt{\omega}\,\xi_0)\,e^{-\frac{\omega}{2}\xi_0^2}$$

$$\psi_\alpha(\xi_\alpha)=H_{n_\alpha}(\sqrt{\omega}\,\xi_0)\,e^{-\frac{\omega^2}{2}\xi_0^2}$$

$$\lambda_0=(2n_0+1)\omega,\quad \lambda_\alpha=(2n_\alpha+1)\omega$$

$$n_0=0,1,2\dots;\quad n_\alpha=0,1,2\dots;\quad \alpha=1,2,3.$$

$H_n(z)$ – полиномы Эрмита. Таким образом, мы приходим к следующему решению уравнений (6):

$$\psi(\xi)=N\left\{\prod_{\alpha=0}^{3}H_{n_\alpha}(\sqrt{\omega}\,\xi_\alpha)\right\}e^{-(\xi_0^2+\vec{\xi}^2)\frac{\omega}{2}}$$

$$N=Const. \tag{9}$$

$$M^2=-c-2n_0\omega+2\sum_{\alpha=1}^{3}n_\alpha\omega+2\omega .$$

Как видно, такое решение неприемлемо, так как, поскольку n_0 пробегает все положительные значения, квадрат массы может принимать отрицательные значения.

Далее, решение (9) нековариантно благодаря присутствию множителя $e^{-(\xi_0^2+\vec{\xi}^2)\frac{\omega}{2}}$. Такое затруднительное положение с ковариантностью можно было бы исправить, если бы вместо этого множителя мы имели лоренц-инвариантный

$$e^{-(\vec{\xi}^2-\xi_0^2)\frac{\omega}{2}}.$$

Чтобы добиться этого, отметим, что первое из уравнений (8), кроме решения
$$\psi_0(\xi_0)=e^{-\xi_0^2\frac{\omega}{2}},$$

имеет также решение
$$\psi_0(\xi_0)=e^{\xi_0^2\frac{\omega}{2}}.$$

Воспользуемся этим решением, оставив для $\psi_\alpha(\xi_\alpha)$ прежние выражения. Тогда для основного состояния $n_0=n_\alpha=0$ получим лоренц-инвариантное решение

$$\psi(\xi)=Ne^{(\xi_0^2-\vec{\xi}^2)\frac{\omega}{2}}. \equiv |0\rangle \qquad (10)$$

Оно, однако, не нормируемо в обычном смысле, поскольку интеграл
$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{\xi_0^2\omega}\,d\xi_0$$
расходится. Имея в виду такую ситуацию, в работах /2,3/ было предложено в основном уравнении (4) положить

$$\xi_0=i\xi_4, \qquad (11)$$

считая ξ_4 - вещественной переменной.

Норму $\langle\psi,\psi\rangle$ определим как интеграл
$$\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\cdots\!\int\psi^*(\xi)\,\psi(\xi)\,d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 .$$

Видно, что при таком определении нормы решение (10) является нормируемым, для него

$$\langle\psi,\psi\rangle=N^2\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\omega\xi^2}d\xi\right)^4=\frac{N^2}{\omega^2}\pi^2. \qquad (12)$$

Произведя в уравнении (6) замену (11), получим

$$\left\{M^2+c-\sum_{\alpha=1}^{4}\left(-\frac{\partial^2}{\partial\xi_\alpha^2}+\omega^2\xi_\alpha^2\right)\right\}\psi(\xi)=0 .$$

Так как собственные значения операторов

$$-\frac{\partial^2}{\partial \xi_\alpha^2} + \omega^2 \xi_\alpha^2 \quad , \ \alpha = 1, 2, 3, 4,$$

соответствующие нормируемым решениям, равны

$$(2n_\alpha + 1)\omega \quad , \quad n_\alpha = 0, 1, 2 \ldots ,$$

то

$$M^2 = -4c + 4\omega + \sum_{\alpha=1}^{4} 2\omega n_\alpha$$

и минимальное значение M^2 реализуется в основном состоянии, когда все $n_\alpha = 0$.

Положив

$$4c = 4\omega - M_0^2, \tag{I3}$$

получим

$$M^2 = 2\omega n + M_0^2 ,$$

где n – неотрицательное целое число:

$$n = \sum_{\alpha=1}^{4} n_\alpha .$$

Итак, с помощью указанной процедуры мы получим ковариантную форму волновой функции ψ и положительный эквидистантный спектр для M^2.

Покажем, что рассмотрение уравнения (6) при указанном способе его трактовки эквивалентно рассмотрению 4-мерного гармонического осциллятора по способу, изложенному в работе (I).

Приняв во внимание (I3), представим это уравнение в форме

$$\left\{ M^2 + \eta^2 + \omega^2 \xi^2 + 4\omega - M_0^2 \right\} \psi(\xi) = 0 . \tag{I4}$$

Введем квантовые амплитуды, характерные для гармонического осциллятора

??

$$a_\alpha = \frac{\omega \xi_\alpha + i\eta_\alpha}{\sqrt{2\omega}} \quad , \quad \overset{+}{a}_\alpha = \frac{\omega \xi_\alpha - i\eta_\alpha}{\sqrt{2\omega}} . \tag{I5}$$

?? $a_0^+ = \frac{-\omega\xi_0 + i\eta_0}{\sqrt{2\omega}}$

Поскольку

$$\xi_\alpha \ , \quad \eta_\alpha = i g_{\alpha\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \quad , \ \alpha = 0, 1, 2, 3$$

преобразуются как четырехвекторы, мы видим, что и амплитуды a, a^+ также преобразуются как четырехвекторы. Учитывая тривиальные коммутационные соотношения

$$[\eta_\alpha, \xi_\beta] = i g_{\alpha,\beta},$$

получим

$$[a_\alpha, \overset{+}{a}_\beta] = -g_{\alpha,\beta}. \tag{16}$$

Коммутаторы между a_α и между $\overset{+}{a}_\alpha$ все равны нулю. Из (15) следует, что

$$\overset{+}{a}_\alpha a_\alpha = \frac{\omega^2 \xi_\alpha^2 + \eta_\alpha^2}{2\omega} + \frac{g_{\alpha\alpha}}{2},$$

поэтому

$$\omega^2 \xi^2 + \eta^2 + 4\omega = \sum_{\alpha=0}^{4} (\omega^2 \xi_\alpha^2 + \eta_\alpha^2) g_{\alpha\alpha} + 4\omega =$$

$$= 2\omega(\overset{+}{a} a) = 2\omega \sum_{\alpha=0}^{3} g_{\alpha\alpha} \overset{+}{a}_\alpha a_\alpha,$$

а уравнение (14) запишется так:

$$\left(M^2 + 2\omega \sum_{\alpha=0}^{3} g_{\alpha\alpha} \overset{+}{a}_\alpha a_\alpha - M_0^2 \right) \Psi = 0. \tag{17}$$

Вакуумное состояние системы

$$\Psi = |0\rangle \tag{18}$$

определялось в работе /1/ как состояние с единичной нормой

$$\langle 0|0\rangle = 1,$$

характеризуемое соотношениями

$$a_\alpha |0\rangle = 0, \quad \alpha = 0,1,2,3. \tag{19}$$

Раскрыв эти соотношения, учитывая (15), получим

$$a_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(\omega \xi_\alpha - g_{\alpha\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \right),$$

т.е.

$$a_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(\omega \xi_\alpha + \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \right), \quad \alpha = 1,2,3$$

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(\omega \xi_0 - \frac{\partial}{\partial \xi_0} \right).$$

В координатной форме соотношения (I9) эквивалентны уравнениям

$$\left(\omega\xi_\alpha + \frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\right)\varphi = 0 \quad , \left(\omega\xi_0 - \frac{\partial}{\partial\xi_0}\right)\varphi = 0 . \qquad (20)$$
$$\alpha = 1, 2, 3 .$$

Отсюда вытекает, что φ имеет форму (I0), а с учетом нормировки (I2) видно, что вакуумное состояние (I8) в координатном представлении характеризуется волновой функцией

$$\psi(\xi) = \frac{\omega}{\pi} e^{(\xi_0^2 - \vec{\xi}^2)\frac{\omega}{2}} = \frac{\omega}{\pi} e^{\xi^2\frac{\omega}{2}} . \qquad (2I)$$

Рассмотрим одноквантовые возбужденные состояния

$$\overset{+}{a}_\beta |0> . \qquad (22)$$

Нетрудно убедиться, что они являются собственными состояниями для оператора

$$-\sum_{\alpha=0}^{3} g_{\alpha\alpha} \overset{+}{a}_\alpha a_\alpha \qquad (23)$$

с единичным собственным значением.

Действительно, в силу коммутационных соотношений (I6)

$$a_\alpha \overset{+}{a}_\beta = \overset{+}{a}_\beta a_\alpha - g_{\alpha,\beta} ,$$

$$-\sum_{\alpha=0}^{3} g_{\alpha\alpha} \overset{+}{a}_\alpha a_\alpha \overset{+}{a}_\beta |0> =$$

$$= -\sum_{\alpha=0}^{3} g_{\alpha\alpha} \overset{+}{a}_\alpha \overset{+}{a}_\beta a_\alpha |0> + \sum_{\alpha=0}^{3} g_{\alpha\alpha} \overset{+}{a}_\alpha g_{\alpha\beta} |0> = \overset{+}{a}_\beta |0> .$$

Поэтому для одноквантовых состояний из (I7) получим

$$M^2 = M_0^2 + 2\omega .$$

Рассмотрим общее возбужденное состояние, содержащее n квантов

$$\psi = \sum_{\substack{(j_1 j_2 \dots j_n) \\ j = 0,1,2,3}} \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} \overset{+}{a}_{j_1} \overset{+}{a}_{j_2} \dots \overset{+}{a}_{j_n} |0> \qquad (24)$$

Так как все $\overset{+}{a}_j$ коммутируют между собой,

$$\overset{+}{a}_{j_1} \dots \overset{+}{a}_{j_n} |0>$$

симметрично по отношению к любой перестановке индексов j. Поэтому мы всегда можем симметризовать выражение (24) и считать, что величины $\epsilon_{j_1 \dots j_n}$ симметричны по отношению к любой перестановке индексов j. Повторяя предыдущие рассуждения, основанные на последовательном использовании коммутационных соотношений (I6), нетрудно убедиться, что (24) являются собственными состояниями оператора (23):

$$-\sum_{\alpha=0}^{3} g_{\alpha\alpha} \overset{+}{a}_\alpha a_\alpha \sum_{(j_1 \dots j_n)} \epsilon_{j_1 \dots j_n} \overset{+}{a}_{j_1} \dots \overset{+}{a}_{j_n} |0> =$$

$$= n \sum_{(j_1 \dots j_n)} \epsilon_{j_1 \dots j_n} \overset{+}{a}_{j_1} \dots \overset{+}{a}_{j_n} |0>.$$

Следовательно, из уравнения (I7) для состояния (24) получим

$$M^2 = M_0^2 + 2\omega n \ , \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

Итак, получается явно ковариантная ситуация и положительный эквидистантный спектр для квадрата массы. Однако теперь норма может оказываться и отрицательной. Возьмем, например, состояние

$$\psi = \overset{+}{a}_0 |0> \tag{25}$$

с одним временным квантом.

Тогда $\quad a_0 \overset{+}{a}_0 = \overset{+}{a}_0 a_0 - 1$

и

$$<\psi, \psi> = <0| a_0 \overset{+}{a}_0 |0> = <0| \overset{+}{a}_0 a_0 |0> - <0,0> = -1.$$

Нетрудно понять причину этого. Действительно, для состояний (25)

$$\psi = (\overset{+}{a}_0 + a_0)|0>$$

или, ввиду (I5)

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \xi_0 |0>$$

т.е. в координатном представлении

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \frac{\omega}{\pi} \xi_0 \, e^{\frac{\omega}{2}(\xi_0^2 - \vec{\xi}^2)}$$

и $$\psi^*\psi = \frac{1}{2\omega}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2 \xi_0^2\, e^{\omega(\xi_0^2-\vec{\xi}^2)}.$$

Но в нашей процедуре при выполнении интеграции по ξ для вычисления нормы мы должны положить $\xi_0 = i\xi_4$ и интегрировать по вещественной ξ_4

$$\langle\psi,\psi\rangle = \frac{1}{2\omega}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\cdots\!\int (-\xi_4^2)\, e^{-\omega^2(\xi_4^2+\vec{\xi}^2)} d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3\, d\xi_4 .$$

Именно интеграция по мнимой оси ξ_0, которая обеспечивает ковариантность и положительность спектра, M^2 вызывает отрицательность нормы, т.к. при такой процедуре $\xi_0^2 = -\xi_4^2 < 0$.

Отсюда ясно, что норма состояний (24) будет положительна, если в них не содержится ни одного оператора $\overset{+}{a}_0$ рождения временного кванта, например, когда

$$\epsilon_{0, j_2, j_3 \dots j_n} = 0. \tag{26}$$

Действительно, в силу симметрии $\epsilon_{j_1 \dots j_n}$ обращается в нуль, если хотя бы один из индексов j равен нулю и сумма (24) проводится лишь по значениям j_k = I,2,3. Условию (26) можно придать ковариантный характер. Возьмем некоторый временноподобный вектор е, например е=р. Пусть вместо (26) выполнены условия

$$\sum_{\alpha=0}^{3} e_\alpha\, \epsilon_{\alpha, j_2, \dots j_n} = 0. \tag{27}$$

Положим в (24) $g_{j_1 j_1} \cdots g_{j_n j_n}\, \epsilon_{j_1 \dots j_n} = \eta_{j_1 \dots j_n}$,

запишем ее в виде

$$\psi = \sum_{(j_1 \dots j_n)} g_{j_1 j_1} \cdots g_{j_n j_n}\, \eta_{j_1 \dots j_n}\, \overset{+}{a}_{j_1} \cdots \overset{+}{a}_{j_n} |0\rangle . \tag{28}$$

Условие (27) при таком обозначении будет

$$\sum_{\alpha=0}^{3} g_{\alpha\alpha}\, e_\alpha\, \eta_{\alpha, j_2 \dots j_n} = 0 . \tag{27'}$$

Возьмем лоренцовское преобразование $L = L_{n^\circ - e}$, преобразующее временную ось (n°) на вектор e:

$$e = L n_0 \tag{29}$$

и введем новые амплитуды

$$a'_\alpha = (L^{-1} a)_\alpha$$

$$a_\alpha = (L a')_\alpha .$$

В силу инвариантности скалярного произведения двух векторов

$$(u, v) = \sum_{\alpha=0}^{3} g_{\alpha\alpha} u_\alpha v_\alpha$$

$$(u, Lv) = (L^{-1} u, v).$$

Поэтому

$$\Psi = \sum_{(j_1 \cdots j_n)} g_{j_1 j_1} \cdots g_{j_n j_n} \eta_{j_1 \ldots j_n} (L \overset{+}{a}{}')_{j_1} \cdots (L \overset{+}{a}{}')_{j_n} |0\rangle =$$

$$= \sum_{(j_1 \cdots j_n)} g_{j_1 j_1} \cdots g_{j_n j_n} \eta'_{j_1 \ldots j_n} \overset{+}{a}{}'_{j_1} \ldots \overset{+}{a}{}'_{j_n} |0\rangle , \tag{30}$$

где $\eta'_{j_1 \ldots j_n} = (L_1^{-1} \ldots L_n^{-1} \eta)_{j_1 \ldots j_n}$.

Здесь индекс s у L_s^{-1} указывает номер индекса η, на который действует это преобразование. С другой стороны, условие (27′) ввиду (29) будет

$$\sum_{\alpha=0}^{3} g_{\alpha\alpha} (L n_0)_\alpha \eta_{\alpha, j_2, \ldots j_n} = 0 ,$$

т.е.

$$\sum_{\alpha=0}^{3} g_{\alpha\alpha} (n_0)_\alpha (L_1^{-1} \eta)_{\alpha, j_2 \ldots j_n} = 0 .$$

Применяя к свободным индексам $j_2 \cdots j_n$ соответственно преобразования $L_2^{-1} \cdots L_n^{-1}$, получим

$$\sum_{\alpha=0}^{3} g_{\alpha\alpha} (n_0)_\alpha \eta'_{\alpha, j_2 \ldots j_n} = 0 .$$

Но у n_0 все $(n_0)_\alpha$ равны нулю, кроме $(n_0)_0 = 1$.

Следовательно $\quad \eta'_{0,j_2\ldots j_n} = 0,$

откуда ввиду симметрии $\eta'_{j_1\ldots j_n}$ по отношению ко всем индексам $j_1\ldots j_n$ видно, что $\eta'_{j_1\ldots j_n}$ обращается в нуль, если хотя бы один из индексов равен нулю.

Таким образом, в представлении (30) рассматриваемой волновой функции (24) при условии трансверсальности (27) индексы j пробегают только значения 1,2,3 и поэтому в выражении ψ не содержится ни одного временного кванта $\overset{+}{a}{}'_0$. Поскольку коммутационные соотношения и вакуумное состояние лоренц-инвариантны, видно, что нормы у таких ψ положительны.

На условие трансверсальности (27) как критерий для отбора физически допустимых состояний указывалось в работе /1/.

Возьмем систему отсчета, в которой рассматриваемый мезон покоится $\vec{P} = 0$ и рассмотрим решение уравнения (14), не содержащее временных квантов в данной системе. Для этого положим

$$\psi(\xi) = e^{\frac{\omega}{2}\xi_0^2}\varphi(\vec{\xi}).$$

Получим
$$\left\{M^2 - \vec{\eta}^2 - \omega^2\vec{\xi}^2 + 3\omega - M_0^2\right\}\varphi = 0,$$

т.е. известное уравнение трехмерного гармонического осциллятора:

$$\left\{-\Delta_{\xi} + \omega^2\vec{\xi}^2\right\}\varphi(\xi) = \left(M^2 + 3\omega - M_0^2\right)\varphi(\vec{\xi}).$$

Запишем решение с определенными значениями орбитального ℓ и радиального n_r квантовых чисел [4]

$$\varphi_{n,\ell,m}(\vec{\xi}) = N e^{-\frac{\omega\vec{\xi}^2}{2}}\left(\vec{\xi}^2\right)^{\ell/2} F\left(-n_r, \ell+\tfrac{3}{2}, \omega\vec{\xi}^2\right) Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$$

$$M^2 = M_0^2 + 2\omega(2n_r + \ell), \quad n_r = 0,1,2 \tag{31}$$

где $\mathcal{N}$ - постоянные нормировки, m - квантовое число, определяющее проекцию орбитального момента, $F(-n, \ell+\frac{3}{2}, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Таким образом

$$\Psi(\xi) = \mathcal{N} e^{-\frac{\omega \vec{\xi}^2}{2}} (\vec{\xi}^2)^{\ell/2} F(-n_r, \ell+\tfrac{3}{2}, \omega \vec{\xi}^2)\, Y_{\ell,m}(\theta,\varphi). \tag{32}$$

Но выражение $(\vec{\xi}^2)^{\ell/2} F(-n_r, \ell+\frac{3}{2}, \omega\vec{\xi}^2)\, Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$

является полиномом по отношению к координатам ξ_j, $j=1,2,3$. Поэтому, как и следовало ожидать, волновая функция (32) представима в форме (24), в которой индексы j_k пробегают только значения I,2,3, а $\in_{j_1 \dots j_n}$ будут величинами, зависящими от квантовых чисел n_r, ℓ, m.

Если выразить в формуле (3I) ℓ через переменную $s = M^2$, получим семейство параллельных прямых траекторий Редже

$$\ell = \ell(s) = \frac{1}{2\omega}\left[s - (M_0^2 + 4\omega n_r)\right]$$
$$s = M^2, \quad n_r = 0,1,2\dots \tag{33}$$

Причем $$\ell'(s) = \frac{1}{2\omega}. \tag{34}$$

Перейдем теперь к получению формулы M-T для амплитуды рассеяния двух мезонов при высокой энергии. По аналогии с работой /I/ выберем операторный потенциал, определяющий такое рассеяние в виде

$$W^{(I,II)} = i \sum_{j=1}^{2} \sum_{\ell=1}^{2} G_{j,\ell}^{(I,II)} V_{j,\ell}$$

$$V_{j,\ell} = \sum_{\alpha=0}^{3} g_{\alpha\alpha} V_{j,\ell}^{(\alpha)}$$

$$V_{j,e}^{(\alpha)} = \hat{P}_\alpha \left(\hat{P}'_\alpha \,\delta(x_j - x'_e) + \delta(x_j - x'_e)\,\hat{P}'_\alpha \right) +$$

$$+ \left(\hat{P}'_\alpha \,\delta(x_j - x'_e) + \delta(x_j - x'_e)\,\hat{P}'_\alpha \right) \hat{P}_\alpha =$$

$$= \hat{P}'_\alpha \left(\hat{P}_\alpha \,\delta(x_j - x'_e) + \delta(x_j - x'_e)\,\hat{P}_\alpha \right) +$$

$$+ \left(\hat{P}_\alpha \,\delta(x_j - x'_e) + \delta(x_j - x'_e)\,\hat{P}_\alpha \right) \hat{P}'_\alpha .$$

Здесь $\hat{P}$, x_j относятся к первому мезону (I), $\hat{P}'$, x'_e – ко второму (II).

$G_{j,e}^{(I,II)}$ – постоянные, характеризующие взаимодействие кварка $(j=1)$ или антикварка $(j=2)$ в (I) с кварком (e = I) или антикварком (e = 2) в (II). Борновская амплитуда рассеяния T определяется матричным элементом $W^{(I,II)}$ потенциала взаимодействия между состояниями:

$$\psi_I \psi_{II} = e^{-i(px+p'x')}|0,0'\rangle$$

$$\psi_I^* \psi_{II}^* = \langle 0',0|\, e^{i(qx+q'x')} , \qquad (36)$$

а именно:

$$(2\pi)^4 \delta(q+q'-p-p')\, T(s,t) =$$

$$= \int \langle 0',0|\, e^{i(qx+q'x')}\, W^{(I,II)}\, e^{-i(px+p'x')}|0,0'\rangle \, dx\, dx' , \qquad (37)$$

где $s=(p+p')^2$, $t=(p-q)^2$.

В этой формуле не учтен эффект обмена между кварками и антикварками в частицах (I,II). В данном случае такой учет связан с большими затруднениями. Не ясно, в частности, какой статистикой пользоваться при анализе эффектов обмена кварков. Здесь, однако, нужно отметить, что если считать кварки реально существующими частицами, то можно сослаться на представление о подавлении при высоких энергиях обменных эффектов.

В последнее время доминирует мнение о том, что понятие "кварк" есть просто математическое понятие, используемое для описания свойств адронов. В таком случае вопрос об обмене кварков между реальными физическими частицами может вообще не рассматриваться.

Чтобы найти выражение T из формулы (37), вычислим

$$\langle 0', 0 | V_{j,\ell}^{(\alpha)} | 0, 0' \rangle .$$

Для этого подставим в (35) интегральное представление δ -функции

$$\delta(x_j - x'_\ell) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ik(x_j - x'_\ell)} dk .$$

Тогда

$$V_{j,\ell}^{(\alpha)} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \Big\{ \hat{P}_\alpha \big(\hat{P}'_\alpha e^{ik(x_j - x'_\ell)} + e^{ik(x_j - x'_\ell)} \hat{P}'_\alpha \big) +$$

$$+ \big(\hat{P}'_\alpha e^{ik(x_j - x'_\ell)} + e^{ik(x_j - x'_\ell)} \hat{P}'_\alpha \big) \hat{P}_\alpha \Big\} dk =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \big(\hat{P}_\alpha e^{ikx_j} + e^{ikx_j} \hat{P}_\alpha \big) \big(\hat{P}'_\alpha e^{-ikx'_\ell} + e^{-ikx'_\ell} \hat{P}'_\alpha \big) dk \qquad (38)$$

получим $\quad \langle 0',0|V_{j,\ell}^{(\alpha)}|0,0'\rangle =$

$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i\kappa(x-x')}\langle 0|e^{i\epsilon_j\kappa\xi}|0\rangle\langle 0'|e^{-i\epsilon_\ell\kappa\xi'}|0'\rangle(2\hat{p}_\alpha-\kappa_\alpha)(2\hat{p}'_\alpha+\kappa_\alpha)\,d\kappa. \tag{41}$$

Ввиду (I5)

$$\xi=\frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\overset{+}{a}+a)\quad,\quad \xi'=\frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\overset{+}{a}{}'+a')$$

Поэтому нетрудно показать, что

$$\langle 0|e^{i\epsilon_j\kappa\xi}|0\rangle = e^{\frac{\kappa^2}{4\omega}}$$

$$\langle 0'|e^{-i\epsilon_\ell\kappa\xi'}|0'\rangle = e^{\frac{\kappa^2}{4\omega}}$$

и представить (4I) в форме

$$\langle 0',0|V_{j,\ell}^{(\alpha)}|0,0'\rangle =$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i\kappa(x-x')}e^{\frac{\kappa^2}{2\omega}}(2\hat{p}_\alpha-\kappa_\alpha)(2\hat{p}'_\alpha+\kappa_\alpha)\,d\kappa. \tag{42}$$

Как видно, оно не зависит от индексов j,ℓ . Таким образом, из (35) получим

$$\int\langle 0',0|e^{i(qx+q'x')}W^{(I,II)}e^{-i(px+p'x')}|0,0'\rangle\,dx\,dx' =$$

$$=i\sum_{j,\ell=1}^{2}G_{j,\ell}^{(I,II)}\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i(q+\kappa-p)x}e^{i(q'-\kappa-p')x'}e^{\frac{\kappa^2}{2\omega}}(2\hat{p}-\kappa)(2\hat{p}'+\kappa)\,d\kappa\,dx\,dx'=$$

$$=i(2\pi)^4\sum_{j,\ell=1}^{2}G_{j,\ell}^{(I,II)}\int\delta(q+\kappa-p)\,\delta(q'-\kappa-p')\,e^{\frac{\kappa^2}{2\omega}}(2p-\kappa)(2p'+\kappa)\,d\kappa.$$

Видно, что

$$k = p - q = q' - p'$$

$$2p - k = 2p - (p-q) = p+q \; , \quad 2p' + k = 2p' + (q'-p') = p'+q'$$

$$\delta(q+k-p)\,\delta(q'-k-p') = \delta(q+q'-p-p')\,\delta(q+k-p)$$

и поэтому для рассматриваемой борновской амплитуды из(37) получим

$$T = i \sum_{j,e=1}^{2} G_{j,e}^{(I,II)} (p+q)(p'+q')\, e^{\frac{(p-q)^2}{2\omega}} ,$$

но

$$(p+q)(p'+q') = (p+p')^2 - (p-q')^2 = s - u \, .$$

Итак, окончательно получаем формулу Матвеева-Тавхелидзе:

$$T(s,t) = i(s-u)\, G\, e^{\frac{t}{2\omega}} , \tag{43}$$

где

$$G = \sum_{j,e=1}^{2} G_{j,e}^{(I,II)} \, . \tag{44}$$

Как показано в работе /I/ , можно воспользоваться таким борновским приближением в качестве чисто мнимого квазипотенциала гауссовского типа, описывающего упругое рассеяние рассматриваемых двух частиц при высоких энергиях.

Рассмотрим теперь некоторые существенные моменты, связанные с получением формул (43) и (44) и сделаем некоторые обобщения. Так, рассматривая в (4I) выражения вида

$$\langle 0 | e^{i\epsilon_j k \xi} | 0 \rangle ,$$

заметим, что вектор $k = (p-q)$ является пространственно-подобным: $k^2 = t = (p-q)^2 < 0$.

Поэтому в системе центра масс, где

$$k^0 = p^0 - q^0 = 0, \tag{45}$$

получим $$e^{i\epsilon, k\xi} = e^{-i\epsilon, k\xi}$$

Таким образом, в системе отсчета (45) состояния

$$e^{i\epsilon, k\xi}|0\rangle \quad , \quad \langle 0|e^{i\epsilon, k\xi}$$

не содержат временных квантов.

Далее, формулы, аналогичные (43), (44), можно получить не только для квадратичного потенциала (5), приводящего систему к 4-мерному гармоническому осциллятору, но и для более общего случая вещественной функции $V((x_1-x_2)^2)$ инварианта $(x_1-x_2)^2$. Достаточно лишь, чтобы собственная функция $\varphi(\xi)$ для уравнения (4), при вышеуказанном способе его решения и нормировки, соответствующая наименьшему собственному значению $M^2 = M_0^2$, была бы единственной, с точностью до нормировочного множителя и имела вид

$$\varphi'(\xi) = C\,\varphi(\xi^2) \quad , \; C = const.$$

φ - вещественная функция ξ^2, $M_0^2 > 0$.

Нормируем φ, приняв

$$\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\cdots\!\int \varphi(\xi^2)\, d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 = 1.$$

В этом случае в качестве движущегося основного состояния

$$e^{-ipx}|0\rangle$$

воспользуемся функцией $e^{-ipx}\varphi(\xi)$

и выражения $\langle 0|A|0\rangle$ будем раскрывать, как

$$\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\cdots\!\int \varphi(\xi^2)\, A\, \varphi(\xi^2)\, d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 \quad , \quad \xi_0 = i\xi_4 .$$

Тогда вся процедура вычисления борновской амплитуды T, исходя из потенциала $W^{I,II}$, останется неизменной вплоть до формулы (4I), куда следует поставить

$$\langle 0|e^{i\epsilon_j k\xi}|0\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\cdot\!\cdot\!\int e^{i\epsilon_j k\xi}\,\varphi_I^2(\xi^2)\,d\xi_1\ldots d\xi_4$$

$$\langle 0'|e^{-i\epsilon_\ell k\xi'}|0\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\cdot\!\cdot\!\int e^{-i\epsilon_\ell k\xi'}\,\varphi_{II}^2(\xi^2)\,d\xi_1\ldots d\xi_4 \qquad (46)$$

Из соображений ковариантности ясно, что эти выражения как функции четырехвектора k могут зависеть лишь от инварианта k^2:

$$\langle 0|e^{i\epsilon_j k\xi}|0\rangle = F_I(k^2)\,;\ \langle 0'|e^{-i\epsilon_\ell k\xi'}|0'\rangle = F_{II}(k^2)$$

(47)

Так как четырехвектор k является пространственноподобным, достаточно определить лишь $F(-\vec{k}^2)$.

Но из (46)

$$F(-\vec{k}^2) = \int e^{-i\vec{k}\vec{\xi}}\rho(|\vec{\xi}|)\,d\vec{\xi},$$

(48)

где

$$\rho(r) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(-\xi_4^2 - r^2)\,d\xi_4\,.$$

Этот прием определения $F(k^2)$ для $k^2<0$ позволяет рассматривать и случаи, когда

$$\varphi^2(-\xi_4^2 - \vec{\xi}^2)$$

убывает на бесконечности не достаточно быстро, чтобы обеспечить сходимость в обычном смысле интегралов (46):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\cdot\!\int e^{-i\epsilon_j\vec{k}\vec{\xi} - \epsilon_j k_0\xi_4}\,\varphi^2(-\xi_4^2 - \vec{\xi}^2)\,d\xi_1\ldots d\xi_4\,.$$

(49)

Такой случай возникает, например, если

$$\varphi^2(-z) \sim A e^{-\alpha\sqrt{z}},$$

т.е.

$$\varphi^2(-z^2) \sim A e^{-\alpha z}$$

и подинтегральное выражение в (49) для $|K_0| > \alpha$ не стремится к нулю при $\xi_4^2 + \vec{\xi}^2 \to \infty$.

Поэтому мы определяем $F(K^2)$ для $K^2 < 0$ с помощью (48).

Возвратившись к формуле (4I) и повторив предыдущие преобразования, мы получим в данном случае вместо (43) и (44)

$$T(s,t) = i(s-u)\, G\, F_I(t)\, F_{II}(t),$$

где

$$G = \sum_{j,e=1}^{2} G_{j,e}^{(I,II)}. \tag{50}$$

Видно, что все отличие состоит здесь в замене формфактора $e^{\frac{t}{4a}}$ формфактором $F_A(t)$, $A = I, II$, который, ввиду (48) и условий нормировки волновой функции, также обладает свойством

$$F_A(0) = 1.$$

§ 2.

В § I мы рассмотрели простую модель мезонов на основе уравнений из работы /2/. Перейдем к обобщению полученных результатов на случай модели барионов, характеризуемой уравнениями из работы /3/. Для этого мы будем исходить из следующего уравнения:

$$\left\{ \sum_{j=1}^{3} P_j^2 + U\left((x_1-x_2)^2, (x_1-x_3)^2, (x_2-x_3)^2\right) \right\} \psi(x_1, x_2, x_3), \tag{I}$$

где $P_{j,\alpha} = i g_{\alpha\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{j,\alpha}}$; $j = 1, 2, 3$; $\alpha = 0, 1, 2, 3$.

Рассмотрим для простоты случай, когда

$$U\{(x_1-x_2)^2, (x_1-x_3)^2, (x_2-x_3)^2\} = V\left\{ \frac{(x_1-x_2)^2 + (x_1-x_3)^2 + (x_2-x_3)^2}{3} \right\} \tag{2}$$

и выделим движение бариона как целого и относительное движение кварков, для чего введем переменные

$$x_j = x + \xi_j \quad , \quad \sum_{j=1}^{3} \xi_j = 0$$

$$\xi_1 = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, y \quad , \quad \xi_2 = -\sqrt{\tfrac{1}{6}}\, y + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, z \tag{3}$$

$$\xi_3 = -\sqrt{\tfrac{1}{6}}\, y - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, z$$

Перестановки между x_1, x_2, x_3 выразятся в новых переменных преобразованиями отражения и поворота y, z.

Так, например, перестановке

$$\xi_2 \rightleftarrows \xi_3$$

соответствует отражение $z \rightleftarrows -z$.

Перестановке $\xi_1 \rightleftarrows \xi_2$ соответствует

$$(y, z) \rightleftarrows \left(-\frac{1}{2}y + \sqrt{\frac{3}{4}}z\ ,\ \sqrt{\frac{3}{4}}y - \frac{1}{2}z\right).$$

Из (3) виднс, что

$$\frac{(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_3)^2}{3} = \xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2 = y^2+z^2$$

и, следовательно

$$U = V(y^2+z^2). \tag{4}$$

Далее, из (3) получим

$$X = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(x_1 - \frac{x_2+x_3}{2}\right)$$

$$z = \sqrt{\frac{1}{2}}\,(x_2-x_3)$$

Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{\frac{1}{6}}\frac{\partial}{\partial y} + \sqrt{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{\frac{1}{6}}\frac{\partial}{\partial y} - \sqrt{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Введем импульсы

$$\hat{p}_\alpha = i g_{\alpha\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\ ;\quad \eta_\alpha = i g_{\alpha\alpha}\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\ ;\quad \zeta_\alpha = i g_{\alpha\alpha}\frac{\partial}{\partial z_\alpha} \tag{5}$$

и получим $p_1 = \frac{1}{3}\hat{p} + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\eta$

$$p_2 = \frac{1}{3}\hat{p} - \sqrt{\frac{1}{6}}\,\eta + \sqrt{\frac{1}{2}}\,\zeta,\quad p_3 = \frac{1}{3}\hat{p} - \sqrt{\frac{1}{6}}\,\eta - \sqrt{\frac{1}{2}}\,\zeta. \tag{6}$$

Поэтому $$\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2=\frac{1}{3}\hat{\rho}^2+\eta^2+\zeta^2.$$

Таким образом, уравнение (I) можно представить в виде

$$\left\{\frac{1}{3}\hat{\rho}^2+\eta^2+\zeta^2+V(y^2+z^2)\right\}\psi=0 \tag{7}$$

Рассмотрим движение бариона как целого с определенным импульсом p, положив в (7)

$$\psi=e^{-ipx}\psi(y,z).$$

Получим
$$\left\{\frac{M^2}{3}+\eta^2+\zeta^2+V(y^2+z^2)\right\}\psi(y,z)=0, \tag{8}$$

где $M^2=p^2$

и приходим к задаче определения собственных функций и собственных значений M^2.

Чтобы избежать трудностей, связанных с индефинитностью лоренцовской метрики, как и в § I, положим в (8)

$$y_0=iy_4\ ,\quad z_0=iz_4$$

с вещественными y_4, z_4 и определим норму ψ через интеграл
$$\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\cdots\!\int\psi^*(y,z)\,\psi(y,z)\,d_4y\,d_4z$$

$$d_4y=d\vec{y}\,dy_4\ ,\quad d_4z=d\vec{z}\,dz_4. \tag{9}$$

Таким образом получаем задачу о собственных функциях уравнения

$$\left\{\frac{M^2}{3}+\sum_{\alpha=1}^{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial y_\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_\alpha^2}\right)+V\left(-\sum_{\alpha=1}^{4}(y_\alpha^2+z_\alpha^2)\right)\right\}\psi=0, \tag{10}$$

нормируемых в смысле (9).

Мы ограничимся рассмотрением только таких потенциальных функций V, для которых соответствующий спектр собственных значений является дискретным и положительным и предположим, что наименьшее собственное значение $M^2 = M_0^2$ не вырождено и соответствует S-состоянию, т.е. предположим, что при $M = M_0$ имеется единственная, с точностью до нормировочного множителя, собственная функция вида

$$\Psi = \varphi(y^2 + z^2), \tag{11}$$

где φ – вещественная функция от $y^2 + z^2$.

Будем нормировать φ

$$\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\cdots\!\int \varphi^2 \, d_4 y \, d_4 z = 1 \tag{12}$$

и обозначать состояние (11) как $|0>$. Тогда основное состояние с импульсом p будет

$$e^{-ipx}|0>. \tag{13}$$

Рассмотрим средние

$$<0|e^{ik\xi_j}|0> = \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\cdots\!\int e^{ik\xi_j} \varphi^2 \, d_4 y \, d_4 z \tag{14}$$

$$j = 1, 2, 3.$$

для пространственноподобного четырехвектора к : $k^2 < 0$.

Так как состояние (11) инвариантно по отношению к перестановкам между ξ_1, ξ_2, ξ_3, все средние (14) равны:

$$<0|e^{ik\xi_j}|0> = <0|e^{i\sqrt{\frac{2}{3}}ky}|0> \tag{15}$$

и ввиду лоренц-инвариантности эти средние могут зависеть от к только через к^2:

$$<0|e^{ik\xi_j}|0> = F(k^2), \tag{16}$$

а так как к – пространственноподобный 4-вектор, можно выбрать систему отсчета, в которой $k_0 = 0$.

тогда

$$F(-\vec{k}^2) = \int e^{i\sqrt{\frac{2}{3}}\vec{k}\vec{y}}\rho(|\vec{y}|)\,d\vec{y}, \tag{17}$$

где $\rho(r) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\cdots\!\!\int \varphi^2(-y_4^2 - r^2 - z_4^2 - \vec{z}^2)\,dy_4\,dz_4\,d\vec{z}.$

В силу условия нормировки (I2) видно, что

$$F(0) = 1. \tag{18}$$

Рассмотрим антисимметричный тензор, соответствующий лоренцовским **вращениям:**

$$M_{\alpha,\beta} = \sum_{j=1}^{3}(x_{j,\alpha}P_{j,\beta} - x_{j,\beta}P_{j,\alpha}) \tag{19}$$

$$\alpha,\beta = 0,1,2,3.$$

На основании (6) получим

$$P_j = \frac{1}{3}\hat{P} + b_j$$

$$b_1 = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\eta\,,\quad b_2 = -\sqrt{\tfrac{1}{6}}\,\eta + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\zeta\,,\quad b_3 = -\sqrt{\tfrac{1}{6}}\,\eta - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\zeta \tag{20}$$

и потому

$$M_{\alpha,\beta} = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}(x_{j,\alpha}\hat{P}_\beta - x_{j,\beta}\hat{P}_\alpha) + \sum_{j=1}^{3}(x_{j,\alpha}b_{j,\beta} - x_{j,\beta}b_{j,\alpha}) =$$

$$= (X_\alpha\hat{P}_\beta - X_\beta\hat{P}_\alpha) + \sum_{j=1}^{3}\{(X_\alpha + \xi_{j,\alpha})b_{j,\beta} - (X_\beta + \xi_{j,\beta})b_{j,\alpha}\},$$

но $\sum\limits_{j=1}^{3} b_{j,\beta} = \sum\limits_{j=1}^{3} b_{j,\alpha} = 0.$

Следовательно,

$$M_{\alpha,\beta} = M_{\alpha,\beta}^{(\ell)} + M_{\alpha,\beta}^{(i)}$$

$$M_{\alpha,\beta}^{(\ell)} = x_\alpha \hat{p}_\beta - x_\beta \hat{p}_\alpha \qquad (2I)$$

$$M_{\alpha,\beta}^{(i)} = \sum_{j=1}^{3} (\xi_{j,\alpha} \vartheta_{j,\beta} - \xi_{j,\beta} \vartheta_{j,\alpha}).$$

Таким образом, тензор $M_{\alpha,\beta}$ представлен в виде суммы тензора $M_{\alpha,\beta}^{(\ell)}$, относящегося к движению бариона как целого и $M_{\alpha,\beta}^{(i)}$, соответствующего внутреннему движению кварков в барионе.

На основании (3) и (20) получим

$$M_{\alpha,\beta}^{(i)} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, y_\alpha \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, \eta_\beta - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, y_\beta \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, \eta_\alpha +$$

$$+\left(-\sqrt{\tfrac{1}{6}}\, y_\alpha + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, z_\alpha\right)\left(-\sqrt{\tfrac{1}{6}}\, \eta_\beta + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, \zeta_\beta\right) - \left(-\sqrt{\tfrac{1}{6}}\, y_\beta + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, z_\beta\right)\left(-\sqrt{\tfrac{1}{6}}\, \eta_\alpha + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, \zeta_\alpha\right) +$$

$$+\left(\sqrt{\tfrac{1}{6}}\, y_\alpha + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, z_\alpha\right)\left(\sqrt{\tfrac{1}{6}}\, \eta_\beta + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, \zeta_\beta\right) - \left(\sqrt{\tfrac{1}{6}}\, y_\beta + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, z_\beta\right)\left(\sqrt{\tfrac{1}{6}}\, \eta_\alpha + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, \zeta_\alpha\right) =$$

$$= y_\alpha \eta_\beta - y_\beta \eta_\alpha + z_\alpha \zeta_\beta - z_\beta \zeta_\alpha,$$

т.е.
$$M_{\alpha,\beta}^{(i)} = M_{\alpha,\beta}^{(1)} + M_{\alpha,\beta}^{(2)}$$

$$M_{\alpha,\beta}^{(1)} = y_\alpha \eta_\beta - y_\beta \eta_\alpha \;; \quad M_{\alpha,\beta}^{(2)} = z_\alpha \zeta_\beta - z_\beta \zeta_\alpha. \qquad (22)$$

Нетрудно заметить, что $M_{\alpha,\beta}^{(\ell)}$, $M_{\alpha,\beta}^{(1)}$ и $M_{\alpha,\beta}^{(2)}$ коммутируют с оператором

$$\frac{1}{3}\hat{p}^2 + \eta^2 + \zeta^2 + V(y^2 + z^2), \qquad (23)$$

входящим в уравнение (7).

Раздельная коммутация $M^{(1)}$ и $M^{(2)}$ с оператором (23) очевидно, обусловлена выбором (2) потенциальной функции. В общем случае, когда

$$U = U\left((x_1-x_2)^2, (x_1-x_3)^2, (x_2-x_3)^2\right) =$$

$$= U\left\{\frac{1}{2}(\sqrt{3}y-z)^2, \frac{1}{2}(\sqrt{3}y+z)^2, 2z^2\right),$$

с соответствующим оператором

$$\frac{1}{3}\vec{p}^{\,2}+\eta^2+\zeta^2+U$$

будут коммутировать не $M^{(1)}$ и $M^{(2)}$ в отдельности, а только их сумма

$$M^{(1)}_{\alpha,\beta} = M^{(1)}_{\alpha,\beta} + M^{(2)}_{\alpha,\beta}.$$

Возвратившись к уравнениям (8) для собственных функций и рассматривая покоящиеся состояния $\vec{p}=0$, можно использовать для нумерации этих состояний угловые моменты, взяв, как обычно, их квадраты и проекции на какую-либо ось, например, на ось $\alpha=3$. Действительно, в силу упомянутых свойств коммутации, уравнения (8) совместимы с дополнительными уравнениями

$$\left\{[\vec{y}\times\vec{\eta}]^2-\ell_1(\ell_1+1)\right\}\psi=0,\ \left\{[\vec{y}\times\vec{\eta}]_3-m_3^{(1)}\right\}\psi=0$$

$$\left\{[\vec{z}\times\vec{\zeta}]^2-\ell_2(\ell_2+1)\right\}\psi=0,\ \left\{[\vec{z}\times\vec{\zeta}]_3-m_3^{(2)}\right\}\psi=0 \qquad (24)$$

$$\ell_1, \ell_2 = 0,1,2\ldots;\ -\ell_1\le m_3^{(1)}\le \ell_1;\ -\ell_2\le m_3^{(2)}\le \ell_2.$$

Перейдем теперь к рассмотрению частного случая осцилляторного потенциала, когда

$$V(y^2+z^2) = \frac{\omega^2}{4}(y^2+z^2)+c$$

$$\omega, c = const. \qquad (25)$$

Уравнение (8) запишется в следующем виде

$$\left\{\frac{M^2}{3}+\left(\eta^2+\frac{\omega^2}{4}y^2\right)+\left(\zeta^2+\frac{\omega^2}{4}z^2\right)+c\right\}\psi(y,z)=0. \tag{26}$$

Видно, что наименьшее значение M^2 будет

$$M_0^2 = 3(4\omega - c), \tag{27}$$

а соответствующая нормированная собственная функция

$$\psi = \varphi(y^2+z^2) = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2 e^{-\frac{\omega}{4}(y^2+z^2)}. \tag{28}$$

Чтобы M_0^2 было положительно, выберем c так, чтобы

$$2\omega - c > 0.$$

Исключив c из уравнения (26), получим

$$\left\{\frac{M^2-M_0^2}{3}+\left(\eta^2+\frac{\omega^2}{4}y^2+2\omega\right)+\left(\zeta^2+\frac{\omega^2}{4}z^2+2\omega\right)\right\}\psi=0. \tag{29}$$

Введем квантовые амплитуды для гармонических осцилляторов, как и в (15) из § I

$$a_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\left(\frac{\omega}{2}y_\alpha + i\eta_\alpha\right), \quad a^+_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\left(\frac{\omega}{2}y_\alpha - i\eta_\alpha\right) \tag{30}$$

$$b_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\left(\frac{\omega}{2}z_\alpha + i\zeta_\alpha\right), \quad b^+_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\left(\frac{\omega}{2}z_\alpha - i\zeta_\alpha\right).$$

Видно, что амплитуды a, a^+, b, b^+ преобразуются как 4-вектор и удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям

$$[a^+_\alpha, a_\beta] = i g_{\alpha\beta}, \quad [b^+_\alpha, b_\beta] = i g_{\alpha\beta}. \tag{31}$$

Остальные коммутаторы между ними равны нулю.

С помощью введенных амплитуд уравнение (29) может быть записано в виде

$$\left\{M^2 - M_0^2 + 3\omega(\overset{+}{a}a) + 3\omega(\overset{+}{b}b)\right\}\varphi = 0,$$

(32)

т.е.

$$\left\{M^2 - M_0^2 + 3\omega \sum_{\alpha=0}^{3}{}' g_{\alpha\alpha}\left(\overset{+}{a}_\alpha a_\alpha + \overset{+}{b}_\alpha b_\alpha\right)\right\}\varphi = 0.$$

Основное состояние с $M^2 = M_0^2$ характеризуется свойствами

$$a_\alpha |0\rangle = 0 \quad , \quad b_\alpha |0\rangle = 0$$

$$\langle 0 | \overset{+}{a}_\alpha = 0 \quad , \quad \langle 0 | \overset{+}{b}_\alpha = 0 .$$

Повторяя рассуждения из § I, можно убедиться, что общая форма собственных функций для уравнения (32) будет

$$\varphi = \sum_{(j,\mu=0,1,2,3)}{}' \epsilon_{j_1 \ldots j_r, \mu_1 \ldots \mu_s} \overset{+}{a}_{j_1} \ldots \overset{+}{a}_{j_r} \overset{+}{b}_{\mu_1} \ldots \overset{+}{b}_{\mu_s} |0\rangle, \qquad (33)$$

а соответствующие значения квадрата массы равны

$$M^2 = 3\omega(r+s) + M_0^2. \qquad (34)$$

Чтобы обеспечить отсутствие в выражении (33) временных квантов, в некоторой данной системе отсчета можно написать, как и в § I, соответствующие условия трансверсальности.

Рассмотрим состояния с определенными ℓ_1 и ℓ_2. Как и в § I, найдем для них

$$M^2 = 3\omega(n + \ell_1 + \ell_2) + M_0^2 , \quad n = 0,1,2\ldots ,$$

т.к. осцилляторы с a и b не взаимодействуют ($\overset{+}{a}a$ и $\overset{+}{b}b$ в (32) входят аддитивно).

Но, как известно, для суммарного момента

$$(M^{(i)})^2 = (M^{(1)} + M^{(2)})^2 = L^+(L+1)$$

число L равно

$$L = \ell_1 + \ell_2 - \nu \quad , \quad \nu = 0, 1, \ldots \ell_1 + \ell_2 - |\ell_1 - \ell_2| .$$

Поэтому для состояний с определенным значением L

$$M^2 = 3\omega\,(n + \nu + L) + M_0^2 .$$

Если выразить L через переменную $s = M^2$, то получим семейство параллельных прямых траекторий Редже

$$L = L(s) = \frac{s - M_0^2}{3\omega} - n - \nu \quad , \quad s = M^2, \tag{35}$$

причем

$$L'(s) = \frac{1}{3\omega} . \tag{36}$$

Вычислим выражение

$$\langle 0 | e^{ik\xi_j} | 0 \rangle = \langle 0 | e^{i\sqrt{\frac{2}{3}}ky} | 0 \rangle .$$

Из (30) получим

$$y = \frac{a + \overset{+}{a}}{\sqrt{\omega}}$$

и потому, пользуясь коммутационными соотношениями (3I), получим

$$e^{i\sqrt{\frac{2}{3}}ky} = e^{i\sqrt{\frac{2}{3\omega}}\,k(a + \overset{+}{a})} = e^{\frac{k^2}{3\omega}}\, e^{i\sqrt{\frac{2}{3\omega}}\,k\overset{+}{a}}\, e^{i\sqrt{\frac{2}{3\omega}}\,ka} ,$$

откуда $$\langle 0 | e^{ik\xi_j} | 0 \rangle = e^{\frac{k^2}{3\omega}} ,$$

т.е.

$$F(t) = e^{\frac{t}{3\omega}} . \tag{37}$$

Возвратимся к общему случаю потенциала $V(y^2 + z^2)$ и перейдем к получению формулы для амплитуды упругого рассеяния двух барионов (или бариона и мезона). При этом будем предполагать, что до соударения обе частицы обладают наименьшей массой в своем спектре, т.е. их состояниями являются

$$e^{-ipx}|0_I>\;,\quad e^{-ip'x'}|0_{II}>\,,$$

а после соударения

$$e^{-iqx}|0_I>\;,\quad e^{-iq'x'}|0_{II}>.$$

Для потенциала W, характеризующего рассматриваемое рассеяние, выберем то же выражение, что и в предыдущем параграфе:

$$W^{(I,II)}=i\sum_{j,e}G_{j,e}^{(I,II)}V_{j,e}$$

$$V_{j,e}=\sum_{\alpha=0}^{3}g_{\alpha\alpha}V_{j,e}^{(\alpha)} \qquad (38)$$

$$V_{j,e}^{(\alpha)}=\hat{P}_\alpha\left(\hat{P}'_\alpha\,\delta(x_j-x'_e)+\delta(x_j-x'_e)\,\hat{P}'_\alpha\right)+$$

$$+\left(\hat{P}'_\alpha\,\delta(x_j-x'_e)+\delta(x_j-x'_e)\,\hat{P}'_\alpha\right)\hat{P}_\alpha\,.$$

Здесь $\hat{p}$, x_j относятся к частице (I) а $\hat{p}'$, x_ℓ к (II). В случае, если (I) является мезоном $j=1,2$ и

$$x_j=x+\xi_j\;,\quad \xi_1=\xi\;,\quad \xi_2=-\xi\,,$$

если частица (I) есть барион, то $j=1,2,3$ и $x_j=x+\xi_j$ где ξ_j выражается через переменные y, z формулами типа (3). Частицу (II) будем всегда считать барионом, так что в (38)

$$x'_e=x'+\xi'_e\;,\quad e=1,2,3,$$

где ξ'_e выражаются через соответствующие переменные формулами типа (3).

Борновскую амплитуду упругого рассеяния определим с помощью выражения

$$(2\pi)^4 \delta(q+q'-p-p')\, T(s,t) =$$
$$= \int \langle 0_{II}\, 0_I | e^{i(qx+q'x')} W^{(I,II)} e^{-i(px+p'x')} | 0_I\, 0_{II} \rangle\, dx\, dx'. \tag{39}$$

где, как обычно,

$$s = (p+p')^2, \quad t = (p-q)^2.$$

Дословно повторяя рассуждения из § I, получим

$$\langle 0_{II}\, 0_I | V_{j,\ell} | 0_I\, 0_{II} \rangle =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ik(x-x')} F_I(k^2) F_{II}(k^2) \{(2\hat{p}-k)(2\hat{p}'+k)\}\, dk. \tag{40}$$

Отсюда, используя (38), получим

$$\int \langle 0_{II}\, 0_I | e^{i(qx+q'x')} W^{(I,II)} e^{-i(px+p'x')} | 0_I\, 0_{II} \rangle\, dx\, dx' =$$

$$= i \sum_{(j,\ell)} G_{j,\ell}^{(I,II)} \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i(q+k-p)x} e^{i(q'-k-p')x'} F_I(k^2) F_{II}(k^2) \{(2p-k)(2p'+k)\}\, dk\, dx\, dx' =$$

$$= i(2\pi)^4 \sum_{(j,\ell)} G_{j,\ell}^{(I,II)} \delta(q+q'-p-p') F_I(k_0^2) F_{II}(k_0^2)(2p-k_0)(2p'+k_0),$$

где $k_0 = p - q = q' - p'$.

Но

$$2p - k_0 = 2p - (p-q) = p+q$$

$$2p' + k_0 = 2p' + (q'-p') = p'+q'$$

$$(2p-k_0)(2p'+k_0) = (p+q)(p'+q') = (p+p')^2 - (p-q')^2 = s - u.$$

Таким образом, мы получаем формулу М-Т —

$$T(s,t) = i(s-u) \sum_{(j,\ell)}' G_{j,\ell}^{(I\,II)} F_I(t) F_{II}(t). \qquad (4I)$$

Сравнивая ее с формулой (50) из § I, мы видим, что она относится как к мезон-мезонному, так и мезон-барионному упругому рассеянию.

Как указано в работе (I), найденную борновскую амплитуду T можно использовать для построения соответствующего квазипотенциала и на основе квазипотенциального уравнения получить более точные выражения для амплитуды рассеяния. Можно, однако, непосредственно воспользоваться формулой (4I), считая T амплитудой рассеяния, т.е. пренебрегая поправками к борновскому приближению. Тогда, учитывая, что

$$F_I(0) = F_{II}(0) = 1,$$

получим, как в работе (I) следующее выражение для полного сечения при высоких энергиях

$$\sigma_{tot} = 2 \sum_{(j,\ell)}' G_{j,\ell}^{(I,II)}.$$

Как видно, здесь можно интерпретировать

$$2\, G_{j,\ell}^{(I\,II)}$$

как полное сечение $\sigma_{tot}^{(j,\ell)}$ взаимодействия j -го кварка (антикварка) с ℓ -кварком (антикварком).

В такой интерпретации получаем закон аддитивности

$$\sigma_{tot} = \sum_{j,\ell} \sigma_{tot}^{(j,\ell)}, \qquad (42)$$

который ранее был рассмотрен рядом авторов, исходя из других соображений. Дисскусия о пределах применимости закона аддитивности и сравнение его с экспериментом были предметом многочисленных работ, и здесь мы этого вопроса касаться не будем. Отметим только, что в данной схеме сразу видна необходимость существенного уточнения формул (41) и (42), так как при их выводе мы не учитывали ни спиновой, ни изотопической структуры частиц, а основные уравнения не содержат никаких нарушений симметрии, обусловленных спиновой и изотопической структурами, различием эффективных масс λ и p, n кварков. Если все же использовать (41), то, т.к. тогда дифференциальное сечение упругого рассеяния при $s \to \infty$ пропорционально

$$\Big| \sum_{j,\ell} G_{j,\ell}^{(\mathrm{I}\,\mathrm{II})} F_{\mathrm{I}}(t)\, F_{\mathrm{II}}(t) \Big|^2,$$

мы получим соотношение

$$\frac{d\sigma_{el}}{dt} = \left(\frac{d\sigma_{el}}{dt} \right)_{t=0} F_{\mathrm{I}}^2(t)\, F_{\mathrm{II}}^2(t) . \qquad (43)$$

Здесь, как следует из работ (2), (3), функции $F_{\mathrm{I}}(t)$, $F_{\mathrm{II}}(t)$ соответствуют электромагнитным формфакторам сталкивающихся частиц (I), (II). Соотношение (43), полученное на основе других соображений, приводится в монографии Коккеди /5/. В работе /5/ имеются аналоги формулы (41), в которых вместо постоянных $G_{j,\ell}$ стоят функции $g_{j,\ell}(t)$. Такое обобщение нетрудно получить и в данной схеме. Для этого достаточно вместо δ-образного закона взаимодействия кварков (38) взять размазанное взаимодействие, положив вместо (38)

$$W = i \sum_{j,\ell,\alpha} g_{\alpha\alpha} V_{j,\ell}^{(\alpha)}$$

$$V_{j,\ell}^{(\alpha)} = \hat{p}_\alpha \left(\hat{p}_\alpha\, \phi_{j,\ell}(x_j - x'_\ell) + \phi_{j,\ell}(x_j - x'_\ell)\, \hat{p}'_\alpha \right) + \qquad (44)$$

$$+\left(\hat{P}'_\alpha \phi_{j,e}(x_j - x'_e) + \phi_{j,e}(x_j - x'_e)\hat{P}'_\alpha\right)\hat{P}_\alpha ,$$

где

$$\phi_{j,e}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int g_{j,e}(k^2)\, e^{ikx}\, dk . \qquad (45)$$

Тогда, дословно повторяя такие вычисления, вместо (4I) получим*)

$$T(s,t) = i(s-u)\sum_{j,e} g_{j,e}(t)\, F_I(t)\, F_{II}(t). \qquad (46)$$

Рассмотрим еще одну возможную форму операторного потенциала W, которая для упругого рассеяния частиц

$$e^{-ipx}|0_I> \quad , \quad e^{-ip'x'}|0_{II}> \qquad (47)$$

приводит к тому же результату (4I), что и форма (38). Предлагаемое изменение состоит в замене в (38) полных импульсов частиц $\hat{p}$, $\hat{p}'$ индивидуальными импульсами кварков p_j, p'_e

$$\widetilde{W}^{(I,II)} = i\sum_{j,e} G^{(I\,II)}_{j,e} N^{(I)} N^{(II)} \widetilde{V}_{j,e} ; \quad \widetilde{V}_{j,e} = \sum_{\alpha=0}^{3} g_{\alpha\alpha} V^{(\alpha)}_{j,e} \qquad (48)$$

$$V^{(\alpha)}_{j,e} = p_{j,\alpha}\left(p'_{e,\alpha}\,\delta(x_j - x'_e) + \delta(x_j - x'_e)\,p'_{e,\alpha}\right) +$$

$$+\left(p'_{e,\alpha}\,\delta(x_j - x'_e) + \delta(x_j - x'_e)\,p'_{e,\alpha}\right)p_{j,\alpha} ,$$

---

*) Если вместо (45) взять

$$\phi_{j,e}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int g_{j,e}(s,k^2)\, e^{ikx}\, dk ,$$

то можно получить еще более общую формулу

$$T(s,t) = i(s-u)\sum_{j,e}{}' g_{j,e}(s,t)\, F_I(t)\, F_{II}(t).$$

где $\mathcal{N}$ – нормировочные множители:

$\mathcal{N}=2$, если частица является мезоном

$\mathcal{N}=3$, если частица является барионом

Докажем сейчас, что

$$\int \langle 0_{II}\, 0_{I} | e^{i(qx+q'x')} \widetilde{W}^{(I\,II)} e^{-i(px+p'x')} | 0_I\, 0_{II} \rangle dx\, dx' =$$

$$= \int \langle 0_{II}\, 0_{I} | e^{i(qx+q'x')} W^{(I\,II)} e^{-i(px+p'x')} | 0_I\, 0_{II} \rangle dx\, dx'. \qquad (49)$$

Ввиду (40) для этого достаточно доказать, что

$$\mathcal{N}^{(I)} \mathcal{N}^{(II)} \langle 0_{II}\, 0_I | \widetilde{V}^{(\alpha)}_{j,\ell} | 0_I\, 0_{II} \rangle =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ik(x-x')} F_I(k^2)\, F_{II}(k^2) (2\hat{p}_\alpha - k_\alpha)(2\hat{p}'_\alpha + k_\alpha) dk.$$

Для этого рассмотрим выражение

$$\langle 0_{II}\, 0_I | \widetilde{V}^{(\alpha)}_{j,\ell} | 0_I\, 0_{II} \rangle =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \langle 0_{II}\, 0_I | (P_{j,\alpha} e^{ikx_j} + e^{ikx_j} P_{j,\alpha})(P'_{\ell,\alpha} e^{-ikx'_\ell} + e^{-ikx'_\ell} P'_{\ell,\alpha}) | 0_I\, 0_{II} \rangle dk =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \langle 0_I | (P_{j,\alpha} e^{ikx_j} + e^{ikx_j} P_{j,\alpha}) | 0_I \rangle \langle 0_{II} | (P'_{\ell,\alpha} e^{-ikx'_\ell} + e^{-ikx'_\ell} P'_{\ell,\alpha}) | 0_{II} \rangle dk. \qquad (50)$$

Но $\quad P_{j,\alpha} = i g_{\alpha\alpha} \dfrac{\partial}{\partial x_{j,\alpha}}$; $\quad P'_{\ell,\alpha} = i g_{\alpha\alpha} \dfrac{\partial}{\partial x'_{\ell,\alpha}}$.

Поэтому $\quad \langle 0_I\, 0_I | \widetilde{V}^{(\alpha)}_{j,\ell} | 0_I\, 0_{II} \rangle =$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \langle 0_I | e^{ik(x+\xi_j)} (2P_{j,\alpha} - k_\alpha) | 0_I \rangle \langle 0_{II} | e^{-ik(x'+\xi'_\ell)} (2P'_{\ell,\alpha} + k_\alpha) | 0_{II} \rangle dk =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ik(x-x')} \langle 0_I | e^{ik\xi_j} (2P_{j,\alpha} - k_\alpha) | 0_I \rangle \langle 0_{II} | e^{-ik\xi'_\ell} (2P'_{\ell,\alpha} + k_\alpha) | 0_{II} \rangle dk$$

Таким образом, соотношение (49) будет доказано, если мы установим, что

$$\mathcal{N}^{(I)}\langle 0_I|e^{ik\xi_j}(2p_{j,\alpha}-k_\alpha)|0_I\rangle = F_I(k^2)(2\hat{p}_\alpha-k_\alpha)$$

$$\mathcal{N}^{(II)}\langle 0_{II}|e^{-ik\xi'_\ell}(2p'_{\ell,\alpha}+k_\alpha)|0_{II}\rangle = F_{II}(k^2)(2\hat{p}'_\alpha+k_\alpha). \tag{5I}$$

Видно, что достаточно убедиться в справедливости одного из этих соотношений, т.к. другое будет его прямым следствием. Докажем I-е из соотношений (5I). Здесь имеются 2 случая: I)- рассматриваемая частица является мезоном, 2)- частица является барионом. Для I-ого случая в обозначениях § I

$$\xi_j = \epsilon_j\xi\ , \quad 2p_{j,\alpha} = \hat{p}_\alpha + \epsilon_j\eta_\alpha$$

$$\eta_\alpha = i g_{\alpha\alpha}\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\ , \quad \epsilon_1 = 1\ , \ \epsilon_2 = -1$$

получим $\langle 0_I|e^{ik\xi_j}(2p_{j,\alpha}-k_\alpha)|0_I\rangle = \langle 0_I|e^{i\epsilon_j k\xi}(\hat{p}_\alpha - k_\alpha + \epsilon_j\eta_\alpha)|0_I\rangle =$

$$= \int\!\!\cdot\!\!\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\epsilon_j k\xi}\varphi(\xi^2)(\hat{p}_\alpha - k_\alpha + i\epsilon_j g_{\alpha\alpha}\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha})\varphi(\xi^2)\,d_4\xi =$$

$$= \int\!\!\cdot\!\!\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\xi}\varphi^2(\xi^2)\,d_4\xi\,(\hat{p}_\alpha - k_\alpha) + \frac{i}{2}\int\!\!\cdot\!\!\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\xi} g_{\alpha\alpha}\,\frac{\partial\varphi^2(\xi^2)}{\partial\xi_\alpha}\,d_4\xi =$$

$$= \int\!\!\cdot\!\!\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\xi}\varphi^2(\xi^2)\,d_4\xi\,(\hat{p}_\alpha - k_\alpha) - \frac{i}{2}g_{\alpha\alpha}\int\!\!\cdot\!\!\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(\xi^2)\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\,e^{ik\xi}\,d_4\xi =$$

$$= \int\!\!\cdot\!\!\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\xi}\varphi^2(\xi^2)\,d_4\xi\,(\hat{p}_\alpha - k_\alpha + \frac{k_\alpha}{2}) = F_I(k^2)(\hat{p}_\alpha - \frac{k_\alpha}{2}).$$

Отсюда

$$\mathcal{N}^{(I)} \langle 0_I | e^{ik\xi_j} (2P_{j,\alpha} - k_\alpha) | 0_I \rangle =$$

$$= 2 \langle 0_I | e^{ik\xi_j} (2P_{j\alpha} - k_\alpha) | 0_I \rangle = F_I(k^2)(2\hat{P}_\alpha - k_\alpha),$$

что доказывает (5I) для первого случая.

Для случаев барионов, учитывая симметрию основного состояния $|0_I\rangle$ по отношению к перестановкам между ξ_j, можно написать:

$$\mathcal{N}^{(I)} \langle 0_I | e^{ik\xi_j} (2P_{j,\alpha} - k_\alpha) | 0_I \rangle =$$

$$= 3 \langle 0_I | e^{ik\xi_1} (2P_{1,\alpha} - k_\alpha) | 0_I \rangle =$$

$$= 3 \langle 0_I | e^{i\sqrt{\frac{2}{3}} ky} \left(\frac{2}{3}\hat{P}_\alpha - k_\alpha + 2ig_{\alpha\alpha}\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right) | 0_I \rangle =$$

$$= (2\hat{P}_\alpha - 3k_\alpha) \int e^{i\sqrt{\frac{2}{3}} ky} \varphi^2(y^2+z^2)\, d_4y\, d_4z +$$

$$+ 2ig_{\alpha\alpha} 3\sqrt{\frac{2}{3}} \int e^{i\sqrt{\frac{2}{3}} ky} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \varphi^2(y^2+z^2)\, d_4y =$$

$$= \left(2\hat{P}_\alpha - 3k_\alpha + 2k_\alpha 3\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{2}\right) F_I(k^2) =$$

$$= (2\hat{P}_\alpha - k_\alpha) F_I(k^2).$$

Итак, (5I) доказано в обоих случаях и тем самым доказано соотношение (49). Следовательно, потенциал (48) приводит к той же борновской амплитуде T для упругого рассеяния частиц (47), что и потенциал W из формулы (38). Отметим, что потенциал $\widetilde{W}$ можно рассматривать как взаимодействие через кварковые токи. Действительно, подставляя в (48) выражение для 4-мерной δ-функции:

$$\delta(x_j - x'_l) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ik(x_j - x'_l)}dk,$$

получим

$$\widetilde{W} = i\sum_{j,l}\frac{G^{(I\,II)}_{j,l}\mathcal{N}^{(I)}\mathcal{N}^{(II)}}{(2\pi)^4}\int(\rho_j e^{ikx_j} + e^{ikx_j}\rho_j)(\rho'_l e^{-ikx'_l} + e^{-ikx'_l}\rho'_l)dk. \qquad (52)$$

Введем четырехмерные плотности тока j-го кварка выражениями

$$I_j(X) = \frac{\mathcal{N}}{2}\{\rho_j\,\delta(X - x_j) + \delta(X - x_j)\rho_j\}, \qquad (53)$$

откуда получим $\int I_j(X)\,dX = \mathcal{N}\rho_j$.

В случае мезона

$$\mathcal{N}\langle 0|\rho_j|0\rangle = 2\langle 0|\rho_j|0\rangle = 2\langle 0|\rho_1 + \rho_2|0\rangle = \hat{\rho},$$

а в случае бариона

$$\mathcal{N}\langle 0|\rho_j|0\rangle = 3\langle 0|\rho_j|0\rangle = \langle 0|\rho_1 + \rho_2 + \rho_3|0\rangle = \hat{\rho}.$$

Как видно, нормировочный коэффициент $\mathcal{N}$ выбран так, чтобы

$$\langle 0|\int I_j(X)dX|0\rangle = \hat{\rho}.$$

Рассмотрим фурье-компоненту от введенной четырехмерной плотности тока (53):

$$\mathcal{J}_j^{(I)}(k) = \int I_j^{(I)}(X)\, e^{ikX}\, dX = \frac{N^{(I)}}{2}\left(P_j\, e^{ikx_j} + e^{ikx_j} P_j\right). \tag{54}$$

Тогда (52) можно представить в виде

$$W^{(I,II)} = i \sum_{j,l}{}' G_{j,l}^{(I\,II)} \int \mathcal{J}_j^{(I)}(k)\, \mathcal{J}_l^{(II)}(-k)\, dk. \tag{55}$$

Но из (54) следует, что $\mathcal{J}_j^{(I)}(k)$, $\mathcal{J}_l^{(II)}(-k)$ будут пропорциональны соответственно e^{ikx} и $e^{-ikx'}$. С другой стороны, борновская амплитуда T упругого рассеяния частиц (I), (II), которые до соударения обладали импульсами p, p' , а после соударения q, q' , определяется матричным компонентом Фурье формы $\tilde{W}^{(I\,II)}$, стоящим при $e^{ik(x-x')}$,

$$k = p - q = q' - p'.$$

Таким образом, соответствующий оператор будет

$$i \frac{4}{(2\pi)^4} \sum_{j,l}{}' G_{j,l}^{(I,II)} \mathcal{J}_j^{(I)}(k)\, \mathcal{J}_l^{(II)}(-k). \tag{56}$$

В специальной системе отсчета, когда

$$k^0 = 0, \tag{57}$$

оператор (56), матричный элемент которого определяет форму амплитуды T, примет форму*):

$$i\frac{4}{(2\pi)^4}\sum_{j,e}{}' G_{j,e}^{(I,II)} \mathcal{J}_j^{(I)}(\vec{k})\, \mathcal{J}_e^{(II)}(-\vec{k}), \tag{58}$$

где $\mathcal{J}_j^{(I)}(\vec{k}) = \frac{N^{(I)}}{2}(\rho_j e^{-i\vec{k}\vec{x}_j} + e^{-i\vec{k}\vec{x}_j}\rho_j)$

$$\mathcal{J}_e^{(II)}(-\vec{k}) = \frac{N^{(II)}}{2}(\rho_e' e^{i\vec{k}\vec{x}_e'} + e^{i\vec{k}\vec{x}_e'}\rho_e')$$

или $\mathcal{J}_j^{(A)}(\vec{k}) = \int e^{-i\vec{k}\vec{X}} I_j^{(A)}(\vec{X})\, d\vec{X}$, $A = I, II$,

причем

$$I_j^{(I)}(\vec{X}) = \frac{N^{(I)}}{2}\{\rho_j\,\delta(\vec{X}-\vec{x}_j) + \delta(\vec{X}-\vec{x}_j)\rho_j\}$$

$$I_e^{(II)}(\vec{X}) = \frac{N^{(II)}}{2}\{\rho_e'\,\delta(\vec{X}-\vec{x}_e') + \delta(\vec{X}-\vec{x}_e')\rho_e'\}. \tag{59}$$

Как видно, операторы (59) могут рассматриваться как обычные трехмерные плотности кварковых токов.

Таким образом, в специальной системе отсчета (57) амплитуда T определяется соответствующим матричным элементом оператора (58), являющегося линейной комбинацией от произведений фурье-компонент трехмерных плотностей (59) кварковых токов. Выражения (59), однако построены по образцу плотностей токов скалярных частиц, какими, вероятно, нельзя считать кварки.

---

*) Если в выражении $\widetilde{W}$ заменить $G_{j,e}^{(I,II)}\,\delta(x_j - x_e')$ на

$$\Phi_{j,e}^{I,II}(s,(x_j-x_e')) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int g_{j,e}(s,\kappa^2)\, e^{i\kappa(x_j-x_e')} d\kappa$$

то выражение (58) преобразуется к виду

$$i\frac{4}{(2\pi)^4}\sum_{j,e}{}' g_{j,e}(s,-\vec{k}^2)\, \mathcal{J}_j^{(I)}(\vec{k})\, \mathcal{J}_e^{(II)}(-\vec{k}) \tag{58'}$$

Литература

1. В.А.Матвеев, А.Н.Тавхелидзе. Препринт ОИЯИ Е2-5141.
2. Н.Н.Боголюбов. Препринт ОИЯИ Р-2098,Дубна/1965/
3. Н.Н.Боголюбов. Препринт ОИЯИ Р-2186,Дубна/1965/
4. А.С.Давыдов. Квантовая механика,ГИФМЛ, М.,/1963/
5. J.J.J.Kokkedee. The quark model in particle physics. W.A.Benjamin, New York.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 марта 1971 года.