СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 5522

В.Н. Стрельцов

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

1970

P2 - 5522

В.Н. Стрельцов

ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

1. Результаты предыдущей работы [1] говорят о том, что при рассмотрении вопросов предельного перехода от релятивистских волновых уравнений к нерелятивистским и инвариантности последних мы также должны опираться не на обычные нерелятивистские преобразования, а на так называемые пространственноподобные ("фазовые") преобразования.

В случае квантовой механики этот шаг дополнительно подкрепляется тем фактом, что обычные нерелятивистские преобразования приводят к таким формулам преобразований первых производных волновой функции, что для энергии и импульса плоской волны будем иметь

$$p_x' = p_x\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right) - \frac{\beta}{c}\,\mathcal{E}, \qquad \mathcal{E}' = (\mathcal{E} - \beta c p_x)\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right)$$

вместо формул преобразования

$$p_x' = \left(p_x - \frac{\beta}{c}\,\mathcal{E}\right)\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right), \qquad \mathcal{E}' = \mathcal{E}\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right) - \beta c\, p_x . \tag{1}$$

В то время как использование нерелятивистских пространственноподобных преобразований позволяет получить именно формулы (1).

Итак, возьмем пространственноподобные преобразования в нерелятивистском и галилеевом приближениях:

$$\begin{aligned} x' &= x\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right) - \beta c t, & t' &= \left(t - \frac{\beta}{c}x\right)\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right), \\ x' &= x, & t' &= t - \frac{\beta}{c}x, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\beta = v/c .$$

При этом сначала мы покажем, что их применение действительно позволяет получить требуемые условия для вторых производных от волновой функции ψ, использованные нами ранее /2/.

Рассмотрим для этого, например, формулы преобразований $\partial^2\psi'/\partial x'\partial t'$ (и $\partial^2\psi'/\partial t'^2$) в нерелятивистском и галилеевом приближениях.

$$\frac{\partial^2\psi'}{\partial x'\partial t'} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}(1+2\beta^2) + \frac{\beta}{c}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}(1+\beta^2) + \beta c\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(1+\frac{1}{2}\beta^2), \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2\psi'}{\partial x'\partial t'} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t} + \frac{\beta}{c}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, \quad (3')$$

$$\frac{\partial^2\psi'}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}(1+\beta^2) + 2\beta c\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}(1+\frac{1}{2}\beta^2) + (\beta c)^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2\psi'}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}. \quad (4')$$

Далее будем рассуждать следующим образом.

Коль скоро переход от нерелятивистского приближения к галилеевскому связан с дополнительным отбрасыванием членов порядка β^2 по сравнению с 1, то мы вправе связывать исчезновение третьего члена в формуле (3) при переходе к (3') с выполнением или условия

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \approx \frac{\beta^2}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, \quad (5)$$

или условия

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \approx \frac{\beta}{c}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}, \quad (6)$$

или их обоих одновременно.

Привлечение формул (4) и (4') приводит нас к последней возможности. В результате имеем:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \approx \frac{\beta}{c}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t} \approx \frac{\beta^2}{c^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}. \tag{7}$$

Последнее выражение содержит, очевидно, все необходимые условия, которые использовались нами ранее для перехода от релятивистского уравнения Шредингера к нерелятивистскому уравнению (S) /2/. Что же касается процедуры доказательства инвариантности уравнения (S) , то она практически не изменяется.

2. Перейдем теперь к обсуждению вопроса о виде нерелятивистского волнового уравнения при наличии электромагнитного поля.

Для этого мы воспользуемся упомянутым нерелятивистски инвариантным уравнением и учтём присутствие электромагнитного поля. В результате получим[x]

$$-[\psi\,(E-e\phi)^2\,\psi]^{1/2} = \frac{1}{2m}(\vec{P}-\frac{e}{c}\vec{A})^2\psi + mc^2\psi, \tag{8}$$

где, как обычно, $E=ih\partial/\partial t$ и $\vec{P}=-ih\,\mathrm{grad}$.

Очевидно, что полученное таким образом уравнение (8), как и в свободном случае, отличается от соответствующего уравнения Шредингера в электромагнитном поле формой члена в левой части. Его можно свести к указанному уравнению Шредингера, если только выполнено следующее специальное условие:

$$-[\psi\,(E-e\phi)^2\psi]^{1/2} = (E-e\phi)\,\psi, \tag{9}$$

или

---

[x] Как и раньше, мы выбрали положительное значение корня.

$$-\left[\psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{ie}{h} \frac{\partial \phi}{\partial t} \psi + 2 \frac{ie}{h} \phi \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{e^2}{h^2} \phi^2 \psi\right]^{1/2} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{ie}{h} \phi \psi . \quad (9')$$

Откуда, возводя обе части равенства (9') в квадрат и используя условие

$$-\left(\psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)^{1/2} = \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (А)$$

сведения уравнения (S) к уравнению Шредингера/2/, получим, в частности,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \psi = 0,$$

$$\phi = \mathrm{const} \cdot f(x, y, z) . \quad (Б)$$

Таким образом, если опираться на требование нерелятивистской инвариантности, то можно сказать, что уравнение Шредингера в электромагнитном поле будет давать правильные результаты, если для его решений выполнено условие (А), а скалярный потенциал электромагнитного поля не зависит от времени.

Отметим здесь, что коль скоро при получении нерелятивистского уравнения (8) мы не пользовались никакими гипотетическими условиями, то мы вправе ожидать, что указанное уравнение должно удовлетворять требованию инвариантности относительно нерелятивистских пространственноподобных преобразований (2).

То, что это требование действительно выполнено, можно легко проверить, привлекая условия (7), выписанные ниже формулы (12), и результаты работы/2/.

3. Коснемся теперь вопроса инвариантности нерелятивистского уравнения Паули для частицы со спином 1/2 в электромагнитном поле

$$(E - mc^2)\psi = \left[\frac{1}{2m}\left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\phi + \frac{eh}{2mc}\vec{\sigma}\,'\vec{H} - \frac{ieh}{2mc}\vec{a}\,\vec{E}\right]\psi \quad (10)$$

относительно нерелятивистских преобразований (2).

При этом мы учтем, что в нерелятивистском приближении формулы преобразований для компонент волновой функции имеют вид /3/:

$$\psi_{\rho} = (1+\frac{1}{8}\beta^{2})\psi'_{\rho} + \frac{1}{2}\beta\,(1+\frac{3}{8}\beta^{2})\psi'_{\sigma}, \tag{11}$$

где ρ =1,2,3,4, σ =4,3,2,1, а формулы преобразований для потенциалов и напряженностей электромагнитного поля имеют форму :

$$A_x = (A'_x + \beta\phi')(1+\frac{1}{2}\beta^2),\ A_y = A'_y,\ A_z = A'_z,\ \phi = \phi'(1+\frac{1}{2}\beta^2) + \beta A'_x \tag{12}$$

и

$$E_x = E'_x,\ E_y = E'_y(1+\frac{1}{2}\beta^2) + \beta H'_z,\ E_z = E'_z\,(1+\frac{1}{2}\beta^2) - \beta H'_y, \tag{13}$$

$$H_x = H'_x,\ H_y = (H'_y - \beta E'_z)(1+\frac{1}{2}\beta^2),\ H_z = (H'_z + \beta E'_y)(1+\frac{1}{2}\beta^2). \tag{14}$$

Здесь формулы (13) и (14) получены на основании (12) и (2) с привлечением известных выражений

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\phi, \qquad \vec{H} = \mathrm{rot}\,\vec{A}. \tag{15}$$

Прежде чем перейти к непосредственному рассмотрению данного вопроса, заметим следующее.

Коль скоро релятивистское волновое уравнение в электромагнитном поле инвариантно относительно преобразований Лоренца, то оно должно быть инвариантно (при малых скоростях) и относительно вытекающих из преобразований Лоренца нерелятивистских преобразований (2). Аналогичный вывод будет справедлив и для волнового уравнения для частицы со спином

$1/2$ в электромагнитном поле. Но последнее уравнение отличается от первого наличием двух членов, совпадающих (с точностью до постоянного коэффициента) с двумя последними членами уравнения (10). Отсюда можно заключить, что сумма указанных членов независимо от других должна удовлетворять требованию нерелятивистской инвариантности. Поэтому эти члены можно исключить из рассмотрения.

Кроме того, если, например, мы будем исходить из уравнения Паули для ψ_1, то после перехода к другой системе отсчёта получим уравнение для двух компонент, ψ_1' и ψ_4'. Очевидно, что требование нерелятивистской инвариантности будет выполнено, если нам удастся свести последнее уравнение к сумме двух уравнений Паули для ψ_1' и ψ_4'.

С учётом этих двух замечаний после перевода уравнения (10) в другую систему отсчёта мы ограничимся только рассмотрением членов, содержащих ψ_1', а также опять-таки с целью упрощения рассмотрим только одномерный случай.

При этом будем иметь

$$\Big[\frac{\partial\psi_1'}{\partial t'} - \frac{ie}{h}\phi'\psi_1' + \frac{imc^2}{h}\psi_1' - \frac{ih}{2m}\frac{\partial^2\psi_1'}{\partial x'^2}\underline{\left(1-\frac{5}{8}\beta^2\right)} -$$

$$-\frac{e}{mc}\left(A_x'\frac{\partial\psi_1'}{\partial x'} + \frac{1}{2}\psi_1'\frac{\partial A_x'}{\partial x'} - \frac{ie}{2hc}A_x'^2\psi_1'\right)\underline{\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right)}\Big]\left(1+\frac{5}{8}\beta^2\right) =$$

$$=\beta c\Big\{\frac{\partial\psi_1'}{\partial x'}\left(1-\frac{9}{8}\beta^2\right) + \frac{ih}{mc^2}\left(\frac{\beta}{2c}\frac{\partial^2\psi'}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2\psi'}{\partial x'\partial t'} + \frac{emc}{h^2}A_x'\psi'\right)\left(1-\beta^2\right) +$$

$$+\frac{e}{mc^2}\Big[\phi'\frac{\partial\psi_1'}{\partial x'} - \left(A_x' + \beta\phi'\right)\frac{1}{c}\frac{\partial\psi_1'}{\partial t'} + \frac{1}{2}\psi_1'\frac{\partial\phi'}{\partial x'} + \frac{1}{2}\psi_1'\left(\frac{\partial A_x'}{\partial t'} + \beta\frac{\partial\phi'}{\partial t'}\right) -$$

$$-\frac{i}{hc}\left(A_x'\phi' + \frac{1}{2}\beta\phi'^2\right)\psi_1'\Big]\Big\}\left(1+\frac{9}{8}\beta^2\right) + \ldots$$

Здесь в левой части выражение в квадратных скобках почти совпадает с уравнением Паули для ψ_1' в новой системе отсчёта, отличаясь от него наличием двух подчеркнутых сомножителей. При этом, если первый сомножитель может быть отброшен ввиду малости члена $(i\hbar/2m)\partial^2\psi_1'/\partial x'^2$ на основании условий типа (7), то этого нельзя будет сделать со вторым сомножителем. Дело в том, что мы не имеем слагаемых подобных тем трем, которые фигурируют в круглых скобках, и больших их по величине. Таким образом, мы не можем свести отмеченное выражение в квадратных скобках к уравнению Паули для ψ_1'. Больше того, мы не имеем также оснований для того, чтобы отбросить члены в правой части.

Но коль скоро это так, то мы вынуждены заключить, что уравнение Паули не инвариантно относительно нерелятивистских преобразований.

Литература

1. *В.Н. Стельцов. Сообщение ОИЯИ, Р2-5131, Дубна, 1970.*
2. *В.Н. Стрельцов. Сообщение ОИЯИ, Р2-4462, Дубна, 1969.*
3. *В.Н. Стрельцов. Сообщение ОИЯИ, Р2-5314, Дубна, 1970.*

Рукопись поступила в издательский отдел

17 декабря 1970 года.