С 323.5
А-92

15/III

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

690/2-71

Р2 - 5566

А. Атанасов

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ШМИДТА ДЛЯ РЕШЕНИЯ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

1971

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 5566

А. Атанасов

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ШМИДТА ДЛЯ РЕШЕНИЯ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Классический метод Шмидта для решения интегральных уравнений используется в теории сильновзаимодействующих частиц/1/. В работах/2,3,4/ этот метод под названием "метод квазичастиц" успешно применялся в нерелятивистской проблеме двух тел, причем для определенного типа взаимодействия получаются удобные для вычислений выражения.

В настоящей работе метод Шмидта используется для решения уравнения релятивистской амплитуды рассеяния, предложенного Тодоровым/5/, которое является трехмерным уравнением типа Липмана-Швингера. Все результаты, полученные методом Шмидта в нерелятивистском потенциальном рассеянии легко применяются в релятивистской двухчастичной проблеме, рассматриваемой в квазипотенциальном приближении. При этом получаются аналитические выражения, которые дают: а) зависимость между константой связи и энергией основного связанного состояния, б) амплитуду и сечение рассеяния.

Рассмотрим систему двух бесспиновых частиц, которая в системе центра масс описывается квазипотенциальным уравнением.

$$T_w(\vec{p},\vec{q}) = V_w(\vec{p},\vec{q}) + \frac{1}{\pi^2 w}\int V_w(\vec{p},\vec{k})(k^2-b^2-i0)^{-1}\, T_w(\vec{k},\vec{q})\,d^3k\,, \qquad (1)$$

Квазипотенциал V_w в (1) определяется из теории возмущений в виде ряда по константе связи, а на энергетической поверхности выполнено условие

$$p_1^0 + p_2^0 = w = q_1^0 + q_2^0\,, \qquad \vec{p}^{\,2} = \vec{q}^{\,2} = b^2(w), \qquad (2)$$

$$4w^2 b^2(w) = w^4 - 2(m_1^2+m_2^2)w^2 + (m_1^2-m_2^2)^2.$$

Уравнение (1) является уравнением типа Липмана-Швингера с функцией Грина $G = \frac{1}{\pi^2 w}(k^2 - b^2 - i0)^{-1}$, и его можно представить в виде

$$T = V + VGT = V + TGV . \tag{3}$$

Все результаты, полученные для нерелятивистского уравнения Липмана-Швингера в/3/ и/4/ методом Шмидта, непосредственно используются и для уравнения (3). Так, например, для первого квазиборновского приближения амплитуды рассеяния получается

$$T = V + V\Phi\left[\frac{J(s)}{1 - J(s)}\right]\Psi^+ V , \tag{4}$$

где

$$J(s) = \Psi^+ V\, G(s)\, V\, \Phi , \qquad s = b^2 + i0 . \tag{5}$$

Функции Φ и Ψ^+ выбираются таким способом, чтобы ядро $K_1(s)=G(s)V_1$, ($V_1 = V - V\Phi\Psi^+ V$) не обладало собственным значением η вне единичной окружности. Идеальный случай имеем, когда самым большим собственным значением уравнения

$$G(s)\, V\, \Psi = \eta(s)\, \Psi \tag{6}$$

является η_1, все остальные собственные значения находятся в единичной окружности, а в качестве вектора состояния мы выбираем собственные векторы уравнения

$$K(s)\, \Phi = \eta_1(s)\, \Phi , \tag{7}$$

$$\Psi^+ K^+(s^*) = \eta_1(s)\, \Psi^+ , \tag{8}$$

нормированные таким образом, что

$$\Psi^+ V \Phi = 1 . \tag{9}$$

Нахождение функций Φ и Ψ^+ из уравнений (7) и (8) не проще, чем решение уравнения Липмана-Швингера (1). Практически Φ и Ψ^+

не определяются, как точные решения, а выбираются таким способом, чтобы они обладали свойствами решения (7)-(9). Эта процедура осуществима, так как (6) есть точное уравнение Шредингера для энергий b^2 с фиктивным потенциалом $V/\eta(s)$.

Энергия основного связанного состояния b^2_B определяется уравнением

$$J(b_B)=1. \tag{10}$$

При рассмотрении модели двух скалярных полей с массами m_1 и m_2 , взаимодействующих между собой с обменом скалярным мезоном, самое низкое приближение потенциала есть фурье-образ юкавского потенциала.

Решить уравнение (1) методом Шмидта просто, так как уравнение $G(s)V\Phi=\Phi$ в координатном представлении совпадает с уравнением Шредингера с потенциалом Юкавы:

$$\left(\Delta+b^2+\frac{2m_1m_2}{w}\frac{a}{r}e^{-\mu r}\right)\Phi=0. \tag{11}$$

Сравнивая (11) с полученным в работе /3/ уравнением, устанавливаем, что результаты, полученные в нерелятивистской задаче при

$$\Phi=e^{ikr}\left(1-e^{-r}\right), \tag{12}$$

могут использоваться в квазипотенциальном уравнении, заменяя собственно величины

$$k^2\to\frac{b^2}{\mu^2},$$
$$\lambda\to\frac{2m_1m_2}{\mu w}a. \tag{13}$$

Например, для функции $J(s)$ получается

$$J(s)=\frac{i\,2m_1m_2a}{b\,w}\times \tag{14}$$

$$\times \frac{\frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{2\mu-2ib}{\mu-2ib}\right)+Li_2\left(\frac{-2\mu}{\mu-2ib}\right)+Li_2\left(\frac{-\mu}{2\mu-2ib}\right)-Li_2\left(\frac{-\mu}{\mu-2ib}\right)-Li_2\left(\frac{-\mu}{\mu-ib}\right)}{\ln\left\{\frac{(\mu-2ib)(3\mu-2ib)}{(2\mu-2ib)^2}\right\}},$$

где функция

$$Li_2(-z) = -\int_0^z x^{-1}\ln(1+x)\,dx \qquad (15)$$

является известной дилогарифмической функцией /6/. В связанном состоянии b_B^2 принимает отрицательное значение, а зависимость между константой связи и энергией основного состояния получается из уравнения

$$a = \frac{\beta w}{2m_1 m_2} \times \frac{\ln\left\{\frac{(\mu+2\beta)(3\mu+2\beta)}{(2\mu+2\beta)^2}\right\}}{\frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{2\mu+2\beta}{\mu+2\beta}\right)+Li_2\left(\frac{-2\mu}{\mu+2\beta}\right)+Li_2\left(\frac{-\mu}{2\mu+2\beta}\right)-Li_2\left(\frac{-\mu}{\mu+2\beta}\right)-Li_2\left(\frac{-\mu}{\mu+\beta}\right)}, \qquad (16)$$

где $b_B = i\beta$.

Когда μ стремится к нулю, из выражения (16) получается релятивистская формула Бальмера для энергии основного состояния

$$w^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 (1-a^2)^{1/2}. \qquad (17)$$

При малой массе обменной частицы уравнение (16) сводится к

$$\beta = \frac{m_1 m_2}{w} a - \mu, \qquad (18)$$

а энергия связанного состояния будет положительным действительным корнем уравнения

$$w^4 - 2(m_1^2+m_2^2)w^2 - 8m_1 m_2 a\mu w + (m_1^2-m_2^2) + 4m_1^2 m_2^2 a^2 = 0. \qquad (19)$$

Если w разложим по степеням μ и ограничимся членами первой степени, получим

$$w = [m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 (1-a^2)^{1/2}]^{1/2} + \frac{a}{(1-a^2)^{1/2}}\mu . \qquad (20)$$

Второй член в последнем равенстве дает поправку к энергии основного состояния, появляющуюся, когда мы учитываем массу обменной частицы.

Борновское приближение для амплитуды рассеяния вне энергетической поверхности определяется выражением

$$f^{B}(\vec{k},\vec{k}\,') = -\frac{\mu(2\pi)^2}{b}T^{B}(\vec{k},\vec{k}\,') = \frac{2m_1 m_2}{\mu\, w}\,\alpha\,\left(1+\frac{4b^2}{\mu^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{-1}. \tag{21}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{k}\cdot\vec{k}\,'}{|k|\cdot|k'|}.$$

Из общего выражения амплитуды в квазиборновском приближении (4) в конкретном случае получаем

$$f^{QB}(k,k') = \frac{2m_1 m_2}{\mu\, w}\,\alpha\,\left(1+\frac{4b^2}{\mu^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{-1} + g(b^2), \tag{22}$$

где поправочный член g определяется из выражения

$$g(b^2) = \frac{-m_1 m_2\alpha}{2w}\cdot\frac{\mu}{b^2}\,\frac{J(b^2+i0)}{1-J(b^2+i0)}\times$$

$$\times\frac{\ell n^2((\mu-ib)/(\mu-2ib))}{\ell n((2\mu-2ib)^2/(\mu-2ib)(3\mu-2ib))}. \tag{23}$$

Учитывая (22) и (23), получим в квазиборновском приближении сечения рассеяния

$$\sigma^{QB} = \sigma^{B}(w) + \frac{4\pi\, m_1 m_2\mu}{b^2 w}\,\alpha\,\ell n\left(1+\frac{4b^2}{\mu^2}\right)\times \mathrm{Re}\, g(b) + 4\pi|g(b)|^2, \tag{24}$$

где σ^{B} – сечение рассеяния в борновском приближении –равно:

$$\sigma^{B}(w) = \frac{16\pi\, m_1^2 m_2^2\alpha^2}{w^2}\cdot\frac{1}{\mu^2+4b^2}. \tag{25}$$

Борновское приближение дает хорошие результаты при условии, что энергия частиц достаточно высока. В этом смысле по своей природе оно является высокоэнергетическим приближением. Квазиборновское приближение дает возможность получить поправку к борновской амплитуде, чтобы получилось лучшее приближение и к низким энергиям. При высокой энергии для амплитуды рассеяния нужно использовать выражение, которое получается на основе эйконального приближения /5/.

Метод Шмидта с успехом используется при рассмотрении релятивистской задачи двух тел в квазипотенциальном подходе. Полученные приближенные выражения энергий основного состояния амплитуды и сечения рассеяния являются удобными для практических вычислений.

Метод можно успешно использовать и для решения задач в подходе Логунова и Тавхелидзе /7/.

В заключение автор выражает глубокую благодарность проф. И. Тодорову за полезные дискуссии и советы.

Литература

1. S. Weinberg. Proceedings of the 1962 High-Energy Conference at CERN (CERN, Geneva, 1962), p. 638.
2. S. Weinberg. Phys. Rev., 130, 776 (1963).
3. S. Weinberg. Phys. Rev., 131, 440 (1963).
4. M. Scadron, S. Weinberg. Phys. Rev., 133, B1589 (1964).
5. I.T. Todorov. Quasipotential equation for the relativistic Balmer formula, Preprint IC/70/122, Trieste, 1970.
6. L. Levin. Dilogarithms and Associated Functions (MacDonald, London, 1958).
7. A.A. Logunov and A.N. Tavkhelidze. Nuovo Cimento, 29, 380 (1963).

Рукопись поступила в издательский отдел
12 января 1971 года.