СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

P2 - 5662

Н.Н.Боголюбов и В.С.Владимиров

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ n -ТОЧЕЧНЫХ ФУНКЦИЙ

1971

P2-5662

Н.Н.Боголюбов и В.С.Владимиров

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ n -ТОЧЕЧНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Введение

В работе[1] Боголюбовым и Владимировым была доказана следующая

Теорема I. Пусть функция $f(z)$, $z = x + iy = (z^{(0)}, z^{(1)}, \dots, z^{(m)})$, есть преобразование Фурье–Лапласа обобщенных функций g^+ и g^- медленного роста, носители которых содержатся в замыкании световых конусов будущего и прошедшего соответственно. Пусть, далее, преобразования Фурье $F[g^{\pm}](x)$ совпадают при всех пространственно-подобных x. Тогда $f(z)$ представляется в виде конечной суммы

$$f(z) = \sum_{\ell} P_{\ell}(z)\phi_{\ell}(z^2), \quad z^2 = z^{(0)2} - z^{(1)2} - \dots - z^{(m)2}, \tag{1.1}$$

где P_{ℓ} – полиномы и функции $\phi_{\ell}(\zeta^2)$ в верхней полуплоскости ζ – являются преобразованием Фурье–Лапласа обобщенных функций медленного роста с носителем в $[0, \infty)$.

Представление (1.1) оказывается весьма полезным в аксиоматической квантовой теории поля, например: при доказательстве невозможности существования нетривиального полевого оператора, определенного и ограниченного в каждой точке пространства-времени (Вайтман[9]); при доказательстве так называемой "no-go" теоремы о невозможности приемлемой локальной бесконечнокомпонентной теории поля (Гродский и Стритер[10]); при выводе представления двухточечной функции локальных бесконечнокомпонентных полей для перенормируемых теорий (Оксак и Тодоров[11]).

Стритером[2] было высказано предположение о существовании представления, аналогичного (1.1), и в случае функций, зависящих от n 4-векторов (n –точечных функций). Три автора – Брос, Эпштейн и Глазер – доказали это предположение в работе[3] (теорема 2). Их доказательство, существенно опирающееся на теорию представлений групп Ли, довольно сложно. Кроме того, при использовании теоремы Хеппа[21,22] о глобальной структуре модуля голоморфных тензорных полей над кольцом $L_+(C)$ – инвариантных функций, голоморфных в n –точечной расширенной трубе τ_n', необходимо, чтобы τ_n' была областью голоморфности. Этот факт весьма вероятен, но в общем виде пока не доказан; во всяком случае установлено, что τ_n' есть область голоморфности при $m=1$, $n=1,2,\ldots$; $n=1$, $m=1,2,\ldots$ и $1\le m\le 3$, $1\le n\le 4$ (см.[16], гл. IV).

В этой работе, используя некоторые идеи работы[3], мы даем новое, достаточно простое, доказательство теоремы I. Кроме того, для n –точечных функций (от $(m+1)$– векторов) мы устанавливаем следующее уточнение теоремы 2 трех авторов[3].

Т е о р е м а II. Пусть расширенная труба τ_n' есть область голоморфности. Пусть n –точечная функция $f(Z)$, $Z=(z_1,\ldots,z_n)$, есть преобразование Фурье–Лапласа обобщенных функций g^+ и g^- медленного роста, носители которых содержатся в замыкании n –точечных световых конусов будущего и прошедшего соответственно. Пусть, далее, преобразования Фурье $F[g^\pm]$ совпадают в точках Йоста J_n. Тогда $f(Z)$ представляется в виде конечной суммы

$$f(Z)=\sum_{\ell} P_\ell(Z)\,f_\ell(Z), \tag{1.2}$$

где P_ℓ – полиномы и функции f_ℓ –обладают теми же свойствами, что и функция f, и, сверх того, голоморфны и $L_+(C)$ –инвариантны в τ_n'.

В §3 будет установлено, что теорема II при $n=1$ эквивалентна теореме I.

Для доказательства теоремы II предварительно (см. §5) мы устанавливаем, что функция $f(Z)$ голоморфна и однозначна в τ_n' и удовлетворяет системе m дифференциальных уравнений

$$A_j(A_j^2-1)\ldots(A_j^2-p^2)\,f(Z)=0,\quad j=1,\ldots,m \tag{1.3}$$

при некотором целом p (зависящем только от f); здесь операторы A_j определены формулой (2.2).

При $n=1$ в §6 удается построить общее решение системы уравнений (1.3) в рассматриваемом классе функций и тем самым непосредственно получить доказательство[x] теоремы I . Более того, среди представлений (1.1) мы выделяем такое представление (6.12), для которого функции f_ℓ определяются однозначно по функции f и это соответствие линейно и непрерывно (в надлежащем смысле).

В случае произвольного n мы показываем в §7, что функция f принадлежит некоторому конечномерному инвариантному пространству представления группы $L_+(C)$. Это пространство образует модуль над кольцом $L_+(C)$ – инвариантных функций, удовлетворяющих условиям теоремы II . Далее, предполагая, что τ'_n есть область голоморфности, и применяя теорему Хеппа[21,22], получим представление (1.2) с функциями f_ℓ, голоморфными и $L_+(C)$ – инвариантными в τ'_n . Наконец, с помощью леммы 5, §4 заключаем, что f_ℓ удовлетворяет всем условиям теоремы II.

Заметим, что $(n+1)$ –точечные функции Вайтмана (без предположения лоренцевой ковариантности) в относительных переменных являются граничными значениями n –точечных функций (см.[16–18]). Поэтому теорема II указывает на сильную связь между аксиомами локальной коммутативности, трансляционной инвариантности, спектральности и лоренцевой ковариантности теории.

Замечание 1. Представление (1.1) эквивалентно представлению

$$f(z) = \sum_\ell Q_\ell(z)\left(\Delta_\ell(\lambda), \frac{1}{\lambda - z^2}\right), \tag{1.4}$$

где Q_ℓ – полиномы и Δ_ℓ – обобщенные функции из $\mathfrak{D}'_{L_2}$, обращающиеся в нуль при $\lambda<0$. Отметим, что представление (1.4) следует также из более общего интегрального представления Йоста–Лемана–Дайсона (см.[7,8,4]).

---

[x] Интересно было бы обобщить этот метод на случай $n>1$.

Замечание 2. Утверждения теоремы II сохраняются, если область J_n заменить на меньшую, но такую, что ее выпуклая оболочка относительно времени-подобных кривых (в смысле n -точечного светового конуса) совпадает с J'_n (в силу теоремы о C -выпуклой оболочке, см./4/, § 28). Например, при $n=1$ в качестве такой области можно взять $-\ell_1^2 < x^2 < -\ell_2^2$.

Замечание 3. Если в теореме I множество $x^2 < 0$ заменить на $x^2 < a^2$, то в представлении (1.1) функции $\phi_\ell(w)$, $w=\zeta^2$, будут голоморфными в плоскости w с разрезом $w=\rho$, $\rho \geq a^2$.

§2. *Обозначения и предварительные сведения*

Обозначаем: $z_k = (z_k^{(0)}, z_k^{(1)}, \ldots, z_k^{(m)}) = (z_k^{(0)}, \mathbf{z}_k)$ – точки C^{m+1}, $z_1 = z$;

$Z = X + iY = (z_1, \ldots, z_n)$ – точки из $C^{n(m+1)}$; $|Z|^2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{m} |z_k^{(j)}|^2$ – евклидов квадрат в $C^{n(m+1)}$; $z^2 = z^{(0)2} - z^{(1)2} - \ldots - z^{(m)2}$ – лоренцев квадрат в C^{m+1}; $z^{a} = z^{(0)a_0} z^{(1)a_1} \ldots z^{(m)a_m}$, $a = (a_0, a_1, \ldots a_m)$ – мультииндекс; $D^a = \dfrac{\partial^{|a|}}{\partial x^{(0)a_0} \partial x^{(1)a_1} \ldots \partial x^{(m)a_m}}$ – производная порядка a, $|a| = a_0 + \ldots + a_m$;

$V^+ = [y: y^{(0)} > 0, y^2 > 0] = -V^-$ – световой конус будущего в R^{n+1};

$V_n^+ = V^+ \times \ldots \times V^+ = -V^-$ – n -точечный световой конус будущего;

$\tau_n^+ = R^{n(m+1)} + iV_n^+ = -\tau_n^-$ – n -точечная трубчатая область будущего;

$\tau'_n = \bigcup_{\Lambda \in L_+(C)} \Lambda \tau_n^+$ – n – точечная расширенная труба; $\tau_1^+ = \tau^+$, $\tau'_1 = \tau'$;

как известно, $\tau' = [z : z^2 \neq \rho, \ \rho \geq 0]$; $L_+(C)$ – комплексная собственная группа Лоренца в C^{m+1}; элементы Λ группы $L_+(C)$ действуют на n -точки $Z \in C^{n(m+1)}$ по правилу

$$\Lambda Z = (\Lambda z_1, \ldots, \Lambda z_n).$$

Однопараметрическую абелеву времени-подобную подгруппу группы $L_+(C)$, состоящую из всех комплексных лоренцевых поворотов

$$[\lambda]_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\lambda+\frac{1}{\lambda}) & \frac{1}{2}(\lambda-\frac{1}{\lambda}) & \\ \frac{1}{2}(\lambda-\frac{1}{\lambda}) & \frac{1}{2}(\lambda+\frac{1}{\lambda}) & 0 \\ & 0 & I \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq 0, \tag{2.1}$$

в плоскости (0,1), обозначим через L^1_+ ; аналогичный смысл имеют и обозначения $[\lambda]_j$ и L^j_+ .

Заметим, что всякий комплексный евклидов поворот в плоскости (1,2) (т.е. линейное преобразование, сохраняющее форму $z^{(1)2} + z^{(2)2}$) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\lambda+\frac{1}{\lambda}) & -\frac{i}{2}(\lambda-\frac{1}{\lambda}) \\ -\frac{i}{2}(\lambda-\frac{1}{\lambda}) & \frac{1}{2}(\lambda+\frac{1}{\lambda}) \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq 0 .$$

Поэтому всякий комплексный лоренцев поворот $[\lambda]_{jk}$ в плоскости (j,k) выражается через комплексные лоренцевы повороты в плоскостях $(0,j)$ и $(0,k)$ по формуле

$$[\lambda]_{jk} = [i]_j [\lambda]_k [-i]_j \quad , \quad j,k=1,\dots,m . \tag{2.2}$$

Обозначим эту однопараметрическую абелеву подгруппу группы $L_+(C)$ через L^{jk}_+ .

Инфинитезимальные операторы A_j , $j=1,\dots,m$, соответствующие преобразованиям $f(Z) \to f([\lambda]_j Z)$, имеют вид:

$$A_j = \sum_{k=1}^{n} \left(z^{(0)}_k \frac{\partial}{\partial z^{(j)}_k} + z^{(j)}_k \frac{\partial}{\partial z^{(0)}_k} \right). \tag{2.3}$$

Пусть C -выпуклый открытый острый конус в R^N с вершиной в 0. Обозначим через $H(C)$ алгебру, состоящую из всех функций $f(Z)$, голоморфных в трубчатой области $\mathbf{R}^N + iC$ и удовлетворяющих следующему условию роста: для любого подконуса C', компактного[x] в конусе C, существует число $M(C')$, такое, что справедливо неравенство

$$|f(Z)| \le M(C')(1+|z|)^p(1+|y|^{-p}), \quad z \in \mathbf{R}^N + iC', \tag{2.4}$$

при некотором (целом) $p \ge 0$ (зависящем только от f). Обозначим через $H_p(C)$ совокупность функций, голоморфных в $\mathbf{R}^N + iC$ и удовлетворяющих оценке (2.4) для любого $C' \Subset C$. Топологию в $H_p(C)$ введем в соответствии с (2.4) с помощью счетной системы норм

$$\|f\|_\ell^{(p)} = \sup_{z \in \mathbf{R}^N + iC_\ell} \frac{|f(z)|}{(1+|z|)^p(1+|y|^{-p})}, \quad \ell = 1, 2, \ldots, \tag{2.5}$$

где $C_1 \Subset C_2 \Subset \ldots$, -выпуклые конуса, $\bigcup_\ell C_\ell = C$; $H_p(C)$ - пространства Фреше. Алгебру $H(C)$ мы наделяем топологией строгого индуктивного предела (объединения) возрастающей последовательности пространств: $H_p(C)$, $p=0,1,\ldots$ (см./19/).

Если $f \in H(C)$, то в пространстве $\mathcal{S}'$ обобщенных функций медленного роста существует граничное значение $f(x) = \lim f(x+iy)$, $y \to 0$, $y \in C$ (см./4/, §26). Алгебра $H(C)$ изоморфна (алгебраически и топологически) сверточной алгебре $\mathcal{S}'(C^*)$ - обобщенных функций медленного роста из $\mathcal{S}'$ с носителем в конусе C^*, сопряженном к C, причем этот изоморфизм осуществляется операцией преобразования Фурье-Лапласа (см./12,4/).

Функции f из алгебры $H(V_n^+)$ во всей области τ_n^+ удовлетворяют оценке (см./3/)

$$|f(Z)| \le C \prod_{k=1}^{n} |z_k^2|^N \left[1 + \frac{1}{\min_k (y_k^{(0)} - |y_k|)}\right]^M \tag{2.6}$$

---

[x] Т.е. $\bar{C}' \subset C \cup \{0\}$; при этом пишем $C' \Subset C$.

при некоторых $C \geq 0$ и целых $N \geq 0$ и $M \geq 0$ (зависящих только от f). Алгебру функций, голоморфных (и однозначных) в расширенной трубе τ'_n и принадлежащих алгебрам $H(V_n^+)$ и $H(V_n^-)$ обозначим через $H(\tau'_n)$; $H(\tau'_1)=H(\tau')$. Алгебру $H(\tau'_n)$ мы наделяем топологией строго индуктивного предела возрастающей последовательности пространств Фреше $H_p(\tau'_n)$, $p=0,1,\ldots$ [x/]; счётно-нормированное пространство $H_p(\tau'_n)$ состоит из функций f, голоморфных в τ'_n с нормами $\|f\|_\ell^{(p)}+\|\hat{f}\|_\ell^{(p)}$, $\ell=1,2,\ldots$; здесь $\hat{f}(Z)=f(-Z)$ и $\|f\|_\ell^{(p)}$ – нормы (2.5), соответствующие алгебре $H(V_n^+)$.

§3. Эквивалентность теорем I и II при $n=1$

Докажем, что теорема I и теорема II при $n=1$ эквивалентны. Так как $\tau'=[z: z^2 \neq \rho, \rho>0]$ есть область голоморфности и пространственно-подобные точки $x^2<0$ суть точки Йоста при $n=1$, то условия теорем I и II одинаковы.

Докажем, что из представления (1.2) при $n=1$ следует представление (1.1). В силу теоремы Баргмана-Холла-Вайтмана[14] из свойств функций $f_\ell(z)$ при $n=1$ следует существование функций $\phi_\ell(\zeta^2)$, голоморфных в плоскости $w=\zeta^2$ с разрезом $w=\rho$, $\rho \geq 0$, таких, что $f_\ell(z)=\phi_\ell(z^2)$. Полагая в этих равенствах $z=(\zeta,0)$, убеждаемся, что функции $\phi_\ell(\zeta^2)=$ $=f_\ell(\zeta,0)$ принадлежат алгебре $H(0,\infty)$, что и требовалось (см. §2).

Докажем обратное: из представления (1.1) следует представление (1.2) при $n=1$. Так как функции $\phi_\ell(\zeta^2)$ принадлежат алгебре $H(0,\infty)$ (см. §2), то функции $\phi_\ell(w)$, $w=\zeta^2$, голоморфны в плоскости w с разрезом $w=\rho$, $\rho \geq 0$ и в силу (2.5) (при $n=1$, $m=0$) удовлетворяют оценке

$$|\phi_\ell(w)|<C|w|^N\left(1+\frac{1}{\operatorname{Im}\sqrt{w}}\right)^M=C|w|^N\left(1+\sqrt{\frac{2}{|w|-\operatorname{Re} w}}\right)^M.$$

[x/] В §5 будет доказана полнота пространств $H_p(\tau'_n)$.

Таким образом, функции $f_\ell(z)=\phi_\ell(z^2)$ голоморфны в τ', $L_+(C)$ – инвариантны и в τ^+ и τ^- удовлетворяют оценке

$$|f_\ell(z)| \leq C|z^2|^N\left(1+\sqrt{\frac{2}{|z^2|-\operatorname{Re} z^2}}\right)^M. \tag{3.1}$$

Докажем оценку

$$|z^2| - \operatorname{Re} z^2 \geq \frac{2y^2}{1+|z^2|}, \quad z\in\tau^+. \tag{3.2}$$

Пусть $x^2 \leq 0$; тогда

$$|z^2| - \operatorname{Re} z^2 = \sqrt{(x^2-y^2)^2+4(x,y)^2} - x^2+y^2 \geq 2y^2 \geq \frac{2y^2}{1+|z^2|}. \tag{3.3}$$

Если же $x^2>0$, то, считая для определенности $x^{(0)}>0$ (что не ограничивает общности) и обозначая $t=x^2-y^2$, так что

$$x^{(0)}=\sqrt{t+|\mathbf{x}|^2+y^2}, \quad (x,y) \geq y^{(0)}\sqrt{t+|\mathbf{x}|^2+y^2}-|\mathbf{x}||\mathbf{y}|>0,$$

получим

$$|z^2| - \operatorname{Re} z^2 \geq \sqrt{t^2+4\left(y^{(0)}\sqrt{t+|\mathbf{x}|^2+y^2}-|\mathbf{x}||\mathbf{y}|\right)^2} - t. \tag{3.4}$$

Пусть $x^2 \leq y^2$, т.е. $-y^2<t\leq 0$. Так как правая часть в неравенстве (3.4) монотонно убывает при $t\leq 0$, то

$$|z^2| - \operatorname{Re} z^2 \geq 2\left(y^{(0)}\sqrt{|\mathbf{x}|^2+y^2}-|\mathbf{x}||\mathbf{y}|\right) \geq$$

$$\geq \inf_{r>0} 2\left(y^{(0)}\sqrt{r^2+y^2}-r|\mathbf{y}|\right) = 2y^2 \geq \frac{2y^2}{1+|z^2|}. \tag{3.5}$$

Осталось рассмотреть случай $x^2>y^2$, т.е. $t>0$:

$$|z^2| - \mathrm{Re}\, z^2 = \frac{|z^2|^2 - (\mathrm{Re}\, z^2)^2}{|z^2| + \mathrm{Re}\, z^2} \geq 2\, \frac{(x,y)^2}{|z^2|} \geq$$

$$\geq \frac{2}{|z^2|}\, (y^{(0)} \sqrt{t + |x|^2 + y^2} - |x||y|)^2 \geq \tag{3.6}$$

$$\geq \frac{2}{|z^2|}\, (y^{(0)} \sqrt{|x|^2 + y^2} - |x||y|) \geq \frac{2y^2}{|z^2|} \geq \frac{2y^2}{1 + |z^2|}\, .$$

Из оценок (3.3), (3.5) и (3.6) следует оценка (3.2). Из оценок (3.2) и (3.1) вытекает, что $f_\ell \in H(V^+) \cap H(V^-)$, так что $f_\ell \in H(\tau')$.

Таким образом, эквивалентность теорем I и II (при $n = 1$) доказана.

§4. *Пять лемм*

Для дальнейшего нам понадобятся следующие пять лемм.

Лемма 1. Пусть функция $\phi(\lambda)$ голоморфна в $C^1 \setminus \{0\}$ и удовлетворяет оценке

$$|\phi(\lambda)| \leq C\, \frac{1 + |\lambda|^a}{|\tau|^\beta}\, , \quad \lambda = \sigma + i\tau\, . \tag{4.1}$$

Тогда $\phi(\lambda)$ единственным образом представляется в виде

$$\phi(\lambda) = \sum_{-[\beta] \leq \nu \leq [a]} c_\nu \lambda^\nu\, . \tag{4.2}$$

Доказательство. (см.[3,12]). Единственность представления (4.2) очевидна. Оценка (4.1) обеспечивает существование граничных значений $\phi_+(\sigma)$ у функции $\phi(\lambda)$ при $\tau \to \pm 0$ в смысле сходимости в S' (см. §2). Поскольку функция $\phi(\lambda)$ голоморфна всюду, кроме точки $\lambda = 0$, то $\phi_+(\sigma) - \phi_-(\sigma) = 0$, $\sigma \neq 0$. Отсюда следует, что при некотором целом $N \geq 0$

$$\sigma^N [\phi_+(\sigma) - \phi_-(\sigma)] = 0. \tag{4.3}$$

Далее, функция $\phi_1(\lambda) = \lambda^N \phi(\lambda)$ голоморфна в $C^1 \setminus \{0\}$ и удовлетворяет оценке типа (4.1). Следовательно, в полуплоскости $\tau > 0$ ($\tau < 0$) она есть преобразование Фурье-Лапласа $g_+ \in \mathcal{S}'([0, \infty))$ (соответственно $g_- \in \mathcal{S}'((-\infty, 0]))$. В силу (4.3) граничные значения функции ϕ_1 совпадают, и потому $g_+ = g_-$, откуда следует, что $\operatorname{supp} g_+ = \operatorname{supp} g_- \subset \{0\}$. Таким образом, $g_+(\xi)$ есть линейная комбинация $\delta^{(\nu)}(\xi)$ и, стало быть, ϕ_1 есть полином (ср./5/). Но тогда $\phi(\lambda)$ представляется в виде

$$\phi(\lambda) = \lambda^{-N} \sum_{\nu=0}^{M} c'_\nu \lambda^\nu .$$

Отсюда и из оценки (4.1) следует представление (4.2) при $M = [\alpha]$ и $N = [\beta]$. Лемма доказана.

Лемма 2. Для того чтобы область $D \subset C^{n(m+1)}$ была $L_+(C)$ – инвариантной, необходимо и достаточно, чтобы она была инвариантной относительно времени-подобных подгрупп L_+^j, $j = 1, \dots, m$.

Доказательство (ср./2/). Необходимость очевидна, докажем достаточность. Из (2.2) следует, что область D инвариантна относительно всех однопараметрических подгрупп L_+^j, L_+^{jk} группы $L_+(C)$. Следовательно, D инвариантна и относительно всей группы $L_+(C)$. Лемма доказана.

Лемма 3. Для того чтобы функция $f(Z)$, голоморфная в $L_+(C)$ – инвариантной области $D \subset C^{n(m+1)}$, была $L_+(C)$ – инвариантной, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла уравнениям

$$A_j f(Z) = 0, \quad j = 1, \dots, m. \tag{4.5}$$

Доказательство. Необходимость условий (4.5) очевидна. Докажем их достаточность. Из обращения в нуль операторов A_j на функции $f(Z)$

следует, что эта функция инвариантна относительно однопараметрических подгрупп L_+^j , т.е.

$$f([\lambda]_j Z) = f(Z), \quad j = 1, \dots, m .$$

Отсюда и из (2.9) заключаем, что функция $f(Z)$ инвариантна относительно всех однопараметрических подгрупп L_+^j и L_+^{jk} группы $L_+(C)$ и, следовательно, $f(Z)$ – $L_+(C)$ – инвариантна. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области $\mathbf{R}^N + iC$, где C – острый выпуклый конус, и $P(z) \not\equiv 0$ – полином, такой, что $Pf \in H(C)$. Тогда $f \in H(C)$ и отображение $f \to Pf$ имеет непрерывное обратное в $H(C)$.

Доказательство. В работе /23/ Хёрмандер доказал следующий результат: для данного полинома $P \not\equiv 0$ найдутся числа $m \geq 0$ – целое и $K > 0$, такие, что для любой функции $\phi \in C^m(R^{2N})$ справедливо неравенство

$$|\phi(x,y)| \leq K \sup_{\substack{(x,y) \\ |\alpha| \leq m}} (1 + |z|)^m |D^\alpha [P(z)\phi(x,y)]| . \tag{4.6}$$

По условию $Pf \in H(C)$ и, следовательно, найдется такое целое число $p \geq 0$, что $D^\alpha(Pf) \in H_p(C)$, $|\alpha| \leq m$.

Пусть $C_1 \subset\subset C_2 \subset\subset \dots$, $\bigcup_\ell C_\ell = C$, – конуса, фигурирующие в определении топологии в пространстве $H_p(C)$ (см. §2). Фиксируем произвольное целое $\ell \geq 1$. Пусть $y_0 \in C_\ell$. Обозначим через $d(y_0)$ расстояние от конуса $y_0 + C_\ell$ до границы $\partial C_{\ell+1}$ конуса $C_{\ell+1}$, так что

$$d(y_0) = \inf_{\substack{y \in y_0 + C_\ell \\ y' \in \partial C_{\ell+1}}} |y - y'| = \inf_{y' \in \partial C_{\ell+1}} |y_0 - y'| \geq |y_0| \inf_{\substack{y'' \in C_\ell, |y''| = 1 \\ y' \in \partial C_{\ell+1}}} |y'' - y'| \geq \sigma_\ell |y_0| . \tag{4.7}$$

Выберем функцию $\eta(y) \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$, равную 1 на конусе $\bar{C}_\ell + y_0$, обращающуюся в нуль вне конуса $C_{\ell+1}$ и такую, что

$$|D^{\alpha}\eta(y)| \le \frac{C_{\alpha}^{(\ell)}}{d(y_0)^{|\alpha|}} . \tag{4.8}$$

Введем теперь функцию $\phi_{y_0} \in C^{\infty}(\mathbf{R}^{2N})$ по формуле

$$\phi_{y_0}(x,y) = \frac{f(z)\eta(y)}{(1+|z|^2)^{\frac{m+p}{2}}\sqrt{1+|y|^{-2p}}}$$

и применим к ней неравенство (4.6):

$$|\phi_{y_0}(x,y)| \le K \sup_{\substack{(x,y)\\ |\alpha|\le m}} (1+|z|)^m \left| D^{\alpha}\left[\frac{P(z)f(z)\eta(y)}{(1+|z|^2)^{\frac{m+p}{2}}\sqrt{1+|y|^{-2p}}}\right]\right| \le$$

$$\le K_{\ell} \sup_{\substack{x\in R^N,\ v\in C_{\ell+1}\\ |\alpha|+|\beta|\le m}} \left|\frac{D^{\alpha}[P(z)f(z)]}{(1+|z|^2)^{\frac{p}{2}}\sqrt{1+|v|^{-2p}}}\right| |D^{\beta}\eta(y)| ,$$

где число K_{ℓ} не зависит от x,y и y_0. Учитывая оценки (4.8) и (4.7), продолжим наши оценки

$$|\phi_{y_0}(x,y)| \le K'_{\ell}\left(1+\frac{1}{|y_0|^m}\right) \max_{|\alpha|\le m} \| D^{\alpha}(Pf)\|_{\ell+1}^{(p)} ,$$

откуда при всех $x\in \mathbf{R}^N$, $y\in \bar{C}_{\ell}+y_0$ и $y_0\in C_{\ell}$ получаем

$$|f(z)| \le K'_{\ell}\left(1+\frac{1}{|y_0|^m}\right) \max_{|\alpha|\le m} \| D^{\alpha}(Pf)\|_{\ell+1}^{(p)} (1+|z|^2)^{\frac{m+p}{2}}\sqrt{1+|y|^{-2p}} .$$

Полагая в этом неравенстве $y=y_0$, заключаем, что

$$\| f\|_{\ell}^{(m+p)} \le K''_{\ell} \max_{|\alpha|\le m} \| D^{\alpha}(Pf)\|_{\ell+1}^{(p)} , \quad \ell = 1,2,\dots .$$

Полученное неравенство означает, что $f\in H(C)$ и что операция $f\to Pf$ в $H(C)$ имеет непрерывную обратную, если учесть, что оператор D^{α} непрерывен в $H(C)$. Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть функция $f \in H(\tau_n')$ и однородна степени $\nu \gtrless 0$ при преобразованиях $[\lambda]_j$

$$f([\lambda]_j Z) = \lambda^{\nu} f(Z), \quad Z \in \tau_n' . \tag{4.9}$$

Тогда при каждом $k = 1, \dots, n$ она представляется в виде

$$\left.\begin{aligned} f(Z) &= (z_k^{(0)} + z_k^{(j)})^{\nu} f_k^{+}(Z), \quad \nu > 0, \\ f(Z) &= (z_k^{(0)} - z_k^{(j)})^{|\nu|} f_k^{-}(Z), \quad \nu < 0, \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

где функции $f_k^{\pm} \in H(\tau_n')$ и L_+^j -инвариантны.

Доказательство. Рассмотрим случай $\nu > 0$. Функция $(z_k^{(0)} - z_k^{(j)})^{\nu}$ однородна степени $-\nu$ при преобразованиях $[\lambda]_j$, так что функция

$$F_k^{+}(Z) = (z_k^{(0)} - z_k^{(j)})^{\nu} f(Z) \tag{4.11}$$

принадлежит $H(\tau_n')$ и L_+^j -инвариантна. Поэтому F_k^+, делясь на $(z_k^{(0)} - z_k^{(j)})^{\nu}$, делится и на $(z_k^{(0)2} - z_k^{(j)2})^{\nu}$ и, стало быть, функция

$$f_k^{+}(Z) = (z_k^{(0)2} - z_k^{(j)2})^{-\nu} F_k^{+}(Z) \tag{4.12}$$

голоморфна в τ_n' и L_+^j -инвариантна. Но тогда по лемме 4 $f_k^+ \in H(V_n^+) \cap H(V_n^-)$, т.е. $f_k^+ \in H(\tau_n')$. Из (4.12) и (4.11) следует представление (4.10) при $\nu > 0$. Случай $\nu < 0$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

§5. Теорема III и ее доказательство

Теорема III. Пусть функция $f(Z)$ принадлежит алгебрам $H(V_n^+)$ и $H(V_n^-)$ и голоморфна в точках Йоста J_n. Тогда $f(Z)$ допускает однозначное голоморфное продолжение в расширенную трубу τ_n' и при каждом $j = 1, \dots, m$ единственным образом представляется в виде

$$f(Z) = \sum_{-q\le\nu\le p} f_{j\nu}(Z), \tag{5.1}$$

где функции $f_{j\nu}$ *принадлежат* $H(\tau'_n)$ *и однородны степени* ν *при преобразовании* $[\lambda]_j$,

$$f_{j\nu}([\lambda]_j Z) = \lambda^{\nu} f_{j\nu}(Z), \quad Z \in \tau'_n . \tag{5.2}$$

При этом функции $f_{j\nu}$ *выражаются через функцию* f *по формуле*

$$f_{j\nu}(Z) = \sum_{1\le\ell\le p+q+1} C_{j\nu\ell} f([\ell]_j \cdot Z), \quad Z \in \tau'_n . \tag{5.3}$$

Здесь $p \ge 0$ *и* $q \ge 0$ *– некоторые целые числа*[x/] *(зависящие только от* f *);* $C_{j\nu\ell}$ *– постоянные числа.*

Доказательство. Точки Йоста J_n совпадают с вещественным сечением расширенной трубы τ'_n , т.е. это такие точки $X = (x_1, \dots, x_n)$, что $(\sum_k \lambda_k x_k)^2 < 0$ при всех $\lambda_k \ge 0$, $\sum_k \lambda_k = 1$ (см./15,16/). Пусть I_n – (открытое) множество, состоящее из тех точек $X \in J_n$, для которых ${x_k^{(0)}}^2 < {x_k^{(j)}}^2$ при всех $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$.

Рассмотрим функции

$$\phi_j(\lambda) = f([\lambda]_j X), \quad j = 1, \dots, m . \tag{5.4}$$

Докажем, что $\phi_j(\lambda)$ голоморфны в $C^1 \setminus \{0\}$ и удовлетворяют оценке (4.1) с α и β , не зависящими от $X \in I_n$.

Действительно, если $\lambda \ne 0$ вещественно, то $[\lambda]_j X \in J_n$ и потому $\phi_j(\lambda)$ голоморфны при вещественных $\lambda \ne 0$. Если $\lambda = \sigma + i\tau$, $\tau \ne 0$, то при всех $k = 1, \dots, n$

---

x/ Без ограничения общности числа p и q можно считать равными.

$$
\operatorname{Im}[\lambda]_1 x_k = \begin{pmatrix} \frac{\tau}{2}\left(1-\frac{1}{|\lambda|^2}\right)x_k^{(0)} + \frac{\tau}{2}\left(1+\frac{1}{|\lambda|^2}\right)x_k^{(1)} \\ \frac{\tau}{2}\left(1+\frac{1}{|\lambda|^2}\right)x_k^{(0)} + \frac{\tau}{2}\left(1-\frac{1}{|\lambda|^2}\right)x_k^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (5.5)
$$

так что

$$
(\operatorname{Im}[\lambda]_1 x_k)^{(0)} \neq 0, \quad (\operatorname{Im}[\lambda]_1 x_k)^2 = \frac{\tau^2}{|\lambda|^2}\left(x_k^{(1)^2} - x_k^{(0)^2}\right) > 0 . \qquad (5.6)
$$

Неравенства (5.6) означают, что $[\lambda]_1 x_k$ и, стало быть, $[\lambda]_j x_k \in \tau^+ \cup \tau^-$ и поэтому $[\lambda]_j X = \tau_n^+ \cup \tau_n^-$. Таким образом, функции $\phi_j(\lambda)$ голоморфны при $\tau \neq 0$. Оценим эти функции. Принимая во внимание (5.5), (5.6) и оценку (2.6), получим при $\tau \neq 0$

$$
|\phi_j(\lambda)| = |f([\lambda]_j X)| \leq C \prod_{k=1}^{n} |([\lambda]_j x_k)^2|^N [1 +
$$

$$
+ \max_k \frac{|(\operatorname{Im}[\lambda]_j x_k)^{(0)}| + |(\operatorname{Im}[\lambda]_j x_k)^{(j)}|}{(\operatorname{Im}[\lambda]_j x_k)^2}]^M \leq
$$

$$
\leq C \prod_{k=1}^{n} |x_k^2|^N [1 + \frac{1+|\lambda|^2}{|\tau|} \max_k \frac{|x_k^{(j)}| + |x_k^{(0)}|}{x_k^{(j)2} - x_k^{(0)2}}]^M ;
$$

этим оценка (4.1) доказана при $\alpha = 2M$ и $\beta = M$.

Применяя лемму 1 к функциям $\phi_j(\lambda)$ и пользуясь (5.4), получим (единственное) представление для функций

$$
f([\lambda]_j X) = \sum_{-q \leq \nu \leq p} f_{j\nu}(X)\lambda^{\nu}, \qquad (5.7)
$$

где $p=2M$, $q=M$ и $f_{j\nu}$ – некоторые функции, определенные на I_n. Полагая в равенстве (5.7) $\lambda=\ell=1,2,\ldots$, $p+q+1$, для функций $f_{j\nu}$, $-q\le\nu\le p$, получим m систем линейных алгебраических уравнений порядка $p+q+1$,

$$\sum_{-q\le\nu\le p} \ell^{\nu} f_{j\nu}(X)=f([\ell]_j X), \quad \det(\ell^{\nu})\neq 0.$$

Поэтому

$$f_{j\nu}(X)=\sum_{1\le\ell\le p+q+1} C_{j\nu\ell}\, f([\ell]_j X), \quad X\in I_n. \tag{5.8}$$

Замечая, что функции $f([\ell]_j Z)$ голоморфны в области $D=\tau_n^{+}\cup\tau_n^{-}\cup\tilde{J}_n$, где $\tilde{J}_n$ (комплексная) окрестность J_n, и принадлежат алгебрам $H(V_n^{+})$ и $H(V_n^{-})$, из равенств (5.8) заключаем, используя принцип голоморфного продолжения (см./4/, стр. 54), что функции $f_{j\nu}(X)$ допускают голоморфное (и однозначное) продолжение $f_{j\nu}(Z)$ на область D и принадлежат алгебрам $H(V_n^{+})$ и $H(V_n^{-})$.

Из сказанного следует, что равенства (5.7) и (5.8) дают голоморфное продолжение функций f и $f_{j\nu}$ на область $L_+^j D$ по формулам

$$f([\lambda]_j Z)=\sum_{-q\le\nu\le p} f_{j\nu}(Z)\lambda^{\nu}, \tag{5.9}$$

$$f_{j\nu}(Z)=\sum_{1\le\ell\le p+q+1} C_{j\nu\ell}\, f([\ell]_j Z). \tag{5.10}$$

Полагая в (5.9) $\lambda=1$, получим представления (5.1) в областях $L_+^j D$. Докажем, что функции $f_{j\nu}$, а, значит, и функция f однозначны в $L_+^j D$. Заменяя в равенстве (5.9) λ на $\lambda\mu$, получим

$$f([\lambda\mu]_j Z)=\sum_{-q\le\nu\le p} f_{j\nu}(Z)\lambda^{\nu}\mu^{\nu}=f([\mu]_j[\lambda]_j Z)=$$

$$=\sum_{-q\le\nu\le p} f_{j\nu}([\lambda]_j Z)\mu^{\nu},$$

откуда следует в силу единственности разложения (5.9), что функции $f_{j\nu}$ удовлетворяют в L^j_+D условию однородности (5.2). Но тогда $f_{j\nu}$ однозначны в L^j_+D, ибо если $[\lambda]_j Z = [\lambda']_j Z'$, $\lambda \neq 0$, $\lambda' \neq 0$. $Z \in D$, $Z' \in D$, то $Z = [\lambda]^{-1}_j [\lambda']_j Z' = [\frac{\lambda'}{\lambda}]_j Z'$ и поэтому

$$f_{j\nu}([\lambda]_j Z) = \lambda^{\nu} f_{j\nu}(Z) = \lambda^{\nu} f_{j\nu}([\frac{\lambda'}{\lambda}]_j Z') =$$

$$= \lambda'^{\nu} f_{j\nu}(Z') = f_{j\nu}([\lambda']_j Z').$$

Итак, применяя последовательно изложенную процедуру, докажем, что функция $f(Z)$ голоморфна (и однозначна) в каждой области возрастающей последовательности

$$D, L^1_+ D, L^2_+ L^1_+ D, \ldots, L^m_+ \ldots L^2_+ L^1_+ D, L^1_+ L^m_+ \ldots L^2_+ L^1_+ D, \ldots \quad . \tag{5.11}$$

Обозначим объединение этих областей через R и докажем, что $R = \tau'_n$. Очевидно, $R \subset \tau'_n$. Докажем, что R – $L_+(C)$ – инвариантная область. Действительно, область $L^j_+ R$ есть объединение возрастающей последовательности областей $L^j_+ D$, $L^j_+ L^1_+ D, \ldots, L^j_+ L^m_+ \ldots L^2_+ L^1_+ D, \ldots$. Но каждая из областей этой последовательности содержится в некоторой области последовательности (5.11), например, $L^j_+ L^2_+ L^1_+ D \subset L^j_+ L^{j-1}_+ \ldots L^1_+ L^m_+ \ldots L^1_+ D$. Поэтому $L^j_+ R \subset R$, что вместе с очевидными включениями $L^j_+ R \supset R$ дает $L^j_+ R = R$, $j = 1, \ldots, m$. Отсюда по лемме 2 заключаем, что область R – $L_+(C)$ -инвариантна. Поскольку R содержит область τ^+_n, а τ'_n – – наименьшая $L_+(C)$ -инвариантная область, содержащая τ^+_n, то $R \supset \tau'_n$ и потому $R = \tau'_n$.

Итак, функция $f(Z)$ допускает однозначное и голоморфное продолжение в область τ'_n и в τ'_n справедливы единственные представления (5.1) с функциями $f_{j\nu}(Z)$, удовлетворяющими условиям теоремы. Теорема III доказана.

Следствие 1. Всякая функция $f(Z)$, удовлетворяющая условиям теоремы III, в области τ'_n допускает (единственные) представления при $j = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$

$$f(Z)=f_j(Z)+\sum_{\nu=1}^{p}\left[(z_k^{(0)}+z_k^{(j)})^{\nu} f^{+}_{jk\nu}(Z)+(z_k^{(0)}-z_k^{(j)})^{\nu} f^{-}_{jk\nu}(Z)\right], \qquad (5.12)$$

где функций f_j *и* $f^{\pm}_{jk\nu}$ *принадлежат* $H(\tau_n')$ *и* L_+^j *-инвариантны.*

Представление (5.12) вытекает из представления (5.1) при $p=q$ в силу леммы 5.

Следствие 2. Если функция $f(Z)$ *удовлетворяет условиям теоремы III, то она удовлетворяет системе дифференциальных уравнений*

$$A_j(A_j^2-1)\dots(A_j^2-p^2)f(Z)=0, \quad j=1,\dots,m. \qquad (5.13)$$

Соотношения (5.13) вытекают из представления (5.1) при $p=q$, если заметить, что функции $f_{j\nu}$ удовлетворяют уравнениям

$$A_j f_{j\nu}=\nu f_{j\nu}, \quad -p\le\nu\le p, \quad j=1,\dots,m, \qquad (5.14)$$

эквивалентным условиям однородности (5.2).

Следствие 3. Пространства $H_p(\tau_n')$ *– полные* $p=0,1,\dots$.

Пусть $\{f_k\}$ – последовательность Коши в $H_p(\tau_n')$. Тогда $\{f_k\}$ – последовательность Коши и в каждом из пространств $H_p(V_n^+)$ и $H_p(V_n^-)$ (см. §2). Поэтому существуют пределы $f^{\pm}$ этой последовательности в $H_p(V_n^{\pm})$ соответственно. Далее, граничные значения функций f_k совпадают в точках Йоста. Принимая во внимание непрерывность операции перехода к граничным значениям (из $H(V_n^{\pm})$ в S', см./12/), заключаем, что граничные значения и предельных функций $f^{\pm}$ совпадают в точках Йоста. По теореме об "острие клина" (см./13/, дополнение A, теорема 1; см. также/4/, §27) существует функция f, голоморфная в точках Йоста и совпадающая с f^+ в τ_n^+ и f^- в τ_n^-. По теореме III f голоморфна в τ_n' и потому $f\in H_p(\tau_n')$.

Замечание 1. Установленное в теореме III при каждом $j=1,\dots,m$ соответствие (5.1) и (5.3) между функцией f и функциями $\{f_{j\nu}$,

$\nu=-q,\dots,p\}$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно из $H(\tau_n')$ в $H(\tau_n')$.

Замечание 2. Теорема, аналогичная теореме III, доказана в работе[6] для областей Дайсона вида

$$(R^N+iC)\cup(R^N-iC)\cup\tilde{C}\cup(-\tilde{C}),$$

инвариантных относительно однопараметрической группы комплексных гомотетий $z\to\lambda z$, $\lambda\neq 0$.

Замечание 3. Стритером и Глазером (см.[2,16]) с помощью теоремы "непрерывности" и теоремы об "острие клина" (см.[13]) доказано, что расширенная труба τ_n' есть голоморфное расширение области $D=\tau_n^+\cup\tau_n^-\cup J_n$.

Замечание 4. Из доказательства теоремы III вытекает односвязность расширенной трубы τ_n' и, следовательно, снова однозначность голоморфного продолжения функции f. Действительно, поскольку область D односвязна, а применение операции L_+^j к односвязной области даст снова односвязную область, то все области возрастающей последовательности (5.11) односвязны. Отсюда следует, что и их объединение $R=\tau_n'$ – – односвязная область[x].

Замечание 5. Условия теорем II и III эквивалентны. Это следует из изоморфизма алгебр $H(V_n^+)$ и $\mathcal{S}'(\bar{V}_n^+)$, $H(V_n^-)$ и $\mathcal{S}'(\bar{V}_n^-)$ (см. §2) и из теоремы об "острие клина" (см.[13]). Поэтому теорема II при $m=1$ доказана в силу следствия 1 к теореме III.

§6. Доказательство теоремы I

Это эквивалентно доказательству теоремы II при $n=1$. При $m=1$ теорема I уже доказана (см. замечание 5, §5). Пусть $m\geq 2$. Применяя представление (5.12) при $n=j=1$ к функции $f(z)$ получим

$$f(z)=f_0(z)+\sum_{\nu=1}^{p_1}\left[(z^{(0)}+z^{(1)})^\nu f_\nu^+(z)+(z^{(0)}-z^{(1)})^\nu f_\nu^-(z)\right], \tag{6.1}$$

x/ Доказательство односвязности области τ_n' при $m=3$ см. также у Томозава[20].

где единственные функции $f_0, f_\nu^{\pm}$ принадлежат $H(r')$ и удовлетворяют уравнению $A_1 u = 0$. Формулу (6.1) представим в виде

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{p_1} z^{(1)\nu} f_\nu^{(1)}(z) + z^{(0)} \sum_{\nu=1}^{p_1} z^{(1)^{\nu-1}} f_\nu^{(2)}(z), \tag{6.2}$$

где функции $f_\nu^{(j)}(z)$ суть линейные комбинации $f_0(z)$ и выражений вида $(z^{(0)2} - z^{(1)2})^s f_\nu^{\pm}(z)$, $s \geq 0$ – целое; поэтому $f_\nu^{(j)} \in H(r')$ и $A_1 f_\nu^{(j)} = 0$. Соответствие между функциями $\{f_0, f_\nu^{\pm}\}$ и $\{f_\nu^{(j)}\}$ взаимно однозначно.

Применяя теперь к каждой функции $f_\nu^{(j)}$ представление (5.12) при $j = 2$, приходим к следующей задаче: найти необходимые условия разрешимости в классе $H(r')$ системы уравнений

$$A_1 \psi(z) = 0, \tag{6.3}$$

$$A_2 \psi(z) = \sum_{\nu=1}^{p_2} [(z^{(0)} + z^{(2)})^\nu \psi_\nu^+(z) + (z^{(0)} - z^{(2)})^\nu \psi_\nu^-(z)], \tag{6.4}$$

где заданные функции $\psi_\nu^{\pm}$ принадлежат алгебре $H(r')$ и удовлетворяют уравнению $A_2 \psi_\nu^{\pm} = 0$.

Сначала отметим, что ψ, $\psi_\nu^{\pm}$ – чётные функции по $z^{(0)}$, ибо если

$$\psi(z) = \psi_0(z) + z^{(0)} \psi_1(z) + z^{(0)^2} \psi_2(z) + z^{(0)^3} \psi_3(z) + \ldots,$$

то в силу уравнения (6.3)

$$A_1 \psi(z) = z^{(0)} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial z^{(1)}} + z^{(0)} \frac{\partial \psi_1}{\partial z^{(1)}} + \ldots \right) + z^{(1)} (\psi_1 + 2 z^{(0)} \psi_2 + 3 z^{(0)^2} \psi_3 + \ldots) = 0,$$

откуда получаем $\psi_1 = \psi_3 = \ldots = 0$, что и утверждалось.

По доказанному $A_2 \psi$ и, стало быть, правая часть равенства (6.4) – нечётные функции по $z^{(0)}$, и поэтому необходимо должны иметь место равенства $\psi_\nu^- = -(-1)^\nu \psi_\nu^+$. Поэтому уравнение (6.4) принимает вид

$$A_2 \psi(z) = \sum_{\nu=1}^{p_2} [(z^{(0)} + z^{(2)})^\nu - (z^{(2)} - z^{(0)})^\nu] \psi_\nu^+(z). \tag{6.5}$$

Принимая теперь во внимание представление

$$\frac{1}{z^{(0)}}[(z^{(0)}+z^{(2)})^{\nu}-(z^{(2)}-z^{(0)})^{\nu}]=\sum_{\substack{\ell+2s=\nu-1\\ \ell\geq 0,\ s\geq 0}} b_{k\ell}z^{(2)^{\ell}}(z^{(0)^2}-z^{(2)^2})^{s},$$

перепишем уравнение (6.5) в виде

$$A_2\psi(z)=z^{(0)}\sum_{\nu=1}^{p_2} z^{(2)^{\nu-1}}\psi_{\nu}(z), \tag{6.6}$$

где функции ψ_{ν} суть линейные комбинации из выражений вида $(z^{(0)^2}-z^{(2)^2})^{s}\psi^{+}_{\nu}(z)$, $s\geq 0$ – целое; поэтому $\psi_{\nu}\in H(r')$ и $A_2\psi_{\nu}=0$. Соответствие между функциями $\{\psi^{+}_{\nu}\}$ и $\{\psi_{\nu}\}$ взаимно однозначно.

Далее, вычисляя коммутатор $[A_1,A_2]$ от функции ψ двумя способами, из (6.3) и (6.6) получим еще одно необходимое условие разрешимости нашей задачи:

$$[A_1,A_2]\psi=A_1A_2\psi=A_1[z^{(0)}\sum_{k=1}^{p_2} z^{(2)^{\nu-1}}\psi_{\nu}(z)]=$$

$$=z^{(0)}\sum_{\nu=1}^{p_2} z^{(2)^{\nu-1}}A_1\psi_{\nu}(z)+z^{(1)}\sum_{\nu=1}^{p_2} z^{(2)^{\nu-1}}\psi_{\nu}(z)=$$

$$=z^{(1)}\frac{\partial\psi}{\partial z^{(2)}}-z^{(2)}\frac{\partial\psi}{\partial z^{(1)}}=\frac{z^{(1)}}{z^{(0)}}A_2\psi=z^{(1)}\sum_{\nu=1}^{p_2} z^{(2)^{\nu-1}}\psi_{\nu}(z),$$

т.е.

$$\sum_{\nu=1}^{p_2} z^{(2)^{\nu-1}}A_1\psi_{\nu}(z)=0. \tag{6.7}$$

Докажем, что из уравнения (6.3) и (6.6) вытекает:

$$\psi(z)=\sum_{\nu=1}^{p_2}\frac{z^{(2)^{\nu}}}{\nu}\psi_{\nu}(z)+\psi_0(z),\quad A_1\psi_{\nu}(z)=0, \tag{6.8}$$

где

$$\psi_0\in H(r')\quad \text{и}\quad A_1\psi_0=A_2\psi_0=0.$$

Будем доказывать это утверждение по индукции по p_2. При $p_2=0$ оно верно. Пусть это утверждение верно для $0,1,\dots,p_2-1$, и докажем его для p_2.

Обозначим

$$\sum_{\nu=1}^{p_2} z^{(2)\,\nu-1}\,\psi_\nu(z) = v(z)\,.$$

Тогда в силу (6.7) функция $v\in H(\tau')$ и удовлетворяет уравнениям

$$A_1 v(z)=0,\quad A_2 v(z) = z^{(0)}\sum_{\nu=1}^{p_2-1}\nu\, z^{(2)\,\nu-1}\,\psi_{\nu+1}(z)$$

и, следовательно, по индуктивному предположению, функции ψ_ν, $\nu=2,\dots,p_2$ удовлетворяют уравнению $A_1\psi_\nu=0$. Но тогда и ψ_1 удовлетворяет этому уравнению:

$$A_1\psi_1(z) = \sum_{\nu=1}^{p_2} z^{(2)\,\nu-1} A_1\psi_\nu(z) = A_1\psi(z) = 0\,.$$

Функция $\psi(z)$, удовлетворяющая уравнению (6.6), представляется формулой (6.8), где ψ_0 – некоторая функция из $H(\tau')$, удовлетворяющая однородному уравнению $A_2\psi_0=0$. Кроме того, в силу (6.3)

$$A_1\psi_0(z) = \sum_{\nu=1}^{p_2}\frac{z^{(2)\,\nu}}{\nu}\,A_1\psi_\nu(z)+A_1\psi_0(z) = A_1\psi(z) = 0.$$

Этим представление (6.8), выражающее необходимые условия разрешимости в $H(\tau')$ системы уравнений (6.3) – (6.4), доказано.

Применяя теперь к каждой функции ψ_ν, $\nu=0,1,\dots,p_2$, в представлении (6.8) предыдущие рассуждения с заменой $z^{(2)}$ на $z^{(3)}$, приходим к следующей задаче : найти необходимые условия разрешимости в алгебре $H(\tau')$ системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} &A_1\psi(z) = A_2\psi(z) = 0,\\ &A_3\psi(z) = z^{(0)}\sum_{\nu=1}^{p_3} z^{(3)\,\nu-1}\phi_\nu(z), \end{aligned}\right\}\qquad (6.9)$$

где заданные функции $\phi_\nu\in H(\tau')$ и $A_3\phi_\nu=0$.

Как и выше, необходимыми условиями разрешимости системы (6.9) являются равенства, аналогичные (6.7),

$$\sum_{\nu=1}^{p_3} z^{(3)^{\nu-1}} A_1 \phi_\nu(z) = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{p_3} z^{(3)^{\nu-1}} A_2 \phi_\nu(z) = 0.$$

Пользуясь этими равенствами и применяя индукцию по p_3, получим, что функции ϕ_ν, $\nu=1,\dots,p_3$ удовлетворяют уравнениям $A_1\phi_\nu = A_2\phi_\nu = 0$, а функция ϕ имеет представление, аналогичное (6.8),

$$\phi(z) = \sum_{\nu=1}^{p_3} \frac{z^{(3)^\nu}}{\nu} \phi_\nu(z) + \phi_0(z), \tag{6.10}$$

где $\phi_0 \in H(\tau')$ и $A_1\phi_0 = A_2\phi_0 = A_3\phi_0 = 0$. И т.д.

Наконец, на m-ом шаге получим представление

$$\chi(z) = \sum_{\nu=1}^{p_m} \frac{z^{(m)^\nu}}{\nu} \chi_\nu(z) + \chi_0(z), \tag{6.11}$$

где $\chi_\nu \in H(\tau')$ и $A_1\chi_\nu = A_2\chi_\nu = \dots = A_m\chi_\nu = 0$, $\nu = 1,\dots,p_m$.

В силу леммы 3 функции χ_ν $L_+(C)$-инвариантны. Из представлений (6.11), (6.10), (6.8) и (6.2) следует представление (1.1):

$$f(z) = \sum_\alpha z^\alpha \chi_\alpha^{(1)}(z) + z^{(0)} \sum_\alpha z^\alpha \chi_\alpha^{(2)}(z), \tag{6.12}$$

где функции $\chi_\alpha^{(j)} \in H(\tau')$ и $L_+(C)$-инвариантны. Теорема I доказана.

Замечание. Из приведенного доказательства следует, что соответствие между функциями f и $\{\chi_\alpha^{(j)}\}$ в представлении (6.12) взаимно однозначно; оно задается линейными непрерывными (из $H(\tau')$ в $H(\tau')$) операторами $L_\alpha^{(j)}: f \to \chi_\alpha^{(j)}$. Операторы $L_\alpha^{(j)}$ представляют собой линейные комбинации суперпозиций операторов (5.3) и операторов умножения на функции вида $(z^{(0)2} - z^{(\ell)2})^s$, $s \geq 0$ – целое, взятых в различных порядках.

§7. *Доказательство теоремы II*

Функция f, удовлетворяющая условиям теоремы II, удовлетворяет и условиям теоремы III (см. замечание 5, §5).

Известно, что всякий элемент Λ группы $L_+(C)$ может быть представлен в виде суперпозиции* конечного числа вращений $[\lambda_\nu]_{jk}$, $0 \le j, k \le m$, взятых в определенном порядке (не зависящем от Λ). Но каждое вращение $[\lambda_\nu]_{jk}$, $1 \le j, k \le m$ есть суперпозиция трех вращений в плоскостях $(0, j)$ и $(0, k)$ согласно формуле (2.2). Поэтому всякий элемент $\Lambda \in L_+(C)$ есть суперпозиция конечного числа $s = s(m)$ [x/] вращений $[\lambda_\nu]_j$, взятых в определенном порядке (не зависящем от Λ), так что

$$\Lambda = [\lambda_1]_{j_1} \dots [\lambda_s]_{j_s}, \quad \lambda_\nu = \lambda_\nu(\Lambda).$$

Применяя к функции $f(\Lambda Z) = f([\lambda_1]_{j_1} \dots [\lambda_s]_{j_s} Z)$ теорему III последовательно s раз, получим при $Z \in \tau'_n$

$$f(\Lambda Z) = \sum_{|\alpha| = s} \lambda^\alpha f_\alpha(Z) = \sum_{|\alpha| = s} C_\alpha(\Lambda) f_\alpha(Z), \tag{7.1}$$

$$f_\alpha(Z) = \sum_{\alpha'} C_{\alpha, \alpha'} f(\Lambda_{\alpha'} Z), \quad \Lambda_{\alpha'} \in L_+^\uparrow, \tag{7.2}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$, $\alpha' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_s)$. Разложения (7.1) и (7.2) показывают, что функция $f(Z)$ принадлежит некоторому конечномерному инвариантному подпространству тензорного представления группы $L_+(C)$,

$$f(Z) = \sum_{|\alpha| = s} f_\alpha(Z), \quad f_\alpha \in H(\tau'_n). \tag{7.3}$$

Поэтому f можно разложить в конечную сумму,

$$f(Z) = \sum_{1 \le t \le M} F_t(Z), \quad F_t \in H(\tau'_n), \tag{7.4}$$

причем F_t принадлежит пространству конечномерного неприводимого представления $S_t(\Lambda)$ группы $L_+(C)$. Другими словами, F_t принадлежит S_t-ковариантному модулю (состоящему из функций, голоморфных в τ'_n) над кольцом $L_+(C)$-инвариантных и голоморфных в τ'_n функций. Так как τ'_n предполагается областью голоморфности и τ'_n является насыщен-

---

[x/] Например, $s(3) = 19$.

ной областью относительно полиномиальных инвариантов группы $L_+(C)$ (см. Хепп[22]), то по теореме Хеппа[21] заключаем, что функция F_t представляется в виде

$$F_t(Z) = \sum_{\nu=1}^{a_t} P_{\nu t}(Z)\phi_{\nu t}(Z), \tag{7.5}$$

где $\phi_{\nu t}$ $-L_+(C)$ – инвариантные и голоморфные функции в τ'_n; $\{P_{\nu t}, \nu=1,\dots,a_t\}$ – S_t -ковариантные полиномы.

В силу (7.5) и (7.4) для доказательства теоремы III осталось установить, что $\phi_{\nu t} \in H(\tau'_n)$. Для этого поступаем следующим образом. Из (7.5) при всех $\Lambda \in L_+(C)$ имеем:

$$F_t(\Lambda Z) = \sum_{\nu=1}^{a_t} P_{\nu t}(\Lambda Z)\phi_{\nu t}(Z) = \sum_{\nu=1}^{a_t}\sum_{\mu=1}^{a_t} S_t^{\nu\mu}(\Lambda) P_{\mu t}(Z)\phi_{\nu t}(Z). \tag{7.6}$$

Так как представление S_t неприводимо, то по теореме Бернсайда (см., например,[24], стр. 102), матричные элементы $\{S_t^{\nu\mu}, 1 \le \nu, \mu \le a_t\}$ образуют систему линейно независимых функций на группе $L_+(C)$ и, значит, на ее вещественной подгруппе $L_+^{\uparrow}$. Поэтому существуют такие элементы $\Lambda_{\nu'\mu'}$, $1 \le \nu', \mu' \le a_t$ группы $L_+^{\uparrow}$, что $\det(S_t^{\nu\mu}(\Lambda_{\nu'\mu'})) \neq 0$. Полагая в равенстве (7.6) $\Lambda = \Lambda_{\nu'\mu'}$, для функций $P_{\mu t}\,\phi_{\nu t}$ получим систему a_t^2 линейных алгебраических уравнений с отличным от нуля определителем. Поэтому функции $P_{\mu t}\,\phi_{\nu t}$ являются линейными комбинациями функций $F_t(\Lambda_{\nu'\mu'} Z)$ с $\Lambda_{\nu'\mu'} \in L_+^{\uparrow}$. Так как $F_t \in H(\tau'_n)$, то и $F_t(\Lambda_{\nu'\mu'} Z) \in H(\tau'_n)$. Следовательно, $P_{\mu t}\,\phi_{\nu t} \in H(\tau'_n)$.
Но тогда по лемме 4 и $\phi_{\nu t} \in H(\tau'_n)$. Теорема III доказана полностью.

Литература

1. Н.Н. Боголюбов и В.С. Владимиров. Одна теорема об аналитическом продолжении обобщенных функций. НДВШ, физ.-матем.науки, №3, 26–35 (1958); §2, 179 (1959).

2. R.F. Streater. Analytic Properties of Products of Field Operators. J. Mathem.Phys., 3, 256-261 (1962).

3. J. Bros, H. Epstein and V. Glaser. On the Connection between Analyticity and Lorentz Covariance of Wightman Functions, Communs.Math.Phys., 6, 77-100 (1967).

4. В.С. Владимиров. Методы теории функций многих комплексных переменных, "Наука", 1964.

5. В.С. Владимиров. Об одном обобщении теоремы Лиувилля. Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова, 64, 9-27 (1961).

6. В.С. Владимиров, В.В. Жаринов. О представлении типа Йоста-Лемана-Дайсона, ТМФ, 3, 305-319 (1970).

7. R. Jost und H. Lehmann. Integral-Darstellung kausaler Kommutatoren. Nuovo Cimento, 5, 1598-1610 (1957).

8. F.J. Dyson. Integral Representations of Causal Commutators, Phys.Rev., 110, 1460-1464 (1958).

9. A.S. Wightman. La théorie quantique locale et la théorie quantique des champs. Ann.Inst.Henri Poincaré. Sect. A, 1, 403-420 (1964).

10. I.T. Grodsy, R.F. Streater, No-go Theorem. Phys.Rev.Lett., 20, 695-698 (1968).

11. А.И. Оксак, И.Т. Тодоров. Двухточечные функции локальных бесконечно компонентных полей, ТМФ, 7 (1971).

12. В.С. Владимиров. Задача линейного сопряжения голоморфных функций многих комплексных переменных. Изв. АН СССР, сер.матем., 29, 807-834 (1965).

13. Н.Н. Боголюбов, Б.В. Медведев и М.К. Поливанов. Вопросы теории дисперсионных соотношений. Физматгиз, М., 1958.

14. D. Hall and A.S. Wightman. A Theorem on Invariant Analytic Functions with Applications to Relativistic Quantum Field Theory. Mat.Fys.Medd.Dan.Vod.Selsk., 31, no. 5, 3-41 (1957).

15. R. Jost. Eine Bemerkung zum CTP Theorem. Helv.Phys.Acta, 30, 409-416 (1957).

16. Р. Йост. Общая теория квантованных полей, "Мир", 1967.

17. Н.Н. Боголюбов, А.А. Логунов, И.Т. Тодоров. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, "Наука", 1969.
18. Р. Стритер, А. Вайтман. PCT, спин и статистика и все такое, "Наука", 1966.
19. Н. Бурбаки. Топологические векторные пространства, ИИЛ, 1959.
20. Y. Tomosava. Local Commutativity and the Analytic Continuation of the Wightman Function. J.Math.Phys., 4, 1240-1252 (1963).
21. K. Hepp. Klassiche komplexe Liesche Gruppen und kovariante analytische Funktionen. Math.Ann., 152, 149-158 (1963).
22. K. Hepp. Lorentz-kovariante analitische Funktionen. Helv. Phys. Acta, 36, 355-375 (1963).
23. Д.П. Желобенко. Компактные группы Ли и их представления, "Наука, 1970.
24. Л. Хёрмандер. О делении обобщенных функций на полиномы. Математика, 3+5, 117-130 (1959).

Рукопись поступила в издательский отдел
2 марта 1971 года.