ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 5520

Д.Ю. Бардин, С.М. Биленький, Г.В. Мицельмахер,
Н.М. Шумейко

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

О РАСПАДАХ $\pi^+ \to e^+(\mu^+)\nu e^+ e^-$

1970

P2 - 5520

Д.Ю. Бардин, С.М. Биленький, Г.В. Мицельмахер,
Н.М. Шумейко

О РАСПАДАХ $\pi^+ \to e^+ (\mu^+) \nu e^+ e^-$

Направлено в ЯФ

1. Введение

В настоящей работе рассматриваются процессы $\pi^+ \to e^+ \nu_e e^+ e^-$ и $\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu e^+ e^-$. Исследование на опыте этих редких распадов – весьма трудная задача. В недавней работе [1] была получена лишь верхняя граница полной вероятности распада $\pi^+ \to e^+ \nu_e e^+ e^- (W(\pi^+ \to e^+ \nu_e e^+ e^-) / W(\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu) \le 3{,}4 \times 10^{-8})$. Несомненно, однако, что в недалеком будущем, в особенности на мезонных фабриках, эти редкие процессы будут доступны детальному изучению. Цель настоящей работы состоит в выяснении, какую информацию при этом можно получить. Мы рассмотрим распады $\pi^+ \to \ell^+ \nu_\ell e^+ e^-$ на основе обычной теории слабых взаимодействий[x].

Матричный элемент процесса может быть представлен в виде суммы двух членов, каждый из которых удовлетворяет условию градиентной инвариантности. Первый – пропорционален амплитуде процесса $\pi^+ \to e^+ \nu_e$ и отвечает вкладу внутреннего тормозного излучения, второй – описывает так называемое структурное излучение. Последний член практически не дает вклада в вероятность процесса $\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu e^+ e^-$. Результаты вычислений вероятности этого распада кратко изложены в разделе 3. Как показано в четвертом разделе, детальная информация о структурной части матричного элемента может быть получена из измерений вероятности

---

[x] В работах [2] было предложено изучение этих процессов с целью проверки гипотезы о возможном прямом шестифермионном слабом взаимодействии.

процесса $\pi^+ \to e^+ \nu_e \; e^+ e^-$ при различных обрезаниях по энергиям и инвариантным массам конечных заряженных частиц.

Структурный матричный элемент представляет собой сумму вкладов векторного и аксиального токов. Как показали Вакс и Иоффе /3/, гипотеза сохранения векторного тока позволяет связать вклад векторного тока с амплитудой распада π^0-мезона. Матричный элемент аксиального тока характеризуется тремя формфакторами. Если сделать обычное предположение /4/ о медленном изменении формфакторов, то можно показать, что один из них обращается в нуль, а другой совпадает с соответствующим параметром (параметром γ, определение см. /5/), характеризующим распад $\pi^+ \to e^+ \nu_e \gamma$. Для этого последнего на опыте /6/ получены два значения.

Проведенные нами расчёты показывают, что если при измерении вероятности процесса отбирать события с энергиями конечных заряженных частиц, большими 10 Мэв, то вклад структурного излучения становится сравнимым с вкладом внутреннего тормозного излучения. Если при этом отбирать события со значениями инвариантных масс, меньшими $0{,}01\, m_\pi^2$, то из измерений вероятности в этой области можно получить информацию о параметре γ. Отбирая события с инвариантными массами, большими $0{,}01\, m_\pi^2$, можно определить другой параметр (параметр ξ), характеризующий аксиальную часть структурного матричного элемента. Условие частичного сохранения аксиального тока (PCAC) и алгебра токов позволяют связать последний параметр с электромагнитным радиусом π-мезона. Как показано в разделе 2, это соотношение в рамках используемого приближения не зависит от справедливости гипотезы Фейнмана /7/ о сокращении вклада швингеровских членов и вклада диаграмм с испусканием фотона и лептонной пары из одной точки.

Из опытов по исследованию $\pi^+ \to e^+\nu_e\ e^+e^-$ –распада можно получить, следовательно, дополнительную информацию об электромагнитном радиусе π –мезона и относительном знаке амплитуд $\pi^0 \to \gamma\gamma$ и $\pi^+ \to \mu^+\nu_\mu$. С другой стороны, если эти величины известны, то исследование распада $\pi^+ \to e^+\nu_e\ e^+e^-$ могло бы позволить проверить предсказания PCAC и алгебры токов в весьма интересном случае процесса со слабым и электромагнитным взаимодействиями.

Все расчёты проводились на ЭВМ методом Монте-Карло. Способ вычислений кратко изложен в приложении Б. В приложении А приводится выражение для дифференциальной вероятности распада. Отметим, что во всех расчётах учитывалась тождественность конечных частиц. Учёт тождественности, как показывают вычисления, существенен (вклад интерференции прямых и обменных диаграмм достигает 10%).

В работе /8/ было предложено исследование процесса $\pi^+ \to e^+\nu_e\ e^+e^-$ с целью проверки T –инвариантности. В ней содержатся оценки части структурного излучения без учёта тождественности.

2. Матричный элемент процесса

Матричный элемент распада

$$\pi^+ \to \ell^+ + \nu_\ell + e^+ + e^- \qquad (1)$$

(ℓ^+–позитрон, либо μ^+ –мезон) представим в виде суммы членов, отвечающих диаграммам рис. 1 и рис. 2.

Имеем

$$\langle f|S|i\rangle = ie^2 \frac{G}{\sqrt{2}} \left(\frac{m^2\ m_\ell}{2q_0 p_{10} p_{20}\ p_{30}}\right)^{1/2} \frac{1}{k^2} \frac{1}{(2\pi)^{7/2}} \delta(p+p_1+p_2+p_3-q)\times$$

$$\times [f_\pi \bar{u}(p) \hat{q} (1+\gamma_5) \frac{1}{-\hat{p}_1 - \hat{k} - im_\ell} \hat{\epsilon} u(-p_1) + \epsilon_\alpha M_{\alpha\beta} \ell_\beta] , \qquad (2)$$

где q , p и p_1 - 4-импульсы π^+ -мезона, нейтрино и лептона; p_2 и p_3 - 4-импульсы позитрона и электрона; m и m_ℓ - массы электрона и лептона; $k = p_2 + p_3$, $\epsilon_\alpha = \bar{u}(p_3)\gamma_\alpha u(-p_2)$, $\ell_\beta = \bar{u}(p)\gamma_\beta(1+\gamma_5)u(-p_1)$; f_π - константа $\pi^+ \to \ell^+ \nu_\ell$ - распада, определяемая соотношением

$$<0| j^w_\beta | q> = i f_\pi \left(\frac{1}{2q_0}\right)^{1/2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} q_\beta ,$$

а

$$-\left(\frac{m^2}{2q_0 p_{20} p_{30}}\right)^{1/2} \frac{1}{(2\pi)^{9/2}} e^2 \frac{1}{k^2} \epsilon_\alpha M_{\alpha\beta} = <p_3, -p_2 | j^{W}_\beta(0) | q> . \qquad (3)$$

Здесь

$$j^W_\beta = j^V_\beta + j^A_\beta \quad - \qquad (4)$$

ток слабого взаимодействия (j^V_β - векторный ток, j^A_β - аксиальный).

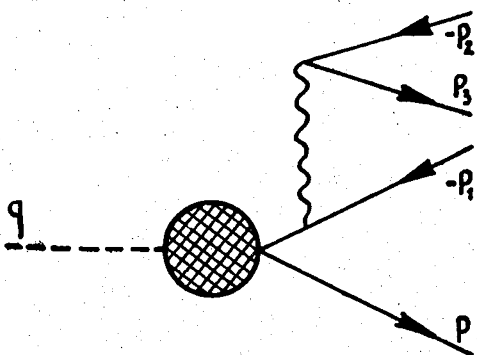

Рис. 1

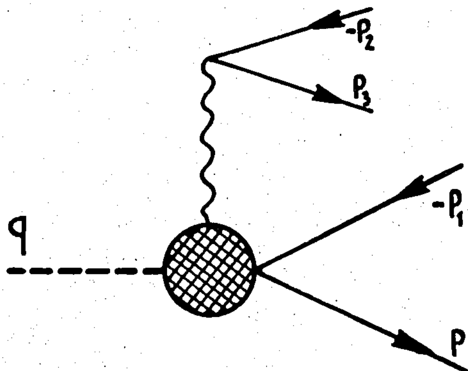

Рис. 2

Очевидно, что для нахождения матричного элемента процесса $\pi^+ \to e^+\nu_e e^+e^-$ следует антисимметризовать выражение (2) (положить $m_\ell = m$ и вычесть член, полученный заменой $p_1 \rightleftarrows p_2$).

Обратимся к выяснению структуры матричного элемента $M_{\alpha\beta}$.

Обозначим суммарный 4-импульс лептона и нейтрино через Q : $Q = p_1 + p$. Величина $M_{\alpha\beta}$ зависит от 4-импульсов k и Q ($q = k + Q$). Если имеет место T -инвариантность, то

$$M_{\alpha\beta}(k, Q) = M^*_{\alpha\beta}(k_T, Q_T) , \tag{5}$$

где $k_T = (-\vec{k}, ik_0)$. Из градиентной инвариантности следует, что

$$k_\alpha M_{\alpha\beta} = f_\pi q_\beta . \tag{6}$$

Обозначим через $M^V_{\alpha\beta}$ и $M^A_{\alpha\beta}$ соответственно вклады векторного и аксиального токов. Рассмотрим вначале $M^V_{\alpha\beta}$. Соображения лоренц-инвариантности приводят к выражению

$$M^V_{\alpha\beta} = -a^V \epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} k_\rho Q_\sigma , \tag{7}$$

где a^V – функция переменных k^2 и Q^2 . Из (5) вытекает, что $(a^V)^* = a^V$. Принимая гипотезу сохранения векторного тока, амплитуду $a^V(k^2, Q^2)$ можно связать с соответствующей амплитудой превращения π^0 -мезона в два виртуальных γ -кванта $a_0(k^2, Q^2)$. Имеем /3/

$$a^V(k^2, Q^2) = -\sqrt{2}\, a_0(k^2, Q^2) . \tag{8}$$

Отметим, что вероятность распада $\pi^0 \to \gamma\gamma$ равна

$$W_{\pi^0\to\gamma\gamma} = \alpha^2 \pi \, (a_0(0,0))^2 \, m_\pi^3 \quad , \tag{9}$$

где $\alpha = e^2/4\pi$, а m_π –масса π –мезона.

Зависимость от переменных амплитуды распада π^0 –мезона изучалась на опыте при исследовании процесса $\pi^0 \to \gamma \; e^+ e^-$. Амплитуда этого распада дается выражением

$$a_\pi(k^2,0) = a_\pi(0,k^2) = \frac{1}{2}\,[\,a_0(k^2,0) + a_0(0,k^2)\,] \; .$$

Ограничиваясь линейными по k^2 членами, запишем

$$a_0(k^2,0) = a_0(0,0)\,(1 - x_s \frac{k^2}{m_\pi^2}) \, ,$$

$$a_0(0,k^2) = a_0(0,0)\,(1 - x_V \frac{k^2}{m_\pi^2}) \, .$$

Отсюда

$$a_\pi(k^2,0) = a_0(0,0)\,(1 - x \frac{k^2}{m_\pi^2}) \, ,$$

где $x = \frac{1}{2}(x_S + x_V)$. В последних опытах [9] найдено, что $x = 0{,}01 \pm 0{,}11$.

Из соотношения (8) в линейном приближении получаем

$$a^V(k^2,Q^2) = -\sqrt{2}\,a_0(0,0)\,(1 - x_S \frac{k^2}{m_\pi^2} - x_V \frac{Q^2}{m_\pi^2}) \, . \tag{10}$$

Мы оценили влияние зависимости амплитуды a^V от переменных k^2 и Q^2 на полную вероятность распада $\pi^+ \to e^+ \nu_e \, e^+ e^-$. При этом для величин x_V и x_S принимались вытекающие из векторной доминантности значения ($x_V = m_\pi^2 / m_\rho^2$, $x_S = m_\pi^2 / m_\omega^2$). Оказалось, что вклады в полную вероятность соответствующих членов не превосходят 2% и 0,1%. В дальнейшем мы будем пренебрегать зависимостью амплитуды a^V от переменных k^2 и Q^2 и положим, что

$$M^V_{\alpha\beta} = \sqrt{2}\, a_0(0,0)\, \epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}\, k_\rho\, Q_\sigma \quad . \tag{11}$$

Перейдем теперь к рассмотрению $M^A_{\alpha\beta}$. Наиболее общее выражение для $M^A_{\alpha\beta}$ имеет вид

$$M^A_{\alpha\beta} = a\,\delta_{\alpha\beta} + b\,Q_\alpha\, k_\beta + c\,k_\alpha\, k_\beta + D\,k_\alpha\, Q_\beta + E\,Q_\alpha\, Q_\beta \ , \tag{12}$$

где $a, b, \ldots$ - функции скаляров k^2 и Q^2 . Если имеет место T -инвариантность, эти функции вещественны. Из условий градиентной инвариантности (6), учитывая, что $k_\alpha M^V_{\alpha\beta} = 0$, получаем следующие соотношения:

$$a + Q\cdot k\, b + k^2 c = f_\pi \ , \tag{13}$$

$$k^2 D + Q\cdot k\, E = f_\pi \ . \tag{14}$$

Выделим вклад π -мезонного полюса в матричный элемент $M^A_{\alpha\beta}$. Имеем

$$(M^A_{\alpha\beta})_\pi = - \frac{f_\pi F_\pi(k^2)}{Q^2 + m_\pi^2} \left[2 Q_\alpha Q_\beta + k_\alpha Q_\beta \right] \ . \tag{15}$$

Здесь $F_\pi(k^2)$ – электромагнитный формфактор реального π -мезона ($F_\pi(0) = 1$). Представим формфакторы D и E в виде

$$D = -\frac{f_\pi F_\pi(k^2)}{Q^2 + m_\pi^2} + d \ , \tag{16}$$

$$E = -\frac{2 f_\pi F_\pi(k^2)}{Q^2 + m_\pi^2} + e \ .$$

Из (15), (16) и (12) следует, что у функций d, e, а также у a, b и c нет полюса в точке $Q^2 = -m_\pi^2$. Подставляя (16) в (14), получаем

$$k^2 d - \frac{1}{2}(k^2 + Q^2 + m_\pi^2)\, e = -f_\pi (F_\pi(k^2) - 1) \ . \tag{17}$$

Используя (12), (13), (15) и (17), находим для матричного элемента $M^A_{\alpha\beta}$ следующее выражение:

$$M^A_{\alpha\beta} = -\frac{f_\pi F_\pi(k^2)}{Q^2 + m_\pi^2}(2Q_\alpha Q_\beta + k_\alpha Q_\beta) + f_\pi\left(\delta_{\alpha\beta} + \frac{1 - F_\pi(k^2)}{k^2} k_\alpha Q_\beta\right) +$$

$$+ b\,(Q_\alpha k_\beta - Q{\cdot}k\,\delta_{\alpha\beta}) + c\,(k_\alpha k_\beta - k^2 \delta_{\alpha\beta}) + e\,\left(Q_\alpha Q_\beta - \frac{Q{\cdot}k}{k^2} k_\alpha Q_\beta\right). \tag{18}$$

Последние три слагаемые, а также $M^V_{\alpha\beta}$ характеризуют вклад так называемого структурного излучения. Все остальные входящие в матричный элемент члены пропорциональны амплитуде безрадиационного процесса f_π и представляют собой вклад внутреннего тормозного излучения.

Будем предполагать, что зависимостью b, c, d и e от переменных k^2 и Q^2 можно пренебречь /4/. Это предположение может быть обосновано в модели векторной и A_1 доминантности. В этой модели вклады членов, содержащих производные по k^2 и Q^2, не превосходят соответственно m_π^2 / m_ρ^2 и $m_\pi^2/m_{A_1}^2$. Опуская производные формфакторов d и e, из (17) получаем[x/]

$$e = 0 \quad , \tag{19}$$

$$d = - f_\pi \frac{d F_\pi}{d k^2} \Big|_{k^2=0} \quad , \tag{20}$$

В этом приближении b совпадает с соответствующим параметром, характеризующим распад $\pi^+ \to e^+ \nu_e \gamma$. Для последней величины на опыте[/6/] получены два значения.

Мы вычислили интегральную вероятность процесса $\pi^+ \to e^+ \nu_e e^+ e^-$ и рассмотрели вопрос о возможности определения параметров b и c из эксперимента. Найдена такая кинематическая область, в которой вероятность нечувствительна к c и где можно получить, следовательно, дополнительную информацию о b. Существует также область, где влияние параметра c на интегральную вероятность велико. Измеряя вероятность в этой области, можно определить c при условии, что величина b известна. Результаты этих расчётов приводятся в разделе 4.

Если использовать условие частичного сохранения аксиального тока, алгебру токов, а также предположение о слабой зависимости формфакторов, то параметр c можно связать с электромагнитным радиусом π -мезона.

---

x/ Для процесса $\pi^+ \to e^+ \nu_e e^+ e^-$ вклад слагаемого, содержащего e, пропорционален массе электрона и может быть опущен независимо от предположения о медленном изменении формфакторов.

Рассмотрим свертку $M^A_{\alpha\beta}\, Q_\beta$. Используя (3) и (4), получаем для $M^A_{\alpha\beta}$ следующее выражение:

$$M^A_{\alpha\beta} = -i(2\pi)^{3/2}\sqrt{2q_0}\int e^{-iQx}\langle 0\,|\,T(j_\alpha(0)\,j^A_\beta(x))\,|\,q\rangle\,dx + P_{\alpha\beta}\;. \qquad (21)$$

Здесь j_α – электромагнитный ток адронов, а $P_{\alpha\beta}$ представляет собой вклад в $M^A_{\alpha\beta}$ диаграмм, отвечающих испусканию фотона и пары лептон-нейтрино из одной точки (см. рис. 3).

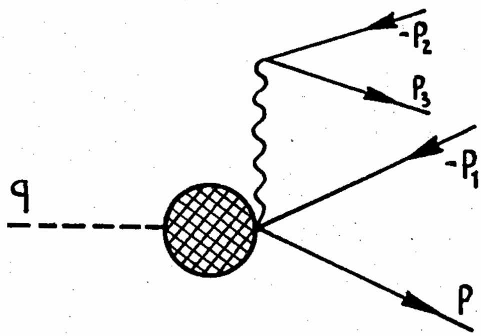

Рис. 3

Умножим (21) на Q_β. Используя условие PCAC и полагая, что [10]

$$\delta(x_0)\,[\,j^A_4(x),\, j_\alpha(0)\,] = \delta(x)\, j^A_\alpha(0) + S_\alpha(x),$$

где $S_\alpha(x)$ – члены, содержащие производные δ-функции (швингеровские члены), находим

$$M^A_{\alpha\beta} Q_\beta = f_\pi\Big[\frac{m^2_\pi F_\pi(k^2)(Q+q)_\alpha}{Q^2 + m^2_\pi} - q_\alpha\Big] + R_\alpha\;. \qquad (22)$$

Величина R_α обусловлена вкладом диаграмм рис. 3, швингеровскими членами, а также членами, возникающими в результате разложения формфакторов π -мезона по $Q^2 + m_\pi^2$. Для дальнейшего существенно, что у R_α нет полюса в точке $Q^2 = -m_\pi^2$.

Из (12) и (22) получаем

$$a + Q \cdot k\, b + Q^2 E = f_\pi \left[\frac{2 m_\pi^2 F_\pi (k^2)}{Q^2 + m_\pi^2} - 1 \right] + R' , \qquad (23)$$

$$Q.k\, c + Q^2 D = f_\pi \left[\frac{m_\pi^2 F_\pi (k^2)}{Q^2 + m_\pi^2} - 1 \right] + R'' , \qquad (24)$$

где R' и R'' - коэффициенты разложения R_α $(R_\alpha = R' Q_\alpha + R'' k_\alpha)$. Соотношения (23) и (24) не противоречат вытекающим из градиентной инвариантности соотношениям (13) и (14) лишь в случае, если имеет место равенство

$$Q \cdot k\, R' = f_\pi m_\pi^2 (F_\pi - 1) - k^2 R'' . \qquad (25)$$

Отметим, что гипотеза Фейнмана /7/ о компенсации швингеровских членов и диаграмм рис. 3 и пологическая версия PCAC /11/ приводят к условиям $R' = R'' = 0$, которые, как видно из (25), противоречат градиентной инвариантности.

Подставим (16) в (23) и (24). Получаем

$$a - \frac{1}{2} (k^2 + Q^2 + m_\pi^2)\, b + Q^2 c = f_\pi (2 F_\pi - 1) + R' , \qquad (26)$$

$$-\frac{1}{2}(k^2+Q^2+m_\pi^2)\,c+Q^2 d=f_\pi(F_\pi-1)+R''. \qquad (27)$$

Пренебрегая производными c, d и R'', из (27) находим[x/]

$$c=-2f_\pi \frac{dF_\pi}{dk^2}\Big|_{k^2=0}. \qquad (28)$$

Из (27) следует также соотношение $c = 2d$, которое с учётом (20) совпадает с (28). Соотношение (28) является также следствием (26) и (13). Подчеркнем, что (28) имеет место независимо от справедливости гипотезы Фейнмана о компенсации вклада швингеровских членов и вклада диаграмм рис. 3. Для получения этого соотношения было существенным предположение о слабой зависимости от переменных формфакторов b, c, d и e, а также функций R' и R''. При таком предположении R' и R'' могут быть найдены из (26) и (27) ($R'=0$, $R''=m_\pi^2 f_\pi \frac{dF_\pi}{dk^2}\big|_{k^2=0}$).

Окончательно, с учётом (11), (18) и (19), матричный элемент рассматриваемого нами процесса запишем в виде

$$\langle f|S|i\rangle=-e^2\frac{G}{\sqrt{2}}\left(\frac{m^2 m_\ell}{2q_0 p_{10}p_{20}p_{30}}\right)^{1/2}\frac{1}{k^2}\frac{1}{(2\pi)^{7/2}}\delta(p+p_1+p_2+p_3-q)\times \qquad (29)$$

$$\times\,\epsilon_\alpha\Big\{f_\pi m_\ell\,\bar u(p)(1-\gamma_5)\Big[\frac{2p_{1\alpha}+\hat k\gamma_\alpha}{2p_1k+k^2}+\frac{F_\pi-1}{k^2}k_\alpha+\frac{F_\pi}{Q^2+m_\pi^2}(2Q_\alpha+k_\alpha)\Big]u(-p_1)+$$

---

x/ Аналогичный результат был получен в работе[12] на основе модифицированного условия PCAC[13]. В соотношение, найденное в[12], входит, однако, нефизический формфактор π -мезона.

$$+ i\sqrt{2}a_0 [-\epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} k_\rho Q_\sigma + \gamma (Q_\alpha k_\beta - \delta_{\alpha\beta} Q\cdot k) + \xi (k_\alpha k_\beta - k^2\delta_{\alpha\beta})] \ell_\beta \}.$$

Здесь

$$\gamma = -\frac{b}{\sqrt{2}a_0}, \quad \xi = -\frac{c}{\sqrt{2}\,a_0}. \tag{30}$$

Из опыта по исследованию распада $\pi^+ \to e^+\nu_e\gamma$ для параметра γ найдены значения[6]: 0,32 и -2,0 (при этом время жизни π^0 -мезона принималось равным[14] $\tau_{\pi^0} = 0{,}89\times10^{-16}$ сек). Если для электромагнитного радиуса π -мезона принять значение[15] $r_\pi = 0{,}63\,\phi$, то из (28) получаем, что $|\xi| = 2{,}4$.

3. Распад $\pi^+ \to \mu^+\nu_\mu e^+ e^-$

Вероятность процесса $\pi^+ \to \mu^+\nu_\mu e^+e^-$ может быть записана следующим образом:

$$dW = dW_{IB} + dW_{SD} + dW_{IBSD} , \tag{31}$$

где dW_{IB} , dW_{SD} и dW_{IBSD} представляют собой соответственно вклады внутреннего тормозного излучения, структурного излучения и их интерференции. Выражения для этих величин приведены в приложении А. В результате вычислений на ЭВМ было найдено, что

$$R_{IB} \equiv W_{IB} / W\ (\pi^+ \to \mu^+\nu_\mu) = 0{,}33.10^{-6} ,$$

$$R_{SD} \equiv W_{SD} / W \ (\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu) = (0{,}90 + 1{,}1\gamma^2 - 0{,}06\gamma\xi + 0{,}004\xi^2)\, 10^{-12},$$

$$R_{IBSD} \equiv W_{IBSD} / W \ (\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu) = (0{,}26 - 0{,}52\gamma + 0{,}01\xi)\ s\ 10^{-9}, \qquad (32)$$

где $s = \mathrm{sign}\,(f_\pi\ a_0)$. Здесь и в дальнейшем мы принимали для времени жизни π^0 -мезона значение /14/ $\tau_{\pi^0} = 0{,}89 \times 10^{-16}$ сек. Отметим, что отличие $F_\pi\,(k^2)$ от единицы сказывается лишь в четвертом знаке.

Как видно из (32), полная вероятность процесса $\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu\ e^+ e^-$ определяется вкладом внутреннего тормозного излучения:

$$R\,(\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu\ e^+ e^-) \equiv \frac{W(\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu\ e^+ e^-)}{W\,(\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu)} \simeq R_{IB} = 0{,}33\ 10^{-6}. \qquad (33)$$

Заметим, что найденное нами значение R_{IB} в 8 раз меньше значения, полученного в работе /16/.

4. Распад $\pi^+ \to e^+ \nu_e\ e^+ e^-$

В случае распада $\pi^+ \to e^+ \nu_e e^+ e^-$ необходимо учесть тождественность конечных позитронов. Вероятность процесса может быть представлена в виде

$$dW = dW_d + dW_e + dW_{de}, \qquad (34)$$

где

$$dW_d = (dW_{IB} + dW_{SD} + dW_{IBSD})\,\Big|_{m_\ell = m}, \qquad (35)$$

$$dW_e = dW_d\ (p_1 \leftrightarrows p_2)\ , \tag{36}$$

$$dW_{de} = dW^e_{IB} + dW^e_{SD} + dW^e_{IBSD}\ . \tag{37}$$

Величины dW^e_{IB} , dW^e_{SD} и dW^e_{IBSD} , соответствующие вкладу интерференции прямых диаграмм с обменными, мы приводим в приложении А.

Интегрирование выражения (34) производилось на ЭВМ методом Монте-Карло. Основные черты способа вычислений коротко изложены в приложении Б. Для выделения вклада структурного излучения интегрирование проводилось не по всей кинематически разрешенной области. В частности, вероятность распада была получена для случаев, когда энергия каждой из конечных заряженных частиц больше $\bar{E}$ = 5, 10, 15, 20 Мэв. Вычислена также полная вероятность. Во всех численных расчётах обеспечивалась точность не ниже 2%.

Отношение вероятности процесса $\pi^+ \to e^+\nu_e e^+e^-$ к полной вероятности распада π^+ -мезона W_π запишем в следующем виде:

$$R = W\ (\pi^+ \to e^+\nu_e\ e^+e^-) / W_\pi = IB + r^2 (SD + \gamma\, SD_\gamma + \gamma^2 SD_{\gamma^2} + \tag{38}$$

$$+ \gamma\xi\, SD_{\gamma\xi} + \xi\, SD_\xi + \xi^2 SD_{\xi^2}) + s\, r\ (IBSD + \gamma\, IBSD_\gamma + \xi\, IBSD_\xi)\ .$$

Здесь SD_ξ , например, - полный вклад (включая вклад обменных диаграмм) в отношение R интерференции векторной части амплитуды с той ее частью, которая пропорциональна ξ, и т.д.; $s = \mathrm{sign}\,(f_\pi a_0)$.

Для учета возможности отличия времени жизни π^0 -мезона от принятого в расчётах $\tau_{\pi^0} = 0{,}89.10^{-16}$ сек введен множитель $\tau^2 = 0{,}89 \,.\, 10^{-16}/\tau_{\pi^0}$.

Таблица 1

Численные значения величин, входящих в равенство (38), в единицах 10^{-10} для случаев, когда энергия каждой из конечных заряженных частиц больше $\bar{E} = m$, 10 Мэв, 15 Мэв

$\bar{E}$	IB	SD	SD_γ	SD_{γ^2}	$SD_{\gamma\xi}$	SD_ξ	SD_{ξ^2}	IBSD	$IBSD_\gamma$	$IBSD_\xi$
m	86	3,6	0	4,1	–0,85	0	0,43	1,3	–1,4	0,02
10Мэв	20	2,1	0,08	2,4	–0,70	0	0,40	0,43	–0,46	0,02
15Мэв	7,5	1,3	0,17	1,5	–0,53	–0,02	0,33	0,20	–0,21	0,01

Как видно из табл. 1, относительный вклад структурного излучения увеличивается с увеличением энергии обрезания $\bar{E}$. Если $\gamma = -2{,}0$, то при $\bar{E} \gtrapprox 10$ Мэв он становится сравнимым с вкладом внутреннего тормозного излучения. Отметим, что отличие $F_\pi\ (k^2)$ от единицы сказывается в членах IB и $IBSD_{;\gamma;\xi}$ лишь в четвертом знаке.

Из табл. 1 видно, что если реализуется малое значение γ ($\gamma = 0{,}32$), то вклады членов, содержащих γ и ξ, могут оказаться сравнимыми. Мы выяснили, при каких условиях вероятность нечувствительна к значению параметра ξ. Так как ξ умножается в амплитуде процесса на k^2, то ясно, что обрезание больших значений инвариантных масс e^+e^- -пар приведет к относительному уменьшению вклада этого параметра. Вероятность распада вычислялась для случаев, когда, помимо обрезаний по энергиям, накладывались следующие ограничения на значения инвариантных масс e^+e^- -пар:

$(-k^2)$ и $(-n^2) \geq 0{,}01\ m_\pi^2$, $0{,}05\ m_\pi^2$, $0{,}10\ m_\pi^2$ $(n^2 = (p_1+p_3)^2, (-k^2)_{max} = (m_\pi - m)^2)$.

В табл. 2 приводятся результаты вычислений только для $(-k^2)$ и $(-n^2) \geq 0{,}01\ m_\pi^2$.

Таблица 2

Численные значения величин, входящих в (38), в единицах 10^{-10} для случая, когда $-k^2$ и $-n^2 \geq 0{,}01\ m_\pi^2$.

$\bar{E}$	IB	SD	SD_γ	SD_{γ^2}	$SD_{\gamma\xi}$	SD_ξ	SD_{ξ^2}	IBSD	$IBSD_\gamma$	$IBSD_\xi$
m	4,3	0,77	0,20	1,1	-0,75	-0,01	0,39	0,09	-0,11	0,02
10Мэв	2,1	0,47	0,17	0,80	-0,64	-0,03	0,37	0,04	-0,06	0,01
15Мэв	1,0	0,29	0,13	0,51	-0,49	-0,03	0,32	0,03	-0,04	0,01

Если из результатов, приведенных в табл. 1, вычесть результаты табл. 2, то при этом можно найти значения R , оптимальные для получения информации о параметре γ безотносительно к значению ξ . С другой стороны, в области $(-k^2)$ и $(-n^2) \geq 0{,}01\ m_\pi^2$ на отношении R существенно сказывается как γ так и ξ, и, следовательно, при известном значении γ из измерений вероятности в этой области можно получить информацию о параметре ξ .

Анализ результатов, приведенных в табл. 1 и 2, позволяет сделать следующие выводы.

1. Существует кинематическая область $\bar{E} \approx 10-15$ Мэв, $(-k^2)$ или $(-n^2) < 0{,}01\ m_\pi^2$,где параметр ξ не сказывается на вероятности распада. В этой области вероятность также слабо зависит от $s = \mathrm{sign}(a_0 f_\pi)$ (вклад соответствующих членов не превышает 3%). Измерение вероятности процесса $\pi^+ \to e^+ \nu_e e^+ e^-$ при таких кинематических условиях позволяет получить дополнительную информацию о параметре γ , характеризующем распад $\pi^+ \to e^+ \nu_e \gamma$. При этом необходимо производить измерения с точностью, лучшей 20%, на уровне $2.10^{-9}\ W_\pi$.

2. Если величина γ известна, то, проводя измерения в области $\bar{E} \approx$ 10-15 Мэв, $(-k^2)$ и $(-n^2) \geq 0{,}01\, m_\pi^2$, можно определить параметр ξ (вклад членов, содержащих s, не превышает в указанной области 3%). При этом из-за квадратичной зависимости вероятности от ξ возникнет два решения. В данном случае необходимо проводить измерения на уровне $4.10^{-10} W_\pi$.

3. Если из опытов по исследованию процесса $\pi^+ \to e^+ \nu_e\, e^+ e^-$ определен параметр ξ (двузначно), то с помощью полученного в разделе 2 соотношения

$$\xi = - s \frac{1}{3\sqrt{2}} \left| \frac{f_\pi}{a_0} \right| < r_\pi^2 > \qquad (39)$$

можно а) проверить справедливость гипотез, лежащих в основе этого соотношения; б) получить информацию об электромагнитном радиусе π -мезона и относительном знаке амплитуд распадов $\pi^0 \to \gamma\gamma$ и $\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu$ x/.

Все эти выводы иллюстрируются табл. 3

Таблица 3

В первых трех строках приведено отношение R в единицах 10^{-10} при $\bar{E}$ = 10 Мэв и $\xi = - s\,|\xi|$. В последней строке приводятся значения R, вычисленные без кинематических ограничений

$\lvert\xi\rvert$	0				2,4				5			
γ	-2,0		0,32		2,0		0,32		2,0		0,32	
s	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–
$-k^2$ и $-n^2 \geq 4m^2$	32	30	22	22	38	29	24	25	50	33	31	33
$-k^2$ или $-n^2 < 0{,}01 m_\pi^2$	27	25	20	19	28	25	20	19	29	25	20	20
$-k^2$ и $-n^2 \geq 0{,}01 m_\pi^2$	5,6	5,3	2,8	2,7	11	4,5	4,3	5,4	21	8,3	11	13
$\bar{E} = m$, $-k^2$ и $-n^2 > 4m^2$	110	102	91	89	120	100	92	92	130	104	100	101

x/ Как показано в работах /18/, экспериментальные данные свидетельствуют в пользу $s = +1$.

Результаты, приведенные в этой таблице, получены при $\tau_{\pi^0} = 0{,}89 \cdot 10^{-16}$ сек. Отметим, что наши выводы не изменятся, если для времени жизни π^0 -мезона принять значение [17] $\tau_{\pi^0} = 0{,}56 \cdot 10^{-16}$ сек.

В заключение выражаем глубокую благодарность С.М. Коренченко, М.М. Мусаханову, В.И. Огиевецкому и Я.А. Смородинскому за полезные обсуждения рассмотренных здесь вопросов.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Здесь мы приведем величины, входящие в выражения для дифференциальных вероятностей (31), (37).

$$dW_{IB}=\frac{16\alpha^2G^2f_\pi^2m_\ell^2}{(2\pi)^6 m_\pi}\frac{d\Gamma}{k^4}\Big\{2x^2(p_1p)\left[2((qr)^2-(qk)^2)-m_\pi^2\ell^2\right]+$$

$$+2xy\left[4(p_1p)((qk)(p_1k)-(qr)(p_1r))+2(qr)((p_1k)(pr)-(p_1r)(pk))-\right.$$

$$\left.-\ell^2(2(p_1p)(p_1q)-(pq)(p_1k)+(p_1q)(pk))\right]-y^2\left[4(p_1p)((p_1k)^2-(p_1r)^2)+\right.$$

$$+4(p_1r)((p_1k)(pr)-(p_1r)(pk))+r^2(2(pk)(p_1k)-k^2(p_1p))+$$

$$\left.+k^2(2(p_1r)(pr)-4(pk)(p_1k)+k^2(p_1p))+\ell^2(2m_\ell^2(p_1p+pk)+2(p_1p)(p_1k)+4(pk)(p_1k)-k^2(p_1p))\right]\Big\}$$

$$dW_{SD}=\frac{16\alpha^2G^2a_0^2}{(2\pi)^6 m_\pi}\frac{d\Gamma}{k^4}\Big\{2(p_1p)\left[k^2(qr)^2+(k^2-4m_\ell^2)z^2\right]+$$

$$+2(4m_\ell^2-k^2-r^2)\left[m_\ell^2z^2-k^2(p_1q)^2+m_\pi^2(p_1k)^2+2(p_1k)(p_1q)(qk)\right]-$$

$$-4\left[(p_1r)^2z^2+2(p_1r)(qr)(k^2(p_1q)-(p_1k)(qk))+(qr)^2((p_1k)^2+k^2m_\ell^2)\right]-$$

$$-4\gamma\left[(qr)((p_1r)z^2+(qr)(k^2(p_1q)-(qk)(p_1k)))+(Qk)((qr)((p_1k)(pr)-(p_1r)(pk))+\right.$$

$$\left.+(k^2-4m_\ell^2)((p_1q)(pk)-(p_1k)(pq)))\right]+\gamma^2\left[4(p_1k)(pk)(k^4-(qr)^2)\right.$$

$$-2k^2(p_1p)((qk)^2-(qr)^2)-4(Qk)^2((p_1r)(pr)+2m_\ell^2(p_1p))+$$

$$+\,4(Qk)(qr)\big((p_1k)(pr)+(p_1r)(pk)\big)-\ell^2\Big(m_\pi^2\big(k^2(p_1p)-2(p_1k)(pk)\big)-$$

$$-\,2(Qk)\big((p_1k)(pq)+(p_1q)(pk)\big)\Big)\Big]-2k^2\gamma\xi\Big[4(qk)(p_1r)(pr)+8m_\ell^2(p_1p)(Qk)+$$

$$+\,4k^2\big((p_1k)(pk)-(p_1r)(pr)\big)-2(qr)\big((p_1k)(pr)+(pk)(p_1r)\big)-\ell^2\big((p_1k)(pq)+(p_1q)(pk)\big)\Big]-$$

$$-\,4k^2\xi\Big[(qr)\big((p_1k)(pr)-(p_1r)(pk)\big)+(k^2-4m_\ell^2)\big((p_1q)(pk)-(p_1k)(pq)\big)\Big]+$$

$$+\,4(k^2)^2\xi^2\Big[(p_1k)(pk)-(p_1r)(pr)-2m_\ell^2(p_1p)\Big]\Big\},$$

$$dW_{IBSD}=\frac{16\sqrt{2}\,\alpha^2G^2f_\pi a_0 m_\ell^2}{(2\pi)^6 m_\pi}\,\frac{d\Gamma}{k^4}\Big\{2y\Big[k^2(pr)(qr)-$$

$$-(k^2-4m_\ell^2)\big(k^2(pq)-(pk)(qk)\big)\Big]+\gamma\Big[4k^2(pk)\big(x(qk)-y(p_1k)\big)-$$

$$-\,2y\big(k^2(pr)(qr)-k^2(pk)(qk)-4m_\ell^2(pk)(qk)\big)-4\big(x(qr)-y(p_1r)\big)\big((qr)(pk)-(pr)(Qk)\big)$$

$$-\,\ell^2\Big(y\big(2(pk)(Qk)+k^2(pq)\big)-2(Qk)\big(x(pq)-y(p_1p)\big)-2(pk)\big(xm_\pi^2+y(p_1q)\big)\Big)\Big]-$$

$$-\,2k^2\xi\Big[2(pk)\big(x(qk)-y(p_1k)-2ym_\ell^2\big)-2(pr)\big(x(qr)-y(p_1r)\big)-\ell^2\big(x(pq)-y(p_1p)-y(pk)\big)\Big]\Big\},$$

где $d\Gamma=\frac{d\vec p}{2p_0}\frac{d\vec p_1}{2p_{10}}\frac{d\vec p_2}{2p_{20}}\frac{d\vec p_3}{2p_{30}}\delta(p+p_1+p_2+p_3-q)$, $k=p_2+p_3$, $r=p_2-p_3$,
$Q=p_1+p$, $\ell^2=k^2-r^2-4m_\ell^2$, $z^2=(qk)^2+m_\pi^2k^2$, $x=F_\pi(k^2)(2qk-k^2)^{-1}$, $y=(2p_1k+k^2)^{-1}$

Каждую из величин dW_i^e, отвечающих вкладу интерференции прямых диаграмм с обменными, можно представить в виде суммы двух слагаемых, отличающихся друг от друга заменой $p_1 \rightleftarrows p_2$. Приведено выражение для одного из этих слагаемых. Второе обозначается символом $[p_1 \rightleftarrows p_2]$.

$$dW^e_{IB} = \frac{32\alpha^2 G^2 f_\pi^2 m^2}{(2\pi)^6 m_\pi} \frac{d\Gamma}{\kappa^2 n^2} \Big\{ 2\big(y(p_1p_3) - x(qp_3)\big)\Big[2(p_1p)\big(x_1(qp_3) - y(p_2p_3)\big) +$$

$$+ (pr)\big(y(p_2n) - x_1(qn)\big) - \big((\kappa n) - n^2\big)\big(y(p_2p) - x_1(pq)\big) + (pn)\Big(y\frac{\kappa^2}{2} - x_1(q\kappa)\Big) -$$

$$- 2y\big((p_1p)((\kappa n) - n^2) + m^2(pn)\big)\Big] + \big(y(p_1\kappa) - x(q\kappa)\big)\Big[n^2\big(x_1(pq) - y(p_2p)\big) +$$

$$+ (p_3p)\big(y(p_2n) - x_1(qn)\big) - 2y\big(n^2(p_1p) - m^2(pn)\big)\Big] + \Big(y\frac{n^2}{2} - x(qn)\Big)\Big[(p_3p)\Big(x_1(q\kappa) - y\frac{\kappa^2}{2}\Big) +$$

$$+ \kappa^2\big(y(p_2p) - x_1(pq)\big) + 2y\big(\kappa^2(p_1p) - m^2(p\kappa)\big)\Big] + 2ym^2(\kappa n)\big(y(p_1p) - x(pq)\big) +$$

$$+ \big(\kappa^2(pn) - (\kappa n)(p_3p)\big)\big(-(p_1p_2)y^2 + (qp_2)xy + (qp_1)x_1y + m_\pi^2 xx_1\big) -$$

$$- y^2\Big[\big(m^2 + 2(p_1p_2)\big)\kappa^2(pn) - \big(3m^2 + 2(p_1p_2)\big)(p_3p)(\kappa n)\Big] + [p_1 \rightleftarrows p_2]\Big\},$$

$$dW^e_{SD} = \frac{32\alpha^2 G^2 a_0^2}{(2\pi)^6 m_\pi} \frac{d\Gamma}{\kappa^2 n^2} \Big\{ n^2\Big[(p\kappa)\big(m_\pi^2((\kappa n) - n^2) - 2(qp_3)((qn) - (q\kappa))\big) +$$

$$+ (pq)\big(2(\kappa n)((q\kappa) + (qp_3)) - \kappa^2(qn) - n^2(q\kappa)\big)\Big] + (pp_3)\Big[-\tfrac{3}{2} m_\pi^2 \kappa^2 n^2 + 2(n^2 - m^2)(qn)(q\kappa) +$$

$$+ m_\pi^2(\kappa n)) + 2(qp_3)^2(\kappa n) - 2(q\kappa)n^2\big((q\kappa) + (qp_3)\big)\Big] - (\kappa n)^2\big(2(pq)(qp_3) + m_\pi^2(pp_3)\big) +$$

$$+ \gamma\Big[\big((pq)\kappa^2 - 2(qp_3)(p\kappa)\big)\big((qn)(\kappa n) + (qp_3)(\kappa n) - \kappa^2(qn)\big) + \frac{1}{2}\kappa^2(qr)\Big[4(qp_3)(pn) - 4(qn)(pp_3) -$$

$$- n^2(pq) - 2(qn)(pn) + 3n^2(qp_3)\Big] - (q\kappa)n^2\Big[3(q\kappa)\Big(-m^2 - (pp_3) - \frac{n^2}{2}\Big) + (\kappa n)\big((qp_3) - (pq)\big) +$$

$$+ 2(qp_3)\big((\kappa n) + (p\kappa)\big)\Big] + \kappa^2 n^2\Big[3(qp_3)(qn) + (pq)\big((pq) + m_\pi^2\big) - m_\pi^2(p\kappa) + 3m_\pi^2\big(m^2 +$$

$$+ (pp_3) + \frac{1}{2}n^2\big)\Big] + \big(\kappa^2(qn) - 2(\kappa n)(qp_3)\big)\big((p\kappa)(qp_1) + (\kappa n)(pq) + 2(pp_3)(qp_3)\big) -$$

$$- \big(\kappa^2 m_\pi^2 + 2(q\kappa)(qp_3)\big)\Big[\frac{n^2}{2}\Big((p\kappa) - \frac{3}{2}\kappa^2\Big) - (\kappa n)(pn)\Big] + \big((\kappa n)(pq) - (qn)(p\kappa)\big)\Big[\kappa^2\big((qn) +$$

$$+ (qp_3)\big) + 2(qp_3)\big(-2m^2 - (\kappa n)\big)\Big] + \kappa^2\Big((pn) - \frac{3}{2}n^2\Big)\big((qn)(q\kappa) + m_\pi^2(\kappa n)\big) -$$

$$-2(qn)^2(pp_3)k^2+2(qp_3)^2(pk)n^2-2(kn)^2(pp_3)m_\pi^2\Big]+\gamma^2\Big[2(qk)\big(n^2(p_1p_2)(pq)+(qp_2)(pp_3)\big)+$$

$$+(qp_3)\big(k^2(pn)-n^2(pk)-2m^2(pn)\big)-(qn)(pp_3)(n^2-m^2)\big)+2(qp_3)(kn)\big((pq)(n^2-(kn))-$$

$$-(pp_3)(qp_3)\big)+m_\pi^2\big(kn)\big(n^2(pk)-(kn)(pp_3)\big)-\frac{1}{2}k^2n^2(pq)\big)\Big]+2n^2(\gamma-\xi)\gamma\Big[2(qk)\big((pp_3)(n^2-$$

$$-(kn))+m^2(pp_1)\big)-(qp_3)\big((pk)(n^2-2m^2)-2(kn)(pp_2)\big)-k^2\big((p_1p_2)(pq)+(qp_3)(pn)\big)\Big]+$$

$$+2n^2(\gamma-\xi)\Big[\big(2(qp_3)(pk)-k^2(pq)\big)(p_1p_2+m^2)-k^2(pp_3)(2qp_3-qn)+(pp_3)\big(k^2(qk)-2(kn)(qp_2)\big)-$$

$$-2m^2\big((qn)(pk)-(pq)(kn)\big)\Big]+2k^2n^2(\gamma-\xi)^2\Big[-m^2(pq)+2(pp_3)(m^2+p_1p_2)\Big]+[p_1\rightleftarrows p_2]\Big\},$$

$$dW^e_{IBSD}=\frac{32\sqrt{2}\,\alpha^2G^2m^2f_\pi a_0}{(2\pi)^6m_\pi}\frac{d\Gamma}{k^2n^2}\Big\{2\big(x(qp_3)-y(p_1p_3)\big)\Big[(pq)(2n^2-kn)+(pn)(qk-2qn)\Big]+$$

$$+\Big(x_1(qk)-y\frac{k^2}{2}\Big)\Big[(pq)(n^2-kn)+3(pk)(qn)-2(qn)(pp_3)\Big]+\big(x(qk)-y(p_1k)\big)\big((pn)(qn)-n^2(pq)\big)+$$

$$+\big(x(pq)-y(pp_1)\big)\big((qn)(kn)-n^2(qk)\big)+\big(m_\pi^2x+y(qp_1)\big)\big(2(kn)(pp_1)+k^2(pn)\big)+y\Big[n^2(pk)(qp)-$$

$$-2n^2k^2(pq)+\frac{1}{2}(n^2-4m^2)\big((pq)(kn)-(qk)(pn)\big)+4n^2(qk)(pp_3)-2(pp_3)(qp_3)(kn)-$$

$$-\frac{3}{2}(qk)\big(2(kn)(pp_3)-n^2(pk)\big)\Big]+\gamma\Big[\big(x(qp_3)-y(p_1p_3)\big)\big(2(qn)(2pp_1-pk)+4(pn)(qp_3)+$$

$$+2(pq)n^2\big)-\big(x(qk)-y(p_1k)\big)\big(2(qn)(pp_1)+2(qp_3)(pn)+n^2(pq)\big)+\big(x(pq)-y(pp_1)\big)\big(k^2(qn)+$$

$$+n^2(qk)-2(kn)(qp_3)\big)+2\Big(x(qn)-y\frac{1}{2}n^2\Big)\big((qp_3)(pk)-(pn)(qk)\big)-\big(xm_\pi^2+y(qp_1)\big)\big(2(pn)(kn)$$

$$-n^2(pk)\big)-y\big(n^2(pk)(qk+qp_1)+(pp_3)\big((qk)(3n^2-2kn)-2(kn)(qp_3)\big)+2m^2(qk)(pn)+$$

$$+\frac{1}{2}k^2n^2(pq)\big)\Big]+2n^2(\gamma-\xi)\Big[\big(x(qp_3)-y(p_1p_3)\big)(pk+2pp_3-4pn)+\big(x(qk)-y(p_1k)\big)(2pn-$$

$$-pp_3)-\frac{1}{2}k^2\big(x(pq)-y(pp_1)\big)+y\big(n^2(pk)-2(nk)(pp_3)+m^2(pk)+2k^2(pp_3)\big)\Big]+[p_1\rightleftarrows p_2]\Big\},$$

где $n=p_1+p_3$, $x_1=F_\pi(n^2)(2qn-n^2)^{-1}$.

Приложение Б

При вычислении интегралов использовался метод Монте-Карло. Случайные точки в фазовом пространстве четырех частиц разыгрывались программой ФОРС [19]. Интегралы считались по формуле

$$J = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |M|_i^2 \, dW_i \quad ,$$

где N – число разыгранных распадов, $|M|_i^2$ – квадрат матричного элемента для случайного события, W_i – "вес события", определенный в [19] (усреднение "весов" дает фазовый объем).

При вычислении интегралов от функций, содержащих множители $1/k^2$ (или $1/(k^2)^2$), вначале разыгрывалось значение k^2 с плотностью, учитывающей зависимость подинтегрального выражения от k^2, а затем уже точка в фазовом пространстве "каскадного" распада

$$m_\pi \to m + m_\nu + \sqrt{-k^2}$$
$$\hookrightarrow m + m \quad .$$

Это позволило существенно уменьшить вариацию подинтегрального выражения и, как следствие, повысить точность расчётов.

Для вычисления отдельных вкладов было разыграно от 20 тысяч до 100 тысяч точек в фазовом пространстве, что дало возможность вычислить интегральную вероятность с точностью, лучшей чем 2%.

Литература

1. С.М. Коренченко, Б.Ф. Костин, Г.В. Мицельмахер, Н.Г. Некрасов, В.С. Смирнов. Препринт ОИЯИ, Р1-5250, Дубна, 1970.
2. T. Ericson, S.L. Glashow. Phys.Rev., 133, B130 (1964).

А. Ванжа, А. Исаев, Л. Лапидус. ЯФ, 12, 595 (1970).
3. V.G. Vaks, B.L. Ioffe. Nuovo Cim., 10, 342 (1958).
4. T. Das, V.S. Mathur, S. Okubo. Phys.Rev.Lett., 19, 859 (1967) ; В.С. Березинский. ЯФ, 7, 125 (1968).
5. S.G. Brown, S.A. Bludman. Phys.Rev., 136, B1160 (1964).
6. P. Depommier, J. Heintze, C. Rubbia, V. Soergel. Phys.Lett., 7, 285 (1963).
7. S.L. Adler, R.F. Dashen. Current Algebras and Applications to Particle Physics. W.A. Benjamin, Inc. New York Amsterdam 1968, p. 219.
8. W. Flagg. Phys.Rev., 178, 2387 (1969).
9. W.K.H. Panofsky. 14th Intern. Conf. on High Energy Physics, Vienna, 1968, p. 32.
10. M. Gell-Mann. Physics, 1, 63 (1964).
11. Чжоу Гуан-чжао, ЖЭТФ, 39, 703 (1960); J. Bernstein, S. Fubini, M. Gell-Mann, W. Thirring. Nuovo Cim., 17, 757 (1960).
12. М.М. Мусаханов. Препринт ОИЯИ, Р2-4887, Дубна, 1970.
13. S.L. Adler. Phys.Rev., 139, B1638 (1965).
14. Review of Particle Properties. Rev.Mod.Phys., 42, No 1, (January 1970).
15. V.L. Auslander, G.I. Budker, Ju.N. Pestov, V.A. Sidorov, A.N. Skrinsky and A.G. Khabakhpashev. Phys.Lett., 25B , 433 (1967); J.E. Augustin, J.C. Bizof, J. Buon, J. Haissinski, D. Lalanne, P. Marin, H. Nguyen Ngoc, J. Perez-Y-Jorba, F. Rumpf, E. Silva, S.Tavernier. Phys.Lett., 28B , 508 (1969).

16. С.А. Пикин, Ю.Н. Харкац. ЯФ, 1, 291 (1965).
17. G. Bellettini, C. Bemporad, P.L. Braccini, C. Bradaschia, L. Foa, K. Lubelsmeyer and D. Schmitz. Nuovo Cim., 66A, 243 (1970).
18. S. Okubo. Phys.Rev., 179, 1629 (1969);
F.J. Gilman. SLAC-PUB-594, 1969.
19. В.Е. Комолова, Г.И. Копылов. Препринт ОИЯИ, Р-2027, Дубна, 1965; Р11-3193, Дубна, 1967.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 декабря 1970 года.