ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 5657

Н.М. Атакишиев, А.Т. Филиппов

ВЫЧИСЛЕНИЕ СУПЕРПРОПАГАТОРА В НЕЛИНЕЙНЫХ КВАНТОВЫХ ТЕОРИЯХ ПОЛЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1971

Р2 - 5657

Н.М. Атакишиев, А.Т. Филиппов

ВЫЧИСЛЕНИЕ СУПЕРПРОПАГАТОРА В НЕЛИНЕЙНЫХ КВАНТОВЫХ ТЕОРИЯХ ПОЛЯ

Направлено в "Commun.Math.Phys."

Атакишиев Н.М., Филиппов А.Т.

P2-5657

Вычисление суперпропагатора в нелинейных квантовых теориях поля

Предполагается новый метод построения суперпрогаторов, т.е. преобразований Фурье для выражений вида $\sum_{n=1}^{\infty} C_n[g^2 \Delta_F(x)]^n$, позволяющий единым способом получать их явные аналитические выражения в обширном классе теорий поля – от строго локальных до сильно нелокальных. Метод сводится к построению дифференциального уравнения для суперпропагатора, которое в общем случае имеет бесконечный порядок. Использование граничного условия при $p^2 = 0$ позволяет найти решение, зависящее от одной постоянной. Применение метода иллюстрируется рассмотрением простых примеров.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1971

Atakishiev N.M., Filippov A.T.

P2-5657

Calculation of Superpropagators in Non-Linear Quantum Field Theories

A new method of constructing the superpropagators, i.e. the Fourier transforms of the expressions of the form $\sum_{n=1} C_n[g^2 \Delta_F(x)]^n$, is suggested. The method makes it possible to derive by use of the same technique explicit analytic expressions for the superpropagators for a wide class of field theories – from strictly local up to essentially non-local. The essence of the method is the construction of a differential equation for the superpropagator which in general is of an infinite order. By use of the boundary condition at $p^2 = 0$ we find the solution of this equation depending on one arbitrary real parameter. Simple examples are given to illustrate the method.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1971

§I. Введение

При использовании существенно нелинейных (неполиномиальных) лагранжианов, встречающихся, например, в кирально-инвариантных теориях поля, возникает необходимость в вычислении суперпропагаторов, т.е. преобразований Фурье для выражений вида*/ $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \left[g^2 \Delta_F(x)\right]^n$. К решению такой же задачи приводит основанная на теоремах эквивалентности трактовка полиномиальных неперенормируемых теорий поля. В данной работе предлагается весьма общий метод построения суперпропагаторов, позволяющий единым способом получать их явные аналитические выражения для обширного класса теорий поля - от строго локальных до сильно нелокальных.

Идея метода восходит к ранним исследованиям приближенных линейных интегральных уравнений для функций Грина в неперенормируемых теориях /I-6/. В большом числе работ были, в частности, изучены уравнения Эдвардса, Бете-Солпитера и интегральное уравнение для простейшего суперпропагатора, соответствующего выражению $\Delta_F(x)\left[1-\lambda\Delta_F(x)\right]^{-1}$. Для построения суперпропагаторов более общего вида были предложены другие методы, не связанные с решением уравнений для функций Грина /7-II/. В работах /5,6/ было, однако, показано, что суперпропагатор, соответствующий $S_F(x)\exp\{\lambda \mathcal{D}_F(x)\}$, удовлетворяет линейному интегральному уравнению, которое было решено в евклидовом импульсном пространстве посредством сведения к дифференциальному уравнению.

---

*/ Обозначения см. ниже.

Важно отметить следующее обстоятельство. Интегральное уравнение имеет решение лишь в том случае, если его ядро каким-либо способом регуляризовано до квадратичного интегрируемого (например, посредством обрезания на верхнем пределе интеграла по виртуальному импульсу), и эту регуляризацию можно снять, лишь найдя точное решение и выполнив перенормировку. После перехода от интегрального уравнения к дифференциальному регуляризацию можно убрать, и при решении дифференциального уравнения не возникает необходимости в использовании математически бессмысленных выражений и операций предельного перехода. Решения, полученные этим способом, тождественны решениям, найденным в[8-II], и зависят от одной произвольной постоянной[*].

Обобщение метода работ[5,6], использованного ранее для исследования простейших суперпропагаторов, позволяет получить линейное дифференциальное уравнение для суперпропагатора в общем случае. Этот метод представляется нам более простым и общим, чем метод работ[8-II], так как он позволяет, при минимальном числе дополнительных предположений, получить аналитические выражения для суперпропагаторов в обширном классе теорий поля.

§2. Суперпропагатор и матрица рассеяния

В данной работе изучается теория нейтрального скалярного поля с лагранжианом[**]

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 = -\frac{1}{2}\left[\partial_\mu \varphi(x)\right]^2 + f : U\left[g\varphi(x)\right]: \quad , \tag{2.1}$$

где

$$U(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n!}\varphi^n \; , \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \; , \quad x^2 \equiv \vec{x}^2 - x_0^2 \; . \tag{2.2}$$

---

[*] Эта неоднозначность более подробно обсуждается ниже.
[**] Включение в рассмотрение полей со спином и изотопическим спином не связано с возникновением каких-либо принципиальных затруднений.

К задачам такого типа приводят теории с частичной симметрией. Рассмотрим, например, теорию с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_s + \mathcal{L}_м \ , \ \mathcal{L}_s = -\frac{1}{2} f^2(\varphi)(\partial_\mu \varphi)^2, \ \mathcal{L}_м = -\frac{m^2}{2}\varphi^2 . \qquad (2.3)$$

Положим $\varphi(x) = \varphi[\psi(x)]$ и выберем $\psi(x)$ таким образом, что $f^2(\varphi)\left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^2 = 1$, для чего достаточно взять $\psi = \int f(\varphi) d\varphi$. Лагранжиан $\mathcal{L}_s = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \psi)^2$ очевидно инвариантен относительно однопараметрической группы преобразований поля φ, порождаемой заменой $\psi \mapsto \psi + c$, а лагранжиан $\mathcal{L}_м$ неинвариантен относительно этих преобразований. Для пояснения приведем простой пример:

$$f(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1-g^2\varphi^2}} \ , \quad g\psi = \arcsin(g\varphi) \ , \quad g\varphi = \sin g\psi . \qquad (2.4)$$

Замена $\psi \mapsto \psi + c$ определяет нелинейное преобразование поля φ

$$g\varphi \to g\varphi \cos cg + \sqrt{1-g^2\varphi^2} \sin cg .$$

Относительно этого преобразования лагранжиан $\mathcal{L}_м$ очевидно неинвариантен:

$$\mathcal{L}_м = -\frac{m^2}{2g^2}\sin^2(g\psi) \mapsto -\frac{m^2}{2g^2}\left\{\sin^2(g\psi)\cos 2cg + \frac{1}{2}\sin 2(g\psi)\sin 2cg + \sin^2 cg\right\}.$$

Заметим, что описанным способом лагранжиан U получается не в нормальной форме, и в общем случае зависимость $:U(\varphi):$ от поля φ имеет совершенно иной вид, чем зависимость $U(\varphi)$ /10/. Для вычислений удобнее, однако, исходить из лагранжиана, приведенного к нормальной форме, и поскольку мы не будем здесь затрагивать вопросов эквивалентности теорий, рассматриваемых в различных полевых переменных, мы и воспользуемся этим упрощением.

В ряде случаев (см., например, /8/) в лагранжиан $\mathcal{L}_0$ включают член $-\frac{m^2}{2}\varphi^2$. Это приводит к тому, что суперпропагатор выражается не через $\mathcal{D}_F(x)$, а через $\Delta_F(x)$. Обобщение нашего метода на этот случай мы рассмотрим в другой работе. Ниже до формулы (3.6) изучается общий случай, когда $\mathcal{L}_0$ содержит член $-\frac{m^2}{2}\varphi^2$, а все дальнейшие формулы пригодны лишь в случае $m=0$.

S-матрица в представлении взаимодействия имеет вид:

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f^n S_n , \tag{2.5}$$

$$S_n = \frac{i^n}{n!}\int d^4x_1 \dots d^4x_n\, T\{:U[g\varphi(x_1)]: \dots :U[g\varphi(x_n)]:\}. \tag{2.6}$$

Рассмотрим член второго порядка по f

$$S_2 = \frac{i^2}{2}\int d^4x_1 d^4x_2 \sum_{n_1,n_2=0}^{\infty} g^{n_1+n_2} F^{(2)}_{n_1 n_2}(x_1-x_2): \frac{\varphi^{n_1}(x_1)}{(n_1)!}\frac{\varphi^{n_2}(x_2)}{(n_2)!}: \tag{2.7}$$

Нетрудно проверить, что

$$F^{(2)}_{n_1 n_2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{U_{n+n_1}U_{n+n_2}}{n!}\left[g^2\Delta_F(x)\right]^n , \tag{2.8}$$

где по определению $U_0=0$ и

$$\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4 i}\int\frac{e^{-ipx}d^4p}{p^2+m^2-i\varepsilon} \;;\; \mathcal{D}_F(x)\equiv\Delta_F(x)\Big|_{m=0} = \frac{1}{4\pi^2(x^2+i\varepsilon)} . \tag{2.9}$$

Оказывается, что вычисление $F^{(2)}_{n_1 n_2}(x)$ при любых n_1 и n_2 сводится к вычислению $F^{(2)}_{00}(x)$:

$$F^{(2)}_{00}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{U_n^2}{n!}\left[g^2\Delta_F(x)\right]^n. \tag{2.10}$$

Для доказательства этого воспользуемся приемом, который систематически используется в дальнейшем. Положим*/

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \equiv \vartheta(n-1) , \quad n = 1,2,3,\dots , \tag{2.11}$$

---

*/ Здесь предполагается, что все $U_n \neq 0$ $(n=1,2,\dots)$. Однако, если, например, $U_{2n}=0$, $U_{2n+1}\neq 0$, то можно воспользоваться тем же приемом, введя обозначение $\tilde{U}_n = U_{2n+1}$.

и продолжим функцию $\vartheta(z)$ с целых значений $z=n\ (n=0,1,\dots)$ на любые комплексные значения z. Это продолжение единственно в классе функций, удовлетворяющих условиям Карлсона /I2/: 1) $\vartheta(z)$ – регулярная функция в полуплоскости $\mathrm{Re}\, z\geq 0$; 2) $|\vartheta(z)|<M\exp(A|z|)$ при $\mathrm{Re}\, z\geq 0$, $A>0$; 3) $|\vartheta(iy)|<M\exp\{(\pi-\varepsilon)|y|\}$, $-\infty<y<\infty$, $\varepsilon>0$. Эти условия, наложенные на $\vartheta(z)$ (а не на u_n !), не слишком ограничительны, так как отношение u_{n+1}/u_n с изменением n меняется гораздо более плавно, чем u_n. Например, если $u_n\sim(n!)^a$, то $u_{n+1}/u_n=\vartheta(n-1)\sim(n+1)^a$, и продолжение функции $\vartheta(z)=(z+2)^a$ очевидно удовлетворяет условиям Карлсона при любом a, тогда как продолжение функции $(n!)^a$, вообще говоря, не удовлетворяет этим условиям. Очевидно, что

$$\frac{u_{n+m}}{u_n}=\prod_{k=0}^{m-1}\vartheta(n-1+k)\equiv\vartheta_m(n-1),\ m=1,2,\dots,\vartheta_0(n-1)=1, \qquad (2.12)$$

и функции $\vartheta_m(z)$ однозначно определены и регулярны по крайней мере при $\mathrm{Re}\, z\geq 0$. Таким образом

$$F^{(2)}_{n_1 n_2}(x)=u_{n_1}u_{n_2}+\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_{n_1}(n-1)\vartheta_{n_2}(n-1)\frac{u_n^2}{n!}\left[g^2\Delta_F(x)\right]^n. \qquad (2.13)$$

Введем теперь систематически используемый в дальнейшем оператор

$$\delta_{g^2}\equiv g^2\frac{\partial}{\partial g^2},\quad \delta_{g^2}\cdot g^{2n}=n g^{2n},\quad \delta_{g^2}\{g^{2n}f(g^2)\}=g^{2n}(\delta_{g^2}+n)f(g^2), \qquad (2.14)$$

и построим функции от этого оператора

$$\vartheta_m(\delta_{g^2}-1)=\sum_{k=0}^{m-1}\vartheta(\delta_{g^2}-1+k),\quad m=1,2,\dots, \qquad (2.15)$$

что возможно в силу регулярности функции $\vartheta(z)$. Пользуясь свойствами (2.14) оператора δ_{g^2}, нетрудно показать, что

$$\vartheta_m(\delta_{g^2}-1)g^{2n}=\vartheta_m(n-1)g^{2n},$$

т.е.

$$F^{(2)}_{n_1 n_2}(x) = U_{n_1} U_{n_2} + \mathcal{V}_{n_1}(\delta_{g^2}-1)\mathcal{V}_{n_2}(\delta_{g^2}-1) F^{(2)}_{00}(x). \qquad (2.16)$$

Последнее соотношение получено в x -представлении, но им можно пользоваться и в импульсном представлении в области, где $F^{(2)}_{00}(x)$ - аналитическая функция параметра g^2 */.

Для практического использования формулы (2.16) полезно заметить, что в самом общем случае функция $\tilde{F}^{(2)}_{00}(p^2)$ разлагается в ряд по степеням $(g^2)^{an} \ln^k g^2$ и нужно вычислить действие $\mathcal{V}_m(\delta_{g^2}-1)$ на такие члены. Удобнее всего сделать это, представив их в виде $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{d^k}{d\varepsilon^k}(g^2)^{an+\varepsilon}$. Тогда

$$\mathcal{V}_m(\delta_{g^2}-1) g^{2an} \ln^k g^2 = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{d^k}{d\varepsilon^k}\left\{\mathcal{V}_m(an+\varepsilon-1) g^{2(an+\varepsilon)}\right\} =$$

$$= \mathcal{V}^{(k)}_m(an-1) g^{2an} + \dots + \mathcal{V}_m(an-1) g^{2an} \ln^k g^2 .$$

Этот прием позволяет по известному разложению функции $\tilde{F}^{(2)}_{00}(p^2)$ найти разложение функций $\tilde{F}^{(2)}_{n_1 n_2}(p^2)$ **/.

Заметим, что наличие особенности по g^2 при $g^2=0$ (нецелое a или $k\neq 0$) делает реально необходимой знание интерполирующей функции $\mathcal{V}(z)$ в нецелых точках. Необходимость наложения условий Карлсона вытекает из рассмотрения частного случая $U_n = 1$. При этом очевидно, что $F^{(2)}_{n_1 n_2} \equiv F^{(2)}_{00}$, однако продолжение $\mathcal{V}(z)$ с целых точек, вообще говоря, неоднозначно, а именно: $\mathcal{V}(z) = 1 + f(z)\sin \pi z$, где $f(z)$ - любая регулярная в правой полуплоскости функция. Так как(см. /1/) суперпропагатор $\tilde{F}^{(2)}_{00}$ в этом случае содержит члены $\sim g^{2n} \ln g^2$, то, например, в разложении функции $\tilde{F}^{(2)}_{10}$ будут содержаться члены вида

---

*/ Как известно /1,6,8/, импульсные представления суперпропагаторов содержат особенность по g^2 при $g^2=0$. Написанные соотношения, очевидно, нельзя употреблять в этой особой точке.

**/ Если функция $\mathcal{V}(z)$ имеет достаточно простой вид, то в ряде случаев можно найти аналитический вид функции $\tilde{F}^{(2)}_{n_1 n_2}(p^2)$, используя (2.14) и не разлагая $\tilde{F}^{(2)}_{00}(p^2)$ по степеням g^2 и $\ln g^2$ (см.примеры, разобранные ниже).

$$\vartheta(n-1)g^{2n}\ln g^2+\vartheta'(n-1)g^{2n}=g^{2n}\ln g^2+(-1)^n\pi f(n-1)g^{2n}$$

и мы получаем добавочные (лишние!) члены $(-1)^n\pi f(n-1)g^{2n}$. Условия Карлсона позволяют избавиться от таких лишних членов и поэтому естественно использовать их и в более общем случае.

§3. Уравнение для суперпропагатора

В этом разделе мы построим уравнение для суперпропагатора $F^{(2)}_{oo}(x)$ в импульсном представлении. Для упрощения обозначений положим $U_n^2=n!C_n$, т.е. запишем $F^{(2)}_{oo}(x)$ в виде

$$F^{(2)}_{oo}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\left\{g^2\Delta_F(x)\right\}^n, \tag{3.1}$$

и перейдем к евклидовской метрике заменой $x_0\to ix_0$, $p_0\to ip_0$ */. Предполагая, что теория каким-либо способом регуляризована, перейдем в евклидовской метрике к импульсному представлению

$$F^{(2)}_{oo}(x)=\int e^{-ipx}\tilde{F}(p^2)\frac{d^4p}{(2\pi)^4},\quad \Delta_F(x)=\int\frac{e^{-ipx}}{m^2+p^2}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}, \tag{3.2}$$

где $x^2=\vec{x}^2+x_0^2$, $p^2=\vec{p}^2+p_0^2$. Удобно перейти от переменной p^2 к безразмерной переменной g^2p^2. Функция $F^{(2)}_{oo}(x)$ зависит лишь от безразмерных комбинаций g^2/x^2 и g^2m^2. Отсюда и из (3.2) следует, что $\tilde{F}(p^2)$ можно представить в виде

$$\tilde{F}(p^2)=g^4F(g^2p^2,g^2m^2). \tag{3.3}$$

Чтобы построить уравнение для функции $\tilde{F}(p^2)$, воспользуемся приемом, подробно разобранным в предыдущем разделе. Положим

$$\frac{C_{n+1}}{C_n}\equiv R(n-1),\quad n=1,2,\ldots, \tag{3.4}$$

---

*/ Более подробное обсуждение вопроса об использовании евклидовской метрики при решении линейных уравнений в неперенормируемых теориях поля см. в работах /2-6/.

и допустим, что существует аналитическое продолжение функции $R(z)$ на комплексные значения z, удовлетворяющее условиям Карлсона. Тогда нетрудно показать, что $F^{(2)}_{00}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$F^{(2)}_{00}(x)=C_1 g^2\Delta_F(x)+g^2\Delta_F(x)R(\delta_{g^2}-1)F^{(2)}_{00}(x). \qquad (3.5)$$

В импульсном представлении это уравнение записывается в виде

$$\widetilde{F}(p^2)=\frac{C_1 g^2}{m^2+p^2}+g^2R(\delta_{g^2}-1)\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{\widetilde{F}(q^2)}{m^2+(p-q)^2}.$$

Воспользовавшись соотношением $g^2\frac{\partial}{\partial g^2}F(g^2p^2,g^2m^2)\equiv\left(p^2\frac{\partial}{\partial p^2}+m^2\frac{\partial}{\partial m^2}\right)F(g^2p^2,g^2m^2)$ и положив $\delta_{p^2}=p^2\frac{\partial}{\partial p^2}$, $\delta_{m^2}=m^2\frac{\partial}{\partial m^2}$, мы получим уравнение для функции $F(g^2p^2,g^2m^2)$:

$$F(g^2p^2,g^2m^2)=\frac{C_1}{g^2(p^2+m^2)}+R(\delta_{p^2}+\delta_{m^2})\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{g^2F(g^2q^2,g^2m^2)}{m^2+(p-q)^2}. \qquad (3.6)$$

При $m\neq0$ интегро-дифференциальное уравнение (3.6) достаточно сложно для исследования, поэтому в дальнейшем мы полагаем $m=0$. Это приводит к следующему интегро-дифференциальному уравнению для функции $F(g^2p^2,0)$:

$$F(g^2p^2,0)=\frac{C_1}{g^2p^2}+R(\delta_{p^2})\int\frac{d^4(gq)}{(2\pi)^4}\frac{F(g^2q^2,0)}{g^2(p-q)^2}. \qquad (3.7)$$

Воспользовавшись тем, что

$$g^2\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{F(g^2q^2)}{(p-q)^2}=\frac{1}{\xi}\int_0^{\xi}\eta F(\eta)d\eta+\int_{\xi}^{\infty}F(\eta)d\eta, \qquad (3.8)$$

где $F(\xi)\equiv F(g^2p^2,0)$, $\xi=\frac{g^2p^2}{(4\pi)^2}$, и подействовав на обе части уравнения (3.7) оператором $\delta_\xi(\delta_\xi+1)$, мы получим дифференциальное уравнение для функции $F(\xi)$:*/

$$\left[\delta_\xi(\delta_\xi+1)+\xi R(\delta_\xi+1)\right]F(\xi)=0. \qquad (3.9)$$

---

*/ Для более строгого вывода этого уравнения необходимо ввести в (3.6)-(3.8) регуляризацию, например, обрезать интегралы по q^2 на верхнем пределе $q^2=L^2$. Это практически не влияет на ход рассуждений и полученные результаты и мы опускаем обсуждение вопроса о регуляризации (см. по этому поводу работу /6/).

Полученное дифференциальное уравнение для функции $F(\xi)$ в общем случае имеет бесконечный порядок. Несмотря на это, легко найти его решения. Для этого заметим, что характеристические показатели уравнения (3.9), определяющие поведение решений при $\xi \to 0$, совпадают с нулями функции $\alpha(\alpha+1)$ и полюсами функции $R(\alpha+1)$ */. Таким образом, возможны следующие виды поведения при $\xi \to 0$: ξ^0, ξ^{-1} и ξ^{α_i}, где α_i определяется из условия $[R(\alpha_i+1)]^{-1} = 0$. Так как функция $R(z)$ регулярна при $\operatorname{Re} z \geq 0$, то $\alpha_i < -1$ и, следовательно, решения, соответствующие характеристическим показателям α_i, более сингулярны при $\xi \to 0$, чем свободный пропагатор ξ^{-1}. Выбрав в качестве граничного условия при $\xi \to 0$ поведение, определяемое свободным пропагатором, мы должны построить два решения, соответствующие $\alpha=0$ и $\alpha=-1$. Это делается простым обобщением метода Фробениуса /13/.

Если решение уравнения (3.9) ищется в виде степенного ряда по ξ, то характеристическому показателю $\alpha=0$ соответствует решение

$$F_1(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n, \quad a_0 = 1, \quad a_n = \frac{(-1)^n \prod_{k=1}^{n} R(k)}{n!\,(n+1)!} = \frac{1}{c_2} \frac{c_{n+2}}{n!\,(n+1)!}, \qquad (3.10)$$

которое нормировано условием $F_1(0) = 1$. При $\xi < 0$ это решение с точностью до нормировочного множителя совпадает с мнимой частью суперпропагатора (если отбросить в ней мнимую часть свободного пропагатора)

$$\operatorname{Im} \tilde{F}(p^2) = c_1 \pi g^2 \delta(p^2) + \frac{g^4}{16\pi} \Theta(-p^2) \Theta(p^0) c_2 F_1(\xi), \qquad (3.11)$$

которую можно вычислить непосредственно по правилу Куткоского /14/. Решения, соответствующие другим характеристическим показателям, ищутся, как обычно, в виде рядов

*/ Следующие ниже рассуждения пригодны лишь в том случае, когда решения определяются сходящимися рядами по положительным степеням ξ.

$$F(\alpha,\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\alpha)\xi^{n+\alpha}\,,\quad a_n(\alpha)=\frac{(-1)^n R(n+\alpha)R(n+\alpha-1)\cdots R(\alpha+1)}{(n+\alpha+1)(n+\alpha)^2\cdots(\alpha+2)^2(\alpha+1)}\,a_0(\alpha). \qquad (3.12)$$

При $\alpha=0$ получается решение, выписанное выше, но при $\alpha=-1$ решением (3.12) пользоваться нельзя. Это обстоятельство связано с тем, что характеристический показатель $\alpha=-1$ отличается от показателя $\alpha=0$ на целое число, из-за чего знаменатель в рекуррентной формуле (3.12) обращается в нуль. Поэтому для построения решения, соответствующего показателю $\alpha=-1$, воспользуемся, как и в случае уравнений конечного порядка, методом Фробениуса. Положим $a_0(\alpha)=\alpha+1$ и продифференцируем (3.12) по α:

$$\frac{\partial F(\alpha,\xi)}{\partial\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{da_n(\alpha)}{d\alpha}\xi^{n+\alpha}+\ln\xi\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\alpha)\xi^{n+\alpha}, \qquad (3.13)$$

При $\alpha\to-1$ это выражение определяет линейно независимое с (3.10) решение уравнения (3.9):

$$F_2(\xi)=\left.\frac{\partial F(\alpha,\xi)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=-1}=-R(0)\ln\xi F_1(\xi)+\sum_{n=0}^{\infty}b_n(-\xi)^{n-1}, \qquad (3.14)$$

где

$$b_0=1\,,\quad b_n=\left\{\frac{d}{d\alpha}\left[(n+\alpha+1)\prod_{k=1}^{n}\frac{R(k+\alpha)}{(k+\alpha+1)^2}\right]\right\}_{\alpha=-1}\,,\quad n=1,2,\ldots \qquad (3.15)$$

Аналогичным образом строятся решения, соответствующие характеристическим показателям α_i, но поскольку они определяют решения, растущие при $\xi\to0$ быстрее свободного пропагатора, то мы их отбрасываем как не имеющие физического смысла. Решение (3.14) вещественно при $\xi>0$ и определено во всей комплексной плоскости ξ (т.е. p^2) с разрезом $-\infty<\xi<0$, причем скачок на разрезе равен $-2\pi i R(0)F_1(\xi)$, т.е. при должной нормировке дает мнимую часть суперпропагатора. Таким образом в качестве суперпропагатора мы можем взять выражение

$$F(\xi)=AF_2(\xi)+BF_1(\xi), \qquad (3.16)$$

где $A = -\frac{C_1}{(4\pi)^2}$, а B – произвольная вещественная постоянная[*].

Асимптотическое поведение решения (3.16) при $\xi \to \infty$ в общем случае определить нелегко. Однако, если $R(z)$ имеет достаточно простой вид, то это можно сделать, используя теорию асимптотического поведения решений дифференциальных уравнений или асимптотические методы исследования рядов. Например, важный частный случай составляют теории, в которых

$$R(z) = \frac{\mathcal{P}_p(z)}{Q_{q-2}(z)} ,$$

где $\mathcal{P}_p$ и Q_q – полиномы степени p и q соответственно. Тогда уравнение (3.9) имеет вид:

$$\left\{\delta_\xi(\delta_\xi+1)Q_{q-2}(\delta_\xi) + \xi\,\mathcal{P}_p(\delta_\xi+1)\right\}F(\xi) = 0. \tag{3.17}$$

Разлагая полиномы $\mathcal{P}_p$ и Q_{q-2} на множители

$$\mathcal{P}_p(\delta_\xi+1) = \prod_{j=1}^{p}(\delta_\xi - a_j + 1),$$

$$Q_{q-2}(\delta_\xi) = \prod_{j=1}^{q-2}(\delta_\xi - b_j), \quad b_{q-1} = -1, \quad b_q = 0,$$

находим, что решения уравнения (3.17) выражаются через G-функции Мейера[16]

$$G_{pq}^{mn}\left\{(-1)^{p+1-m-n}\,\xi \,\middle|\, \begin{matrix} a_1,\dots,a_p \\ b_1,\dots,b_q \end{matrix}\right\} \quad , \text{ где } 0 \le m \le q, \ 0 \le n \le p.$$

Асимптотическое поведение G-функций Мейера детально изучено в работах[16] и общая теория позволяет построить G-функции с заданным поведением при $\xi \to 0$ и $\xi \to \infty$.

---

*/ Выбор произвольной постоянной B можно попытаться зафиксировать требованием минимальности сингулярности при $|\xi| \to \infty$ (или на световом конусе/6,11/). Это требование сводится к условию $\mathrm{Re}\,\tilde F(p^2)/\mathrm{Im}\,\tilde F(p^2) \to 0$ при $p^2 \to -\infty$ (см./6/) и оно исключительно удобно для вычислений. Может, однако, оказаться, что при вычислении высших порядков по f константа B в (3.16) фиксируется условием унитарности (см./15/), так что вопрос о выборе B может быть окончательно решен лишь после детального исследования высших приближений.

G-функции могут иметь при $\xi \to \infty$ существенную особенность или же быть полиномиально ограниченными. Таким образом, уже в этом простейшем классе теорий можно получить локализуемую, нелокализуемую и существенно нелокальную асимптотику /I7/. Интересно отметить, что задавая суперпропагатор в виде G-функции, можно подобрать лагранжиан взаимодействия, т.е. решить "обратную задачу". Этим способом можно построить набор теорий, в которых суперпропагаторы имеют асимптотику заданного типа.

Выше при построении суперпропагатора мы пользовались лишь граничными условиями при $\xi \to 0$, получив при этом решение с точностью до одной произвольной постоянной. Однако дифференциальное уравнение (3.9) эквивалентно интегро-дифференциальному уравнению (3.6) лишь при наличии граничного условия убывания $F(\xi)$ при $\xi \to +\infty$. Как видно из рассмотренных ниже примеров, такого убывания можно добиться не всегда. В случае растущих решений $F(\xi)$ мы будем трактовать дифференциальное уравнение (3.9) как <u>расширение</u> интегрального уравнения (3.6), имеющее смысл и тогда, когда исходное уравнение (3.6) неприменимо. В этом случае (подобно теории расширения симметрических операторов до самосопряженных /I8/) существует класс расширений, каждое из которых задается выбором константы B (см. формулу (3.16)). К тому же результату приводит предварительная регуляризация теории и её снятие в конце вычислений, а также изменение знака g^2 (т.е. переход к неэрмитовому лагранжиану взаимодействия). Переход к дифференциальному уравнению есть, таким образом, удобный метод регуляризации теории и, пользуясь этим методом, можно изучать теорию лишь в импульсном пространстве, не обращаясь к координатному, что позволяет обойти вопросы регуляризации обобщенных функций неумеренного роста.

§4. Примеры. Обсуждение

I. Рассмотрим суперпропагатор (3.I) с $C_n \equiv 1$. В этом случае $R(z) \equiv 1$ и уравнение (3.9) для функции $F(\xi)$ сводится к уравнению Бесселя. Нормируя решение этого уравнения так, что суперпропагатор $\tilde{F}(p^2) \sim g^2/p^2$ при $p^2 \to 0$, получим

$$\tilde{F}(p^2) = -\frac{g^4}{16\pi\sqrt{\xi}}\left\{N_1(2\sqrt{\xi}) + C J_1(2\sqrt{\xi})\right\}, \qquad (4.I)$$

где $N_1(z)$ - функция Неймана, $J_1(z)$ - функция Бесселя, C - произвольная постоянная. Эта функция имеет логарифмическое ветвление по g^2 при $g^2=0$, и существенную особенность при $p^2 \to \infty$. При $p^2 \to +\infty$ функция (4.I) убывает, но при $p^2 \to -\infty + i0$ она растет при любом выборе константы C, так как всегда растет $\operatorname{Im}\tilde{F}(p^2+i0)$. Константу C можно, однако, выбрать так, что будет выполнено условие $\frac{\operatorname{Re}\tilde{F}(p^2+i0)}{\operatorname{Im}\tilde{F}(p^2+i0)} \to 0$ при $p^2 \to -\infty$ (в соответствии с примечанием предыдущего параграфа).

При измененном знаке g^2 интегро-дифференциальное уравнение (3.6) имеет единственное решение, удовлетворяющее граничному условию при $\xi \to 0$ и убывающее при $\xi \to +\infty$:

$$\tilde{F}(p^2) = \frac{g^4}{8\pi^2\sqrt{\xi}} K_1(2\sqrt{\xi}), \qquad \text{где} \quad \xi = \frac{|g^2| p^2}{(4\pi)^2}. \qquad (4.2)$$

Это решение убывает при $|\xi| \to \infty$ по любому направлению в комплексной плоскости, причем на разрезе $-\infty < p^2 < 0$ убывает, осциллируя (мнимая часть также осциллирует). Асимптотика принадлежит нелокализуемому типу(см. /I7/)). Решение (4.2) было, по существу, найдено еще Окубо /I/.

2. Рассмотрим экспоненциальный суперпропагатор: $C_n = \frac{1}{n!}$, $R(z) = \frac{1}{z+2}$. Нетрудно показать (см. /6/), что в этом случае

$$\tilde{F}(p^2) = \frac{-g^4}{32\pi^2}\left\{G_{03}^{20}\left(\xi e^{\pi i}\middle|0,-1,-2\right) + G_{03}^{20}\left(\xi e^{-\pi i}\middle|0,-1,-2\right) + C\, G_{03}^{10}\left(\xi\middle|0,-1,-2\right)\right\}. \qquad (4.3)$$

Суперпропагатор (4.3) растет при $p^2 \to \infty$ по всем направлениям, а его мнимая часть положительна при $p^2 < 0$. (При $C=0$ выполняется условие $\frac{Re\tilde{F}(p^2)}{Im\tilde{F}(p^2)}\underset{p^2\to-\infty}{\longmapsto} 0$). При изменении знака g^2 получим убывающее при $\xi \to +\infty$ решение

$$\tilde{F}(p^2) = \frac{g^4}{16\pi^2} G^{20}_{03}\left(\xi \middle| 0,-1,-2\right), \text{ где } \xi = \frac{|g^2|p^2}{16\pi^2}. \quad (4.4)$$

На разрезе $-\infty < \xi < 0$ это решение экспоненциально растет и его асимптотика принадлежит локализуемому типу. По существу это же выражение было получено нами в работах /5,6/. Другим способом решение (4.3) было найдено Волковым /8/.

3. Рассмотрим случай $C_n = n!$, $R(z) = z+2$, при котором уравнение (3.9) сводится к вырожденному гипергеометрическому уравнению. Решение имеет вид

$$\tilde{F}(p^2) = -\frac{g^4}{8\pi^2}\left\{\Psi(3,2;\xi e^{\pi i}) + \Psi(3,2;\xi e^{-\pi i}) + C\Phi(3,2;-\xi)\right\}. \quad (4.5)$$

Здесь $\Phi(3,2;\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{2}\frac{\xi^n}{n!}$ – вырожденная гипергеометрическая функция,

$$\Psi(3,2;z) = \frac{1}{2z} + \ln z\,\Phi(3,2;z) + \frac{1}{2}e^{z} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{2n!}\psi(n+1)z^n \quad (4.6)$$

и ветвь логарифма выбрана так, что $\ln z$ вещественен при $z>0$. Асимптотическое поведение функций $\Phi(3,2;z)$ и $\Psi(3,2;z)$ хорошо известно /19/. Написанное решение при любом C убывает как ξ^{-3} при $\xi \to \infty$ в правой полуплоскости, однако в левой полуплоскости оно экспоненциально растет. При изменении знака g^2 получим единственное решение $\Psi(3,2;\xi)$, которое при $\xi \mapsto \infty$ убывает как ξ^{-3} во всей комплексной плоскости $\xi \doteq |g^2|p^2/(4\pi)^2$. Таким образом, в случае нелокализуемых теорий при отрицательных g^2 можно построить убывающие при $p^2 \to \infty$ решения, которые позволяют определить суперпропагатор в координатном пространстве.

4. Число примеров можно неограниченно увеличивать, беря убывающие или растущие коэффициенты C_n. В случае растущих коэффициентов C_n ряд (3.I), конечно, расходится, но наш метод не требует предварительного суммирования этого ряда, при котором возникает хорошо известная неоднозначность (можно добавить любую функцию, асимптотическое разложение которой в ряд по степеням g тождественно равно нулю). Если коэффициенты C_n растут медленнее, чем $(n!)^2$, то применение описанного нами метода позволяет получить единственное (с точностью до константы B) решение, определенное рядом (3.I4). Если коэффициенты C_n растут быстрее, чем $(n!)^2$, то ряды в (3.I4) расходятся. При этом точка $\xi=0$ существенно особая точка суперпропагатора, а в точке $\xi=\infty$ особенность регулярна. В этом случае решение нельзя представить в виде (3.I4) и необходимо использовать разложение другого типа. Соответствующие решения существенно нелокальны /I7/. Если $C_n \sim (n!)^2$, то точки $\xi=0$ и $\xi=\infty$ регулярно особые, но появляются новые особенности на окружности $|\xi| = \mathrm{const} \sim 1$ (т.е. на "унитарном пределе"). Изложенный выше метод позволяет детально изучить суперпропагаторы во всех таких случаях и мы предполагаем сделать это в другой работе.

За полезные дискуссии и поддержку нам приятно выразить признательность Н.Н. Боголюбову, Д.И. Блохинцеву, М.К. Волкову, Г.В. Ефимову, В.И. Огиевецкому и А.Н. Тавхелидзе.

Литература:

1. S. Okubo. Progr. Theor. Phys., 11, 80 (1954).
2. C. Ceolin et al., Nuovo Cim., 26, 247 (1962);
   G. Furlan, G. Mahoux. Nuovo Cim., 36, 216 (1965).
3. R.F. Sawyer. Phys. Rev., 135, B448 (1964).
   G. Domokos, P. Suranyi. Nucl. Phys., 54, 529 (1964).
   W. Guttinger, Fortschr. der Phys., 14, 483 (1966).

4. B.A. Arbuzov, A.T. Filippov. Nuovo Cim., 38, 798 (1965).
A.T. Filippov. High Energy Phys. and Element. Part., IAEA, Vienna, 1965; Б.А. Арбузов, Н.М.Атакишиев, А.Т. Филиппов. ЯФ, 7, 690 (1968).
5. Б.А.Арбузов, Н.М.Атакишиев, А.Т.Филиппов. ЯФ, 8, 385 (1968).
6. A.T. Filippov. Proc. of the Topical Conf. on Weak Interact. CERN, Geneva, 1969. А.Т.Филиппов. Сб. "Нелокальные, нелинейные и неренормируемые теории поля", стр.209-220, Дубна, 1970.
7. Г.В.Ефимов. ЖЭТФ, 44, 2107 (1963).
E.S. Fradkin. Nucl. Phys., 49, 624 (1963).
8. M.K. Volkov. Ann.Phys., 49, 202 (1968); Commun.Math.Phys., 7, 289 (1968); Препринт ОИЯИ, Е2-5198 (1970).
9. B.W. Lee, B. Zumino. Nucl.Phys., 13, B671 (1969).
10. A. Salam, J. Strathdee. Phys.Rev., D1, 3296 (1970).
R. Delbourgo, K. Koller, A. Salam. Preprint, Imperial College, London, 1970.
11. H.Lehmann, K.Pohlmeyer. Commun.Math.Phys., 20, 101 (1970).
12. М.А.Евграфов. Асимптотические оценки и целые функции, ГИФМЛ, М., 1962.
13. Э.Айнс. Обыкновенные дифференциальные уравнения, ГНТИ, Харьков, 1939.
14. R.E. Cutkovsky. J. Math. Phys., 1, 429 (1960).
15. N. Christ. Preprint NYO-1932(2)-174, Columbia University, New York, 1970.
16. C. Meijer. Nederl. Akad.Wessensch.Proc. 49, 344, 457, 632, 765, 936, 1063 (1966).
17. A. Jaffe. Phys.Rev., 158, 1454 (1967).
G.V. Efimov. Commun.Math.Phys., 7, 138 (1968).
18. Н.И. Ахиезер, И.М. Глазман. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, "Наука", М., 1966.
19. N.E. Nörlund. Mat.Fys.Skr.Dan.Vid.Selsk., 2, No 5 (1963).

Рукопись поступила в издательский отдел
2 марта 1971 года.