СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2-5625

В.Н.Стрельцов

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ГРУПП ЛИ К НЕРЕЛЯТИВИСТСКИМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ

1971

P2- 5625

В.Н.Стрельцов

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ГРУПП ЛИ К НЕРЕЛЯТИВИСТСКИМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ

1. Ниже мы остановимся на некоторых особенностях применения теории непрерывных групп Ли к случаю нерелятивистских преобразований[1]. При этом, как и раньше[2], наша задача будет фактически заключаться в том, чтобы показать, что совокупность специальных нерелятивистских преобразований

$$x' = (x - \beta ct)(1 + \frac{1}{2}\beta^2), \tag{1}$$

$$t' = t(1 + \frac{1}{2}\beta^2) - \frac{\beta}{c}x \tag{1'}$$

образует непрерывную группу (с одним параметром β).

Как известно (см., например,[3]), основная теорема теории групп Ли гласит: если совокупность преобразований вида

$$x' = f(x, t, \beta), \quad t' = \phi(x, t, \beta) \tag{2}$$

образует группу, то должны быть справедливы следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{dx'}{d\beta} = \lambda(\beta)\, F(x', t'), \tag{3}$$

$$\frac{dt'}{d\beta} = \lambda(\beta)\, \Phi(x', t'). \tag{3'}$$

Однако, если мы продифференцируем выражения (1) и (1'), то получим

$$\frac{dx'}{d\beta} = -c(1 + \beta^2)t', \tag{4}$$

$$\frac{dt'}{d\beta} = -\frac{1}{c}(x-\beta ct)\ , \qquad (4')$$

откуда можно, например, заключить, что равенство (4') не может быть приведено к требуемому выражению (3').

В чем же здесь дело? Ведь ранее мы показали, что нерелятивистские преобразования обладают групповыми свойствами.

Чтобы разобраться в данном вопросе, будем рассуждать следующим образом.

Как известно, нерелятивистские преобразования суть приближенные преобразования и их можно использовать только в том случае, если члены порядка β^4 настолько малы, что ими можно пренебречь.

С другой стороны, оставаясь опять-таки в рамках заданной точности, мы, очевидно, не изменим, например, равенства (1'), добавив в него указанные малые (порядка β^4) члены. При этом будем иметь:

$$t' = t(1+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{3}{8}\beta^4)-\frac{\beta}{c}x(1+\frac{1}{2}\beta^2). \qquad (5)$$

Если теперь мы продифференцируем последнее выражение по β , то вместо (4') получим:

$$\frac{dt'}{d\beta} = -\frac{1}{c}(1+\beta^2)x'\ . \qquad (6)$$

Отсюда, рассматривая уравнение (6) совместно с уравнением (4), мы сможем заключить, что указанные уравнения имеют форму уравнений (3) и (3'). А это означает, что основная теорема теории групп Ли оказывается выполненной.

Правда формально нам здесь могут возразить, что с таким же правом члены порядка β^4 могут быть добавлены и в формулу (1):

$$x' = (x-\beta ct)(1+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{3}{8}\beta^4). \qquad (7)$$

В этом случае после дифференцирования будем иметь:

$$\frac{dx'}{d\beta} = -c\,[\,t(1+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{11}{8}\beta^4)-\frac{\beta}{c}x(1+\frac{1}{2}\beta^2)](1+\beta^2)\ .$$

Однако, как легко видеть, в рамках рассматриваемого приближения последнее выражение может быть переписано в виде:

$$\frac{dx'}{d\beta} = -c\left[t\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right)-\frac{\beta}{c}x\right](1+\beta^2) = -ct'(1+\beta^2),$$

полностью совпадающем с видом выражения (4).

В связи с вышеизложенным, мы хотим специально подчеркнуть следующее.

Характерной особенностью нерелятивистских преобразований является то, что в них фигурируют члены двух порядков величин (порядка 1 и порядка β^2 по отношению к максимальным слагаемым), тогда как в других приближенных преобразованиях – преобразованиях Галилея фигурируют члены только одного порядка. В этом смысле последние преобразования аналогичны (точным) преобразованиям Лоренца (для $\beta \approx 1$). Именно поэтому математические процедуры имеют схожий характер в последних двух случаях.

С другой стороны, в силу отмеченных выше особенностей при обращении с нерелятивистскими преобразованиями мы должны специально заботиться о том, чтобы в результате математических операций всегда оставались члены двух порядков величин.

2. В заключение мы покажем, что использованные выше рассуждения будучи применены к случаю преобразований Галилея:

$$x' = x - \beta c t, \tag{8}$$

$$t' = t \tag{8'}$$

не приводят к противоречиям.

Действительно, после дифференцирования (8) и формулы (1'), заменяющей теперь (8'), получим уравнения

$$\frac{dx'}{d\beta} = -ct',$$

$$\frac{dt'}{d\beta} = -\frac{1}{c}x',$$

которые, очевидно, имеют требуемую форму уравнений (3) и (3').

Литература

1. *В.Н. Стрельцов. Сообщения ОИЯИ, Р2-4461, Дубна 1969.*
2. *В.Н. Стрельцов. Сообщения ОИЯИ, Р2-5313, Дубна 1970.*
3. *Э. Гурса. Курс математического анализа, т. II, ОНТИ, М.-Л., 1936, стр. 347.*

Рукопись поступила в издательский отдел
16 февраля 1971 года.