

И-202

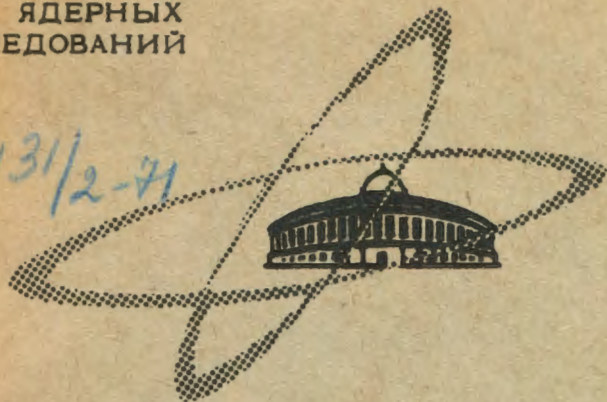
19/11-71

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 5616

1131/2-71



Е.А. Иванов

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ДРЕВЕСНЫЕ ГРАФЫ
В ТЕОРИИ ЯНГА И МИЛЛСА

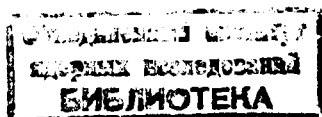
1971

P2 - 5616

Е. А. Иванов

ДРЕВЕСНЫЕ ГРАФЫ
В ТЕОРИИ ЯНГА И МИЛЛСА

Направлено в ТМФ



1. Введение

В работах /1,2,3,4,5/ было обнаружено, что при квантовании теорий неабелевых калибровочных полей в ковариантных калибровках "наивные" фейнмановские правила не дают верных результатов. Характерные для таких калибровок нефизические кванты /9,10,17/, в отличие от случая квантовой электродинамики, вносят во внутренние линии существенный вклад, не устранимый одним лишь наложением условий на вектора состояний. Построение измененных фейнмановских правил сводится к нахождению удобного рецепта для вычитания указанного вклада /2,3,4,5,11,18/. Интересно найти такой рецепт, применимый к любым калибровочным полям, оставаясь в рамках традиционного формализма. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением древесных графов теории Янга и Миллса /6/.

Во второй главе обсуждаются калибровочные свойства S_{tree} - совокупности древесных диаграмм модифицированной в духе Ферми-Гупты /7,8/ теории (далее - теория Я.М. II). Доказана слабая инвариант

ность S_{tree} при замене полей и спариваний по законам (2.5) и (2.6). С использованием этого в третьей главе показано, что на пространстве состояний, удовлетворяющих условиям (2.4), S_{tree} сводится к древесной части S - матрицы в калибровке излучения, рассмотренной рядом авторов /12,13,14/. Попутно продемонстрирован механизм появления определителя Фаддеева /3,4,18/ для случая этой калибровки. В четвертой главе доказано, что из внутренних линий древесных диаграмм массивной теории Янга и Миллса выпадают сингулярные по массе члены. Обсуждается переход к нулевой массе в таких диаграммах. При этом в настоящей работе в отличие от работы /15/ не используются точечные преобразования полей.

2. Калибровочные свойства древесных диаграмм в теории Янга и Миллса II

S - матрицу теории Я.М. II можно представить в виде
 T^* - экспоненты

$$S = T^* \exp [i (L_{вз}^1 + L_{вз}^2)], \quad (2.1)$$

где

$$L_{вз}^1 = -g \int d^4 x \partial_\mu b_\nu^a(x) b_\mu^m(x) b_\nu^n(x) \epsilon_{amn} \quad x/ \quad (2.2)$$

$$L_{вз}^2 = -\frac{g^2}{4} \int d^4 x b_\mu^i(x) b_\nu^k(x) b_\mu^l(x) b_\nu^m(x) \epsilon_{ikt} \epsilon_{ilm}.$$

T^* - спаривания определены обычным образом через пропагаторы в фейнмановской калибровке.

Физические асимптотические состояния, в которых отсутствуют временные кванты, выделяются условиями, подобными условиям Ферми-

$x/$ Латинские индексы принимают значения 1,2,3. Греческие - 1,2,3,4,
 Метрика - евклидова, $b_4 = i b_0$.

$$\partial_{\mu} b_{\mu}^{(-)} \Phi_{\text{физ}}^{a_0} = 0, \quad \Phi_{\text{физ}}^{a_0} + \partial_{\mu} b_{\mu}^{(+)} = 0 \quad x/ \quad (2.4)$$

Переходя к изучению калибровочных свойств S - матрицы, рассмотрим оператор \tilde{S} , получающийся из S с помощью замен $b_{\mu}^a(x) \rightarrow b_{\mu}^{a'}(x)$, $\overline{b_{\mu}^a(x) b_{\nu}^k(y)} \rightarrow \overline{b_{\mu}^{a'}(x) b_{\nu}^k(y)}$,

где

$$b_{\mu}^{a'}(x) = b_{\mu}^a(x) + \partial_{\mu}^x \omega^a(x), \quad (2.5)$$

$$\overline{b_{\mu}^a(x) b_{\nu}^k(y)} = \overline{b_{\mu}^a(x) b_{\nu}^k(y)} + \delta^{a k} f_{\mu\nu}(x-y), \quad (2.6)$$

$$f_{\mu\nu}(x-y) = \partial_{\mu}^x f_{\nu}^1(x-y) + \partial_{\nu}^x f_{\mu}^1(x-y) + \partial_{\mu}^x \partial_{\nu}^x f^2(x-y). \quad (2.7)$$

ω_1 - три произвольные c - функции, f_{ν}^1 и f^2 - функции, совместные по своим свойствам с $\overline{b_{\mu}^a(x) b_{\nu}^k(y)}$, а в остальном - произвольные. Волна над S означает, что все спаривания заменены по закону (2.6), а штрих, - что все поля под знаком N - произведения заменены по закону (2.5).

Обозначим часть \tilde{S} , соответствующую древесным графам, через \tilde{S}_{tree} . В приложении доказано, что

* Подробный анализ работы условий (2.4) в теориях безмассовых калибровочных полей можно найти в статьях /9,10/.

$$\Phi_{\text{физ}}^{\text{ac}+}(f) \partial_{\rho}^x \frac{\delta \tilde{S}'_{\text{tree}}}{\delta b_{\rho}^{\text{a}'}(x)} \Phi_{\text{физ}}^{\text{ac}}(i) = 0. \quad (2.8)$$

Это означает независимость матричных элементов \tilde{S}'_{tree} между физическими состояниями от функций $\omega^{\text{a}}(x)$

$$\Phi_{\text{физ}}^{\text{ac}+}(f) \tilde{S}'_{\text{tree}} \Phi_{\text{физ}}^{\text{ac}}(i) = \Phi_{\text{физ}}^{\text{ac}+}(f) \tilde{S}_{\text{tree}} \Phi_{\text{физ}}^{\text{ac}}(i). \quad (2.9)$$

Из последнего равенства немедленно следует "слабая" калибровочная инвариантность древесной части S - матрицы (2.1)

$$\Phi_{\text{физ}}^{\text{ac}+}(f) S'_{\text{tree}} \Phi_{\text{физ}}^{\text{ac}}(i) = \Phi_{\text{физ}}^{\text{ac}+}(f) S_{\text{tree}} \Phi_{\text{физ}}^{\text{ac}}(i). \quad (2.10)$$

Полная S - матрица (2.1) неинвариантна относительно преобразований (2.5) даже в "слабом" смысле, и для восстановления инвариантности необходимо к совокупности диаграмм с замыканиями добавить выражение, совпадающее по крайней мере во втором порядке по константе связи с определителем Фаддеева ^{/2-5/}. При этом восстанавливается и физическая унитарность.

Докажем соотношение

$$\Phi_{\text{физ}}^{\text{ac}+}(f) \tilde{S}'_{\text{tree}} \Phi_{\text{физ}}^{\text{ac}}(i) = \Phi_{\text{физ}}^{\text{ac}+}(f) S'_{\text{tree}} \Phi_{\text{физ}}^{\text{ac}}(i), \quad (2.11)$$

означающее неизменность S'_{tree} в обкладках физических состояний при замене спариваний по закону (2.6). Запишем \tilde{S}' , применив процедуру Хори ^{/19,16/}:

$$\tilde{S}' = N \{ \exp[\Delta' + \tilde{\Delta}] \exp[i L'_{\text{вз}}] \}, \quad (2.12)$$

$$\Delta' = -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y \Delta_0^0(x-y) \left[\frac{\delta}{\delta b_\mu^a(x)} - \partial_\lambda^x \frac{\delta}{\delta \partial_\lambda^x b_\mu^a(x)} \right] \times$$

$$\times \left[\frac{\delta}{\delta b_\mu^a(y)} - \partial_\gamma^y \frac{\delta}{\delta \partial_\gamma^y b_\mu^a(y)} \right] + \frac{i}{4} \int d^4x \frac{\delta}{\delta \partial_\mu^x b_\nu^a(x)} \frac{\delta}{\delta \partial_\mu^x b_\gamma^a(x)},$$

(2.13)

$$\tilde{\Delta} = \frac{1}{2} \int d^4x d^4y f_{\mu\nu}(x-y) \left[\frac{\delta}{\delta b_\mu^1(x)} - \partial_\gamma^x \frac{\delta}{\delta \partial_\gamma^x b_\mu^1(x)} \right] \times$$

$$\times \left[\frac{\delta}{\delta b_\nu^1(y)} - \partial_\beta^y \frac{\delta}{\delta \partial_\beta^y b_\nu^1(y)} \right].$$

(2.14)

Методом Намбу /20/ можно показать, что

$$\tilde{S}' = N \{ \exp [-i\tilde{H}'] \} \quad (2.15)$$

и \tilde{H}' с точностью до i совпадает со связанной частью \tilde{S}' .

Введем операторы \tilde{S}'_β и \tilde{H}'_β :

$$\tilde{S}'_\beta = N \{ \exp [-i\tilde{H}'_\beta] \} = N \{ \exp [\Delta' + \beta \tilde{\Delta}] \exp [iL'_{\text{вз}}] \}. \quad (2.16)$$

\tilde{H}'_β удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \tilde{H}'_\beta}{\partial \beta} - i N (\tilde{\Delta} \tilde{H}'_\beta) = 0 \quad (2.17)$$

с "начальным" условием

$$\tilde{H}'_{\beta=0} = H'. \quad (2.18)$$

Чтобы доказать (2.11), достаточно показать, что $\tilde{S}'_{\beta \text{ tree}}$ не зависит от β в обкладках физических состояний, т.е., что

$$\Phi_{\text{физ}}^{\text{ас}+}(\Gamma) \frac{\partial \tilde{H}'_{\beta \text{ tree}}}{\partial \beta} \Phi_{\text{физ}}^{\text{ас}}(i) = 0. \quad (2.19)$$

Используя для $\Gamma_{\mu\nu}(x-y)$ определение (2.7) и отбрасывая в (2.17) члены, воспроизводящие диаграммы с замыканиями, получаем уравнение для $\tilde{H}'_{\beta \text{ tree}}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{H}'_{\beta \text{ tree}}}{\partial \beta} = & \frac{1}{i} \int d^4x d^4y N \left\{ \partial_\mu^x \frac{\partial \tilde{H}'_{\beta \text{ tree}}}{\delta b_{\mu}^{i'}(x)} \Gamma_{\nu}^i(x-y) \left[\frac{\delta \tilde{H}'_{\beta \text{ tree}}}{\delta b_{\nu}^{i'}(y)} - \partial_\lambda^y \frac{\delta \tilde{H}'_{\beta \text{ tree}}}{\delta \partial_\lambda^y b_{\nu}^{i'}(y)} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \partial_\mu^x \frac{\delta \tilde{H}'_{\beta \text{ tree}}}{\delta b_{\mu}^{i'}(x)} \Gamma^2(x-y) \partial_\lambda^y \frac{\delta \tilde{H}'_{\beta \text{ tree}}}{\delta b_{\lambda}^{i'}(y)} \right\}. \quad (2.20) \end{aligned}$$

Соотношения (2.8) останутся справедливыми, если заменить $\Gamma_{\mu\nu}(x-y)$ на $\beta \Gamma_{\mu\nu}(x-y)$, т.е.

$$\Phi_{\text{физ}}^{\text{ас}+}(\Gamma) \partial_\rho^x \frac{\delta \tilde{S}'_{\beta \text{ tree}}}{\delta b_{\rho}^{i'}(x)} \Phi_{\text{физ}}^{\text{ас}}(i) = 0. \quad (2.21)$$

В приложении отмечена выполнимость (2.8) для связанной и несвязанной частей $\tilde{S}'_{\beta \text{ tree}}$ в отдельности. То же верно и для $\tilde{S}'_{\beta \text{ tree}}$:

$$\Phi_{\text{физ}}^{\text{ас}+}(\Gamma) \partial_\rho^x \frac{\partial \tilde{H}'_{\beta \text{ tree}}}{\delta b_{\rho}^m(x)} \Phi_{\text{физ}}^{\text{ас}}(i) = 0. \quad (2.22)$$

Взяв матричные элементы уравнения (2.20) между физическими состояниями, с учетом (2.22) получим (2.19). Соотношение (2.11) доказано.

Положив в (2.11) $\omega^i(x) = 0$, наблюдаем "слабую" инвариантность древесной части S - матрицы (2.1) относительно замены (2.6):

$$\Phi_{\text{физ}}^{\text{ао}+}(f) \tilde{S}_{\text{tree}} \Phi_{\text{физ}}^{\text{ао}}(i) = \Phi_{\text{физ}}^{\text{ао}+}(f) S_{\text{tree}} \Phi_{\text{физ}}^{\text{ао}}(i). \quad (2.23)$$

Из (2.11) и (2.10) или из (2.9) и (2.23) следует также, что

$$\Phi_{\text{физ}}^{\text{ао}+}(f) \tilde{S}'_{\text{tree}} \Phi_{\text{физ}}^{\text{ао}}(i) = \Phi_{\text{физ}}^{\text{ао}+}(f) S'_{\text{tree}} \Phi_{\text{физ}}^{\text{ао}}(i). \quad (2.24)$$

Итак, сумма древесных графов в теории Янга и Миллса II инвариантна в "слабом" смысле при одновременной или раздельной замене полей и спариваний по законам (2.5), (2.6), (2.7).

3. Сравнение с теорией в калибровке излучения

S - матрица S^r теории Янга и Миллса в радиационной калибровке может быть записана в терминах N - произведений с T* - спариваниями следующим образом /18,14/:

$$S^r = N \{ \exp [\Delta^r + \Delta_{\pi\pi}] \exp [i (L^{1r} + \frac{1}{2} \int d^4x \partial_n \phi^i \partial_n \phi^i)] \}, \quad (3.1)$$

$$\Delta^r = \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \overbrace{b_m^{ra}(x) b_n^{rs}(y)}^* \left[\frac{\delta}{\delta b_m^{ra}(x)} - \partial_\lambda^x \frac{\delta}{\delta \partial_\lambda^x b_m^{ra}(x)} \right] \times$$

$$\times \left[\frac{\delta}{\delta b_n^{rs}(y)} - \partial_\gamma^y \frac{\delta}{\delta \partial_\gamma^y b_n^{rs}(y)} \right] + \frac{i}{4} \int d^4x \frac{\delta}{\delta \partial_p^x b_m^{ra}(x)} \frac{\delta}{\delta \partial_p^x b_m^{ra}(x)}, \quad (3.2)$$

$$\Delta_{\pi\pi} = -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y (\delta_{mn} - \partial_m^x \partial_n^x \Delta^{-1}) \delta^4(x-y) \frac{\delta}{\delta \partial_4^x b_m^{ra}(x)} \frac{\delta}{\delta \partial_4^y b_n^{rs}(y)}, \quad (3.3)$$

$$L_{\text{ВЭ}}^{1r} = -g \int d^4x \partial_m b_n^{r1}(x) b_m^{ra}(x) b_n^{rk} \epsilon_{iak} \quad , \quad (3.4)$$

$$\partial_m b_m^{ri}(x) = 0, \quad (3.5)$$

$$\square b_m^{ra}(x) = 0, \quad (3.6)$$

$$\overbrace{b_m^{ra}(x) b_n^{rb}(y)}^* = -i \delta^{ab} (\delta_{mn} - \partial_m^x \partial_n^x \Delta^{-1}) \Delta_0^o(x-y). \quad (3.7)$$

Оператор $\exp \Delta_{\pi\pi}$ в (3.1) появляется при переходе от T к T^* - произведению вследствие несовпадения соответствующих спариваний между временными производными поперечных полей ^{/18/} $\frac{1}{2} \partial_n^x \phi^i \partial_n^x \phi^i$ - аналог кулоновского взаимодействия в электродинамике. Однако, в отличие от случая квантовой электродинамики, $\frac{1}{2} \partial_n^x \phi^i(x) \partial_n^x \phi^i(x)$ представляется бесконечным рядом по константе связи ^{/12,13,14/}. Именно, чисто "кулоновскую" древесную часть S^r можно записать в терминах $b_m^{ri}(x)$, $\partial_4^x b_m^{ri}(x)$ так:

$$\begin{aligned} N \{ \exp [\frac{i}{2} \int d^4x \partial_n^x \phi^i(x) \partial_n^x \phi^i(x)] \} &= \\ &= N \{ \exp [-\frac{i}{2} \int d^4x \partial_4^x b_k^{ra}(x) (\hat{b}_k^r)^{ab}(x) (\Delta + g \hat{b}_l^r \partial_l \varrho)_{bc}^{-1} \times \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\times \vec{\Delta} (\Delta + g \hat{b}_p^r \partial_p)^{-1} (\hat{b}_s^r)^{dm} \partial_4 b_{sm}^r \} \},$$

$$(\hat{b}_m^r)^{ab} \equiv \epsilon^{acb} b_m^r \quad (3.9)$$

Вернемся к S - матрице (2.1). В матричных элементах S_{tree} между физическими состояниями можно перейти к калибровке излучения, рассуждая точно так же, как и при обсуждении в работе /9/ перехода от ферми-гуптовской формулировки квантовой электродинамики к дираковской. Это позволяют сделать условия (2.4) и "слабая" инвариантность S_{tree} . Задавая направление эволюции с помощью времени-подобного орта n_μ , выбранного в виде

$$n_\mu = (0, 0, 0, i), \quad (3.10)$$

имеем

$$\Phi_{физ}^{ac+}(f) S_{tree} \Phi_{физ}^{ac}(i) = \Phi_{физ}^{ac+}(f) \tilde{S}_{tree}'' \Phi_{физ}^{ac}(i), \quad (3.11)$$

и \tilde{S}_{tree}'' отличается от S_{tree} тем, что поля b_m^i под знаком N - произведений заменены на $b_m^{r_i}$, b_4^i - на нуль*, а спаривания $\overline{b_\mu^i(x)} b_\nu^k(y)$ - на

* При выборе n_μ в виде (3.10)

$$b_4^{r_i}(x) = 0. \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned}
& -i \delta^{1k} \{ [\delta_{\mu\nu} - \delta_{\mu 4} \delta_{\nu 4} - (\partial_{\mu}^x - \delta_{\mu 4} \partial_4^x)(\partial_{\nu}^x - \delta_{\nu 4} \partial_4^x) \Delta^{-1}] \Delta_0^c(x-y) + \\
& + i \delta_{\mu 4} \delta_{\nu 4} \Delta^{-1} \delta^4(x-y) \}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Здесь

$$\Delta^{-1} \delta^4(x-y) = -D^r(x-y) = -(2\pi)^{-3} \int d^3 p \frac{1}{p^2} e^{ip(\vec{x}-\vec{y})}. \tag{3.14}$$

Введем оператор F следующим образом:

$$F = T^* \exp [i (\hat{L}_{\text{ВЗ}}^1 + \hat{L}_{\text{ВЗ}}^2)] |_{b_4^i = 0}, \tag{3.15}$$

$\hat{L}_{\text{ВЗ}}^1$ и $\hat{L}_{\text{ВЗ}}^2$ определены формулами (2.2) и (2.3) с $b_m^{r^i}$ вместо b_m^i , T^* - спаривания между поперечными полями - формулой (3.7), на внешних линиях b_4^i положены равными нулю в соответствии с (3.12), и

$$\overline{b_4^i(x) b_4^k(y)} \stackrel{\text{def}}{=} i \delta^{ik} \Delta^{-1} \delta^4(x-y). \tag{3.16}$$

Легко видеть, что

$$\tilde{S}_{\text{tree}}'' = F_{\text{tree}}. \tag{3.17}$$

Покажем тождественность $\tilde{S}_{\text{tree}}''$ и древесной части матрицы (3.1).

Используя свойства $\frac{\delta}{\delta G_{4m}^a} = \frac{\delta}{\delta \partial_4 b_m^a} = -\frac{\delta}{\delta \partial_m b_4^a}$, где $G_{4m}^a =$

$= \partial_4 b_m^a - \partial_m b_4^a$, и применяя процедуру Хори, представим F в форме

$$F = N \{ \exp [\Delta^r + \Delta_{\pi\pi}] \exp [i L_{\text{ВЗ}}^1] \exp \Delta_{44} \exp [i L_{\text{ВЗ}}^2] \} |_{b_4^i = 0} \tag{3.18}$$

$$L_{\text{ВЗ}}^4 = g \int d^4x G_{4m}^i(x) (\hat{b}_m^i)^{ik}(x) b_4^k(x), \quad (3.19)$$

$$\Delta_{44} = \frac{i}{2} \int d^4x d^4y \Delta^{-1} \delta^4(x-y) \frac{\delta}{\delta b_4^i(x)} \frac{\delta}{\delta b_4^i(y)} - \\ - i \int d^4x d^4y \Delta^{-1} \delta^4(x-y) \frac{\delta}{\delta b_4^i(x)} \frac{\partial^y}{\partial m} \frac{\delta}{\delta G_{m4}^i(y)}. \quad (3.20)$$

Из сравнения формул (3.18) и (3.1) с учетом свойства (3.17) видно, что для достижения желаемого результата достаточно показать следующее:

$$N \{ \exp [-\frac{i}{2} \int d^4x \partial_n \phi^i \partial_n \phi^i] \} = N^{\text{tree}} \{ \exp \Delta_{44} \exp [i L_{\text{ВЗ}}^4] \} |_{b_4^i=0} \quad (3.21)$$

Выражение

$$P = N \{ \exp [\frac{1}{i} \int d^4x d^4y \Delta^{-1} \delta^4(x-y) \frac{\delta}{\delta b_4^i(x)} \frac{\partial^y}{\partial m} \frac{\delta}{\delta G_{m4}^i(y)}] \exp [i L_{\text{ВЗ}}^4] \} \quad (3.22)$$

можно вычислить точно в силу билинейной по полям $b_4^i(x)$ и $G_{m4}^i(x)$ структуры лагранжиана $L_{\text{ВЗ}}^4$, используя рецепты, приведенные в книге Березина /21/ и работе /25/ (функциональные методы применимы здесь потому, что поля стоят под знаком N - произведения и с ними можно оперировать, как с классическими). После соответствующих выкладок имеем

$$P = N \{ \text{Det}^{-1} (1 + g \Delta^{-1} \hat{b}_m^r \partial_m) \times \\ \times \exp [i g \int d^4 x b_4^i(x) \Delta (\Delta + g \hat{b}_\ell^r \partial_\ell)^{-1}_{ik} (\hat{b}_m^r)^{kp} G_{m_4}^p] \}, \quad (3.23)$$

$$\ln \text{Det} (1 + g \Delta^{-1} \hat{b}_m^r \partial_m) = \text{Sp} \ln (1 + g \Delta^{-1} \hat{b}_m^r \partial_m). \quad (3.24)$$

Действуя под знаком N - произведения на P оставшейся частью оператора $\exp \Delta_{44}$ и полагая затем $b_4^i(x)$ равными нулю, видим: правая часть в (3.21) совпадает с правой частью равенства (3.8). Итак, S_{tree} и S_{tree}^r равны на физическом подпространстве. Отметим здесь, что в силу калибровочных свойств S_{tree} и условий (2.4) матричные элементы древесной части S - матрицы (2.1) между состояниями, в которых наряду с поперечными квантами присутствует хотя бы один скалярный (такие состояния разрешены условиями (2.4)), равны нулю. Разумеется, в части соотношения унитарности, соответствующей только древесным графам, не возникает никаких трудностей с переходом к сумме по поперечным промежуточным состояниям.

Нетрудно заметить, что

$$N \{ \exp \Delta_{44} \exp [i L_{вз}^4] \}_{b_4^i=0} = \\ = N \{ \text{Det}^{-1} [1 + g \Delta^{-1} \hat{b}_m^r \partial_m] \exp [\frac{i}{2} \int d^4 x \partial_n^x \phi^i(x) \partial_n^x \phi^i(x)] \}. \quad (3.26)$$

Сравнивая операторы F и S^r , получаем тогда

$$S^r = T^* \{ F \text{Det} (1 + g \Delta^{-1} \hat{b}_m^r \partial_m) \} \quad (3.27)$$

(T^* - произведение понимается в смысле, определенном выше для F). (3.27) находится в полном соответствии с результатами Фаддеева и Попова /4/ и Фрадкина /18/. Фрадкин шел в своих вычислениях от S^r . Мы получили тот же результат, суммируя "кулоновские" графы в матрице F .

4. Предел нулевой массы в древесных диаграммах массивной теории Янга и Миллса

В теории Янга и Миллса с $m \neq 0$ S - матрица S_{ms} может быть представлена в виде T^* - экспоненты /22,23/ подобно матрице (2.1) теории Я.М. П . Лагранжианы $L_{вз}^1$ и $L_{вз}^2$ совпадают по структуре с определенными формулами (2.2) и (2.3), поля подчиняются свободным уравнениям Прока. T^* - спаривание определено обычным образом:

$$\overline{b_\mu^i(x)} b_\nu^k(y) = \frac{1}{i} \delta^{ik} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{1}{m^2} \partial_\mu^x \partial_\nu^x \right) \Delta_m^c(x-y). \quad (4.1)$$

S_{ms} можно записать через соответствующий оператор Хори:

$$S_{ms} = N \{ \exp \Delta_{ms} \exp [i L_{вз}^1] \}. \quad (4.2)$$

Покажем, что S_{ms}^{tree} не меняется при замене

$$\overline{b_\mu^i(x)} b_\nu^k(y) \rightarrow \overline{b_\mu^i(x)} b_\nu^k(y) + \delta^{ik} \partial_\mu^x \partial_\nu^x f(x-y). \quad (4.3)$$

Умножим $f(x-y)$ на параметр β и введем, как и во второй главе, операторы S_{ms}^β и H_{ms}^β :

$$S_{ms}^\beta = N \{ \exp [\frac{1}{i} H_{ms}^\beta] \} = N \{ \exp \Delta_{ms}^\beta \exp [i \cdot L_{B3}^1] \} , \quad (4.4)$$

$$\Delta_{ms}^\beta = \Delta_{ms} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \beta \partial_\mu^x \partial_\nu^x f(x-y) \left[\frac{\delta}{\delta b_\mu^1(x)} - \partial_\lambda^x \frac{\delta}{\delta \partial_\lambda^x b_\mu^1(x)} \right] \quad (4.5)$$

$$\times \left[\frac{\delta}{\delta b_\nu^1(y)} - \partial_\gamma^y \frac{\delta}{\delta \partial_\gamma^y b_\nu^1(y)} \right] .$$

Доказательство сведется к доказательству соотношения

$$\frac{\partial H_{ms}^{\beta tree}}{\partial \beta} = 0 . \quad (4.6)$$

Уравнение на $H_{ms}^{\beta tree}$ получить легко, оно аналогично уравнению

(2.20) для \hat{H}_{tree} . Выписывать его не будем.

С помощью несложных выкладок можно вывести рекуррентную формулу для $\partial_\rho^x \frac{\delta S_{ms}^\beta}{\delta b_\rho^1(x)}$:

$$\partial_\rho^x \frac{\delta S_{ms}^\beta}{\delta b_\rho^1(x)} = i g \beta m^2 \int d^4y \partial_\mu^x f(x-y) T_B^* [\hat{b}_\mu^{pk}(x) \partial_\gamma^y \frac{\delta S}{\delta b_\gamma^k(y)}] . \quad (4.7)$$

Метод индукции, подобный методу, примененному в приложении, позволяет тогда доказать выполнимость соотношения

$$\partial_\rho^x \frac{\delta S_{ms}^{\beta tree}}{\delta b_\rho^i(x)} = 0 \quad (4.8)$$

в любом порядке по константе связи. Поэтому

$$\partial_\rho^x \frac{\delta H_{ms}^{\beta tree}}{\delta b_\rho^i(x)} = 0, \quad (4.9)$$

откуда, с учетом уравнения на $H_{ms}^{\beta tree}$, получается (4.6).

Из инвариантности $S_{ms}^{\beta tree}$ относительно замены (4.3) сразу следует:

1) сингулярная по массе часть пропагатора (4.5) выпадает из всех древесных диаграмм, и в S_{ms}^{tree} может быть проведен корректный предельный переход к $m = 0$;

2) оставшиеся спаривания $-i \delta_{\mu\nu} \delta^{ik} \Delta_m^c(x-y)$ могут быть заменены на поперечные $-i \delta^{ik} (\delta_{\mu\nu} - \square^{-1} \partial_\mu^x \partial_\nu^x) \Delta_m^c(x-y)$.

Ясно, что предел нулевой массы для той части S_{ms}^{tree} , что соответствует испусканию и поглощению квантов со спиральностями ± 1 , существует и совпадает с древесной частью полученной в работах /2,3,4,5, 11/ S - матрицы теории Янга и Миллса в калибровке Лоренца и древесной частью S - матрицы (2.1), взятой на пространстве поперечных состояний. Как показано в работе /24/, матричные элементы S_{ms}^{tree} , взятые между состояниями, в которых присутствует хотя бы один квант с нулевой спиральностью, не равны нулю в этом пределе, в отличие от теории массивного нейтрального векторного поля, взаимодействующего с сохраняющимся током.

5. Заключение

Из проведенного рассмотрения явствует, что в безмассовой теории Янга и Миллса при построении древесной части S - матрицы и

работе с ней применимы традиционные методы, используемые в ферми-групповой формулировке квантовой электродинамики /7,8,9/. Калибровочно-инвариантное включение взаимодействия с другими полями оставит в силе наши рассуждения, если рассматривать только совокупность диаграмм без формируемых одними янг-миллсонами замкнутых петель.

Автору приятно выразить признательность И.В. Полубаринову за постоянное внимание и многочисленные полезные замечания, В.Н. Первушину за полезные и стимулирующие обсуждения.

Приложение

Докажем методом индукции соотношение (2.8). Некоторые вычисления позволяют представить $\partial_\rho^x \frac{\delta \tilde{S}'}{\delta b_\rho^{l'}(x)}$ в рекуррентной форме:

$$\partial_\rho^x \frac{\delta \tilde{S}'}{\delta b_\rho^{l'}(x)} = i g \{ N \{ \partial_\rho b_\rho^p(x) A^l(x) \} \epsilon_{1p l} - \quad 1$$

$$- N \{ \partial_\nu^x \partial_\rho^x b_\rho^p(x) \tilde{T}^* \{ b_\nu^{l'}(x) \tilde{S}' \} \} \epsilon_{1p l} + \quad 2$$

$$+ \int d^4 y [\partial_\nu^x P(x-y) + K_\nu(x-y)] \tilde{T}^* \{ b_\nu^{k'}(x) \partial_\rho^y \frac{\delta \tilde{S}'}{\delta b_\rho^{l'}(y)} \} \epsilon_{1k l} + \quad 3$$

$$+ \int d^4 y P(x-y) \tilde{T}^* \{ \partial_\nu b_\nu^{k'}(x) \partial_\rho^y \frac{\delta \tilde{S}'}{\delta b_\rho^{l'}(y)} \} \epsilon_{1k l} + \quad 4$$

$$+ \int d^4 y d^4 z \square f_{\rho}^1(x-y) P(x-z) \left[\frac{\delta}{\delta b_{\rho}^{p'}(y)} - \partial_{\lambda}^y \frac{\delta}{\delta \partial_{\lambda}^y b_{\rho}^{p'}(y)} \right] \partial_y^z \frac{\delta \tilde{S}'}{\delta b_{\rho}^{l'}(z)} \epsilon_{ipl} \quad 5$$

$$+ \int d^4 y \square \omega^k(x) P(x-y) \partial_{\rho}^y \frac{\delta \tilde{S}'}{\delta b_{\rho}^{l'}(y)} \epsilon_{ikl} \quad 6 \text{ (II.1)}$$

Легко указать конкретный вид c - функций $K(x)$, $P(x)$ и q - функций $A^l(x)$, однако мы этого делать не будем и отметим лишь, что нулевая по константе g часть $A^l(x)$ носит c - числовой характер и равна $\square \omega^l(x)$.

Используя формулу (П. 1), , нетрудно проверить выполнимость (2.8) в первом порядке по константе связи. Предположив затем

$$\Phi_{\text{физ}}^{ac+}(f) \partial_{\rho}^x \frac{\delta S'_{\text{tree}}^{(n)}}{\delta b_{\rho}^{i'}(x)} \Phi_{\text{физ}}^{ac}(i) = 0, \quad (\text{П. 2})$$

мы докажем справедливость (2.8) для $(n+1)$ - го порядка. У всей совокупности диаграмм k -го порядка имеется связанная часть и несвязанная, образованная перемножением под знаком N - произведения связанных частей более низких, чем k , порядков. Из этого факта вытекает, что если (П. 2) выполняется, то выполняется раздельно для связанной и несвязанной частей $\tilde{S}'_{\text{tree}}^{(n)}$, а следовательно, с учетом определения несвязанной части

$$\Phi_{\text{физ}}^{ac+}(f) \partial_{\rho}^x \frac{\delta \tilde{S}'_{\text{tree}}^{(k)}}{\delta b_{\rho}^{i'}(x)} \Phi_{\text{физ}}^{ac}(i) = 0, \quad k \leq n. \quad (\text{П. 3})$$

Итак, мы видим: для доказательства выполнимости соотношений (2.8)

в $n + 1$ -ом порядке достаточно доказать, что

$$\Phi_{\text{физ}}^{\text{ас}+}(\rho) \partial_{\rho}^x \frac{\delta [\tilde{S}_{\text{tree}}^{(n+1)}]_{\text{связ.}}}{\delta b_{\rho}^{i'}(x)} \Phi_{\text{физ}}^{\text{ас}}(i) = 0. \quad (\text{П.4})$$

Вклады в левую часть (П . 4) от членов 1 и 2 правой части (П . 1) равны нулю независимо от предположения (П . 2) в силу одних условий (2.4). Вклады от членов 3,4,5,6 равны нулю в силу следящего предположения и его следствий - соотношений (П . 3). Таким образом, выполнимость уравнений (2.8) доказана в любом порядке по константе связи.

Литература

1. R.P. Feynman, Acta Physica Polonica, XXIV, 697 (1963).
2. B.S. De Witt, Phys.Rev., 162, 1195, 1239 (1967).
3. L.D. Faddeev and V.N. Popov. Phys.Lett., 25B, 29 (1967).
4. В.Н. Попов, Л.Д. Фаддеев. Препринт ИТФ 67- 36, Киев, 1967.
5. S. Mandelstam, Phys.Rev., 175, 1580 (1968).
6. C.N. Yang, R.L. Mills. Phys.Rev., 96, 191 (1954).
7. E. Fermi, Rev.Mod.Phys., 4, 131 (1932).
8. S. Gupta, Proc.Phys.Soc., A63, 682 (1950) .
9. И.В. Полубаринов. Препринт ОИЯИ, Р-2421, Дубна, 1965.
10. И.В. Полубаринов. Сообщение ОИЯИ, Р2-4564, Дубна, 1969.
11. E.S. Fradkin, I.V. Tyutin. Phys.Lett., 30B, 562 (1969).
12. J. Schwinger. Phys.Rev., 125, 1043 (1962).
13. J. Schwinger. Phys.Rev., 127, 324 (1962).
14. И.Б. Хриплович. ЯФ, 10, 409 (1969).
15. A.A. Slavnov. Preprint ИТФ-69-20. Kiev, 1969.
16. А.И. Ахиезер, В.Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика. Наука, Москва, 1969.

17. B. Lautrup. Mat.Fys.Medd.Dan.Vid.Selsk., 35, No11 (1967).
18. Е.С. Фрадкин. Проблемы теоретической физики, Наука, Москва, 1969, стр. 386.
19. S.Hori. Progr.Theor.Phys., 7, 578 (1952).
20. Y.Nambu. Phys.Lett., 26B, 626 (1968).
21. Ф.А. Березин. Метод вторичного квантования. Наука, Москва, 1965, стр. 225.
22. Х. Умэдзава. Квантовая теория поля. ИЛ, Москва, 1958.
23. В.И. Огневский, И.В. Полубаринов. ЖЭТФ, 46, 2102 (1964).
24. А.А. Славнов, Л.Д. Фаддеев. ТМФ, 3, 18 (1970).
25. В.Н. Первушин. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. ОИЯИ, 2-5450, Дубна, 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 февраля 1971 года.