ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 5527

А.Д.Донков

ОБ АСИМПТОТИКЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ, СВЯЗАННОГО С МОДИФИЦИРОВАННЫМ УРАВНЕНИЕМ МАТЬЕ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1970

Р2 - 5527

А.Д.Донков

ОБ АСИМПТОТИКЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ, СВЯЗАННОГО С МОДИФИЦИРОВАННЫМ УРАВНЕНИЕМ МАТЬЕ

Направлено в ТМФ

В этой заметке мы рассмотрим асимптотику собственных значений уравнения

$$y''(z) + (h - 2\theta \operatorname{ch} 2z)\, y(z) = 0 \qquad (1)$$

при больших значениях параметра θ. Так как (1) является уравнением типа уравнения Матье, целесообразно напомнить основные факты теории уравнений Матье.

Как известно /1/, при решении двумерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + a^2 W = 0 \qquad (2)$$

в ортогональных эллиптических координатах

$$x = c \operatorname{ch} u \cos v \qquad y = c \operatorname{sh} u \sin v$$

$$(0 \leq u < \infty, \quad 0 \leq v < 2\pi) \qquad (3)$$

после подстановки $W = U(u)\,V(v)$ возникают следующие два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{d^2 V}{d v^2} + (h - 2\theta \cos 2v)\, V(v) = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{d^2U}{du^2} - (h - 2\theta \,\mathrm{ch}\, 2u)\, U(u) = 0. \qquad (5)$$

Здесь h и θ – константы разделения переменных, причём h – произвольный параметр, а θ удовлетворяет соотношению

$$\theta = \frac{a^2 c^2}{4}. \qquad (6)$$

Уравнение (4) называется уравнением Матье (У.М.), а уравнение (5), которое можно формально получить из (4), полагая $v = iu$, носит название модифицированного уравнения Матье (м.у.М.).

Уравнения Матье имеют три особых точки. Две из них являются конечными и регулярными с показателями /2/ 0 и 1/2. Третья особая точка находится на бесконечности и является нерегулярной, что значительно затрудняет исследование свойств уравнений. Отметим, что (у.М.) можно получить из дифференциального уравнения типа Фукса с пятью регулярными особыми точками z_1, z_2, z_3, z_4 и ∞ путем слияния последних трех точек /2/.

Согласно общей теории /1,2/, уравнения (4) и (5) имеют периодические решения, которые называются функциями Матье и модифицированными функциями Матье первого рода соответственно. Эти решения возникают, например, при рассмотрении граничной задачи Штурма-Лиувилля для уравнения (4) с граничными условиями

$$V(0) = V(\pi) \qquad (7a)$$

$$V'(0) = V'(\pi) \qquad (7б)$$

Данная задача имеет решения только при некоторых (собственных) значениях $h(\theta)$. Для собственных значений и соответствующих им решений обычно используются обозначения $b_n(\theta)$ и $se_n(v, \theta)$ при граничном условии (7а), $a_n(\theta)$ и $ce_n(v,\theta)$ – при граничном условии (7б). Функция $ce_n(v, \theta)$ – чётная, а $se_n(v, \theta)$ – нечётная при этом $ce_{2n}(v)$ и $se_{2n}(v)$ имеют период π, а $ce_{2n+1}(v)$ и $se_{2n+1}(v)$ – период 2π.

Модифицированные функции Матье первого рода для собственных значений $a_n(\theta)$ и $b_n(\theta)$ обозначаются посредством $Ce_n(u,\theta)$ и $Se_n(u, \theta)$ и являются соответственно чётными и нечётными функциями аргумента u с периодами π и 2π.

Поскольку общие решения уравнений типа (4) и (5) не могут быть периодическими /2/, то существуют вторые непериодические решения. В литературе они обозначаются соответственно $fe_n(v, \theta)$ и $ge_n(v, \theta)$ (для $a_n(\theta)$ и $b_n(\theta)$, уравнение (4)) и $Fe_n(u,\theta)$ и $Ge_n(u,\theta)$ (для $a_n(\theta)$ и $b_n(\theta)$, уравнения (5)).

Если непериодические решения уравнений (4) и (5) представлены в виде рядов по модифицированным функциям Бесселя второго рода Y_n, то они обозначаются символами $fey_n(v,\theta)$, $gey_n(v,\theta)$ и $Fey_n(u,\theta)$ и $Gey_n(u,\theta)$. Если те же самые решения получены в виде разложений в ряды по модифицированным функциям третьего рода K, то употребляются следующие обозначения: $fek_n(v,\theta)$, $gek_n(v,\theta)$, $Fek_n(u,\theta)$ и $Gek_n(u,\theta)$.

Стандартный метод отыскания решений уравнений (4) и (5) состоит в представлении искомых функций в виде рядов по решениям предельных уравнений, получающихся из (4) и (5) при некоторых предельных значениях параметра θ: $\theta = 0$ и $\theta \to \infty$.

Для коэффициентов этих рядов возникают рекуррентные соотношения, причём требование сходимости выделяет собственные значения.

Отметим, что данная процедура[x/] применима ко всем дифференциальным уравнениям с двумя конечными регулярными и одной бесконечной иррегулярной особыми точками (например, к уравнениям для сфероидальных волновых функций).

Таким методом, исходя из разложений по решениям предельного уравнения, возникающего при $\theta = 0$, можно получить формулы "чётности" для собственных значений $a_n(\theta)$ и $b_n(\theta)$:

$$a_{2n}(-\theta) = a_{2n}(\theta) \qquad b_{2n}(-\theta) = b_{2n}(\theta)$$
$$a_{2n+1}(-\theta) = b_{2n+1}(\theta) \qquad b_{2n+1}(-\theta) = a_{2n+1}(\theta) \; . \qquad (8)$$

Если же исходить из разложений по решениям предельного уравнения, возникающего при $\theta \to \infty$, можно найти[/4/] асимптотику собственных значений:

$$a_n(\theta) \approx b_{n+1}(\theta) = -2\theta + 2(2n+1)\theta^{1/2} - \frac{1}{4}(2n^2+2n+1). \qquad (9)$$

Найдем теперь асимптотику при $\theta \to \infty$ собственных значений уравнения

$$\frac{d^2y}{dz} + (h - 2\theta \operatorname{ch} 2z)\, y(z) = 0, \qquad (10)$$

которое описывает s -волну одной релятивистской модели гармонического осциллятора[/5/].

Формально (10) можно получить из модифицированного уравнения Матье (5), произведя замену

x/ Укажем на аналогичный метод эталонного уравнения для сингулярных задач Штурма-Лиувилля(см. работу[/3/], в которой имеется соответствующая библиография).

$$h \to -h$$
$$\theta \to -\theta. \qquad (11)$$

Однако из (9) сразу видно, что при этом собственные значения получаются комплексными. Использовать в данном случае соотношения (8) мы не имеем права, так как они доказаны лишь для малых значений параметра θ. При больших θ эти соотношения могут не иметь места, что будет ясно из дальнейшего. Поэтому для получения асимптотики собственных значений при больших θ мы применим процедуру, аналогичную описанной в работе[/4/].

После подстановки

$$x = 2\theta^{\frac{1}{4}} \operatorname{sh} z \qquad (12)$$

уравнение (10) алгебраизируется:

$$(x^2 + 4\theta^{\frac{1}{2}}) \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (h - 2\theta - \theta^{\frac{1}{2}}x^2)\, y(x) = 0\,. \qquad (13)$$

Так как при $\theta \to \infty$ это уравнение переходит в уравнение для функции параболического цилиндра[/1/]:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{h-2\theta}{4\sqrt{\theta}} - \frac{x^2}{4}\right) y(x) = 0, \qquad (14)$$

то мы будем, согласно сказанному выше, искать решения (13) в виде разложения в ряд по решениям предельного уравнения (14):

$$y(x,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(\theta)\, D_n(x)\,. \qquad (15)$$

Подставляя (15) в (13) и принимая во внимание уравнение для функции $D_n(x)$ /1/:

$$4D_n''(x) - x^2 D_n(x) = -2(2n+1) D_n(x)$$

и равенство /4/

$$x^2 D_n''(x) + x D_n'(x) = \frac{1}{4} D_{n+4} + \frac{1}{2} D_{n+2} - \frac{1}{4}(2n^2+2n+1) D_n - \frac{n(n-1)}{2} D_{n-2} + \frac{1}{4} n(n-1)(n-2)(n-3) D_{n-4} ,$$

получаем следующее пятичленное рекуррентное соотношение:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Big\{ \frac{1}{4} D_{n+4} + \frac{1}{2} D_{n+2} - \frac{n(n-1)}{2} D_{n-2} + \frac{1}{4} n(n-1)(n-2)(n-3) D_{n-4} + \Big[h - 2\theta - 2(2n+1)\sqrt{\theta} - \frac{1}{4}(2n^2+2n+1) \Big] D_n \Big\} = 0 .$$

Отсюда в пределе $\theta \to \infty$ находим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Big[\frac{h}{\sqrt{\theta}} - 2\sqrt{\theta} - 2(2n+1) - \frac{1}{4\sqrt{\theta}}(2n^2+2n+1) \Big] D_n(x) = 0 . \quad (16)$$

Так как функции $D_n(x)$ линейно независимы, то (16) имеет место лишь в том случае, когда все коэффициенты при $D_n(x)$ обращаются в нуль. Это дает искомую асимптотическую формулу x/ для собственных значений $h_n(\theta)$ уравнения (10) при $\theta \to \infty$:

x/ Формулу (17) можно получить также, применяя метод теории возмущений к уравнению (10).

$$h_n(\theta) \approx 2\theta + 2(2n+1)\theta^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}(2n^2+2n+1) . \qquad (17)$$

Теперь можно непосредственно убедиться в том, что формулы (8) не имеют места при $\theta \to \infty$. Действительно, учитывая, что (10) получается из модифицированного уравнения Матье (5) заменой (11), из (9) с помощью формул (8) находим при чётном n ($h_n(-\theta) = h_n(\theta)$, $\tilde{h}_n(\theta) = -h_n(\theta)$):

$$\tilde{h}_n(\theta) = 2\theta - 2(2n+1)\theta^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}(2n^2+2n+1) ,$$

что, очевидно, не совпадает с (17).

Заметим, что если рассматривать h как функцию $\sqrt{\theta}$, а не θ, то (17) формально можно получить из (9) заменой

$$h(-\sqrt{\theta}) \to -h(\theta) , \quad \sqrt{\theta} \to -\sqrt{\theta} . \qquad (18)$$

Но это преобразование не совпадает с заменой (11), которая связывала уравнения (10) и (5).

В заключение автор выражает благодарность своим соавторам по работе /5/, в которой возникла настоящая задача, а также Л.И. Пономареву и Н.Б. Скачкову за полезные обсуждения.

Литература

1. Г. Бейтман, А. Эрдейн. ВТФ, т.3, Москва, 1967.
   А.В. Мак-Лахлан. Теория и приложения функций Матье. ИЛ, Москва, 1953.
2. Э.Л. Айнс. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, 1939.
3. С.Ю. Славянов. Дифференциальные уравнения, т. 5 (№2), 313 (1969).
4. R. Sips Trans. Amer. Math. Soc., 66, 93 (1949).
5. A.D. Donkov, V.G. Kadyshevsky, M.D. Mateev, R.M. Mir-Kasimov, Preprint JINR E2-5339, Dubna (1970).

Рукопись поступила в издательский отдел
18 декабря 1970 года.