СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 5513

Х.Я. Христов

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ НА ГРУППЕ ПУАНКАРЕ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1970

Р2 - 5513

Х.Я. Христов

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ НА ГРУППЕ ПУАНКАРЕ

Abstract

In the direction of the work by Lurcat, Kihlberg and Fuchs a quantum mechanics and a quantum field theory are considered where the wave functions and the field operators depend not on the 4 coordinates in the Minkovski space M but on all 10 variables determining the inertia frames of reference i.e. the elements of the Poincare'group. P = (t,l) (t - translation vector, l - Lorents matrix). The difference is that we introduce metrics in the space P invariant in respect to

$$(t,\ell) \to (s,h)(t,\ell)(0,k). \tag{1}$$

With this the metrics is determined up to two constants (to be found by the experiment).

As example one writes and solves the equation in P , analogous to the Klein-Gordon equation in M.Farther,the second quantisation of this equation is given by writing the equation for the commutator, invariant in respect to (1). It has not been completely solved, but it is clear that the local commutativity holds.

The aim of the paper is to get nontrivial models of interaction field theories by making larger the set of solutions.

I. Введение

В 1964 году Люрса[1] выдвинул идею заменить пространство Минковского M в квантовой теории поля пространством элементов группы Пуанкаре P. Такая замена предполагает не только инвариантность теории по отношению к этой группе (в любой релятивистской теории это так и есть), но и возможность рассматривать операторы поля как функции всех 10 параметров, характеризующих элементы группы P, а не только 4-координат в M. Цель замены - достичь большей симметрии по массе m и спину s, используя тот факт, что они характеризуют неприводимые представления именно группы P. Идея Люрса была развита в дальнейшем Кильбергом и Фуксом[2,3,4,5]. Основная задача этих работ - найти общие свойства операторных полей, определенных на группе P и вытекающих из требования Пуанкаре-инвариатности. Структура теории и затронутые вопросы таковы же, как и при аксиоматическом подходе.

В настоящей работе мы также будем развивать P - теорию, но соображения и цели перехода от M в P, как и конкретные дополнительные требования, при помощи которых осуществляется этот переход, у нас иные, чем в упомянутых работах. Многие моменты рассматриваемой P - теории аналогичны стандартной M - теории, и поэтому мы не будем излагать всё последовательно с начала до конца. Изложение следует принимать как исходную позицию некоторого пространственного обобщения стандартной M - теории. Сравнительно простые и в общем приемлемые результаты, которые мы получаем на примере однократно и двукратно квантованного свободного скалярного поля в P - пространстве, нам кажутся обнадеживающими. Используя решения (П.10) уравнения (П.7), возможно удастся с меньшими трудностями создать нетривиальные модели квантовой теории поля[6] (стр. 99-100).

II. Постановка задачи

В теории первичного, а также и вторичного квантования каждой микросистеме соответствует Гильбертово пространство H. Состояние определяется источником G - макроприбором, излучающим микросистемы, в частности, микрочастиц. Таким источником может быть, например, радиоактивный препарат, накаленная нить, ионный источник и т.д. Каждому состоянию микросистемы соответствует нормированный к 1 вектор Φ в H. (Есть и смешанные ансамбли, где состояние задается набором векторов Φ_n, но для нас это неважно.) Каждой динамической переменной s микросистемы, т.е. каждому прибору для ее измерений соответствует самосопряженный оператор σ в H [7] (стр. 151). Обратное утверждение тоже верно - каждому оператору σ соответствует переменная s и, по крайней мере, один прибор S [7] (стр. 234). Приборы S - это макросооружения, например, куски фотоэмульсии, гейгеровские счетчики, пузырьковые камеры и т.д., дающие макроэффекты под действием исследуемой микросистемы. Для общности будем предполагать, что s, а, следовательно, и σ - многокомпонентны - $s = (s_m)$, $\sigma = (\sigma_m)$, где

m пробегает некоторое конечное или бесконечное множество значений. Принимаем [7] (стр. 22I), что

$$\bar{S} = \bar{\Phi}\cdot\sigma\cdot\Phi,$$

или, что то же:

$$\bar{S}_m = \bar{\Phi}\cdot\sigma_m\cdot\Phi. \qquad (I)$$

При этом если σ_m не коммутирующие, т.е. если S_m не измеримы одновременно, то при нахождении $\bar{S}_m$ предполагается, что именно компонента S_m измеряется первой.

Элементы группы Пуанкаре P имеют двоякий физический смысл. Во-первых, они характеризуют переходы из одной инерциальной системы отсчёта O в другую - O' - тогда мы будем обозначать их через q и, во-вторых, характеризуют сами системы отсчета O, выбирая одну из них O_0 как исходную - тогда мы будем обозначать их через p [I].

В соответствии с принципом относительности мы классифицируем источники G и соответственно - измерительные приборы S. Два источника G и G' - соответственно два измерительных прибора S и S' - будут принадлежать одному и тому же классу (назовем их однотипными), если они получаются друг из друга некоторым преобразованием Пуанкаре или, что все равно, если это один и тот же прибор, отнесенный к разным инерциальным системам отсчёта O и O' [9] (стр. 22-24, 65). Следовательно, мы можем обозначить

$$G = G_i(p), \quad S = S_k(p),$$

причем

$$p = (t, \ell) \qquad (2)$$

Элемент группы P (t - вектор трансляции, а l - лоренцовская матрица вращения) характеризует приборы в заданном классе, а i , соответственно k , характеризуют сами классы. Имеем ещё:

$$\Phi = \Phi_i(p), \quad \sigma = \sigma_k(p). \tag{3}$$

Предполагается, что при переходе от одного источника G к другому G' , однотипному ему, Φ преобразуется линейно с сохраняющейся нормой, причем преобразование зависит только от взаимного расположения q приборов G и G' . Значит, Φ преобразуется по некоторому унитарному линейному представлению группы P :

$$\Phi' = U(q)\, \Phi, \tag{4}$$

где по аналогии с (2)

$$q = (\tau, h) \tag{5}$$

Далее предполагается, что при переходе от одного измерительного прибора S к другому S' , однотипному ему, преобразование средних значений $\bar{S}_m$ зависит единственно от взаимного расположения q приборов S и S' . Без ограничения общности (включая, если нужно, дополнительные переменные) мы можем принять, что $\bar{S}_m$ преобразуются линейно. Следовательно,

$$\bar{S}'_m = L_{mn} \bar{S}_n \tag{6}$$

(при этом суммирование или интегрирование по повторяющемуся индексу n подразумевается), а $L_{mn}(q)$ - некоторое линейное представление группы P . Из (I), (4) и (6) получаем закон преобразования операторов σ :

$$\sigma'_m = L_{mn}(q)\, U(q)\, \sigma_n\, U^{-1}(q),$$

или в соответствии с (3) -

$$\sigma_m(q.p) = L_{mn}(q)\, U(q)\, \sigma_n(p)\, U^{-1}(q). \tag{7}$$

Прежде чем идти дальше, прокомментируем полученные результаты.

Соотношение (7) похоже на соответствующие соотношения в стандартной M - теории:

$$\sigma_m(\tau + ht) = L_{mn}(h)\, U(\tau.h)\, \sigma_n(t)\, U^{-1}(\tau.h), \tag{8}$$

а также в теории Люрса и др.:

$$\sigma(q.p) = U(q)\, \sigma(p)\, U^{-1}(q). \tag{9}$$

При этом в соответствии с нашими обозначениями (2) координаты в M обозначены через t (вместо x).

Видно, что (7) содержит как частные случаи (8) и (9). Но более существенно то, что (7) получено только на основании предположения, что ϕ и ξ_m преобразуются линейно при переходе из одной системы отсчета O к другой O'. Чтобы получить (8) или (9), придется ставить дополнительные, не столь общие и естественные требования.

Ввиду (2) преобразование (7) отличается от (8), во-первых, включением τ как аргумента у L , т.е. в (7) рассматриваются все представления группы Пуанкаре, а в (8) - только её подгруппы Лоренца. С точки зрения единства и симметрии (7) имеет преимущество перед (8), но насколько с физической точки зрения это обобщение ценно, мы пока не можем сказать – природа не должна осуществлять все варианты данной теории. Более существенная разница между (7) и (8) в том, что в качестве аргумента у σ включена матрица ℓ. Это дает возможность легко решить (7) по отношению к σ в отличие от (8), решения которого неизвестны. А именно

$$\sigma_m(p) = L_{mn}(p)\,U(p)\,\sigma_{on}\,U^{-1}(p)\,, \tag{10}$$

где σ_{om} – любые неизменяющиеся операторы, представляет собой общее решение (7). По нашему мнению, одна из трудностей при создании моделей квантовой теории поля состоит в том, что не удается решить (8) и поэтому замена t на p может облегчить задачу.

Предполагать, что σ зависит от t (или x), но не от ℓ, как это делается в M – теории, означает, что показания прибора S могут меняться, когда мы перемещаем его в пространстве и во времени, но не тогда, когда меняется его ориентация или скорость. Такое предположение не противоречиво, в том смысле, что группа трансляций в M – подгруппа группы P и, следовательно, оно не нарушает Пуанкаре-инвариантность теории, но общими соображениями теории оправдать его нельзя и поэтому нет оснований отбросить аргумент ℓ /I/.

Если один оператор σ входит в уравнения движения рассматриваемой микросистемы, то ввиду транзитивности группы P нет возможности не включить и все остальные операторы его класса $\sigma(p)$. Поэтому, если мы согласились, что приборы S преобразуются по изоморфным представлениям группы P, а не только по представлениям её подгруппы трансляций в M, то в P – инвариантной теории аргументом операторов поля ψ должен быть p (2), а не только t (или x). В уравнения (7) должны входить все, а не только некоторые компоненты данного вектора.

Сравним теперь (7) с (9). Ввиду того, что $\S$ зависит от p (2), т.е. не только от t, но и от ℓ, в пространстве однокомпонентных $\bar{S}(p)$ можно осуществить не только скалярные, но и любые многокомпонентные представления группы P. Поэтому следует согласиться, что отсутствие множителя L в (9) ещё не означает, что Люрса и др. ограничиваются скалярными полями. Иными словами, в отличие от (8) нельзя утверждать, что множителем L в (7) мы включаем тензорные и спинорные поля. Значения фактора L в (7) можно будет выяснить только после того, как будут сформулированы все основные положения P – теории.

По принципу соответствия включением аргумента ℓ P – теория становится приспособленной описывать движение твердых частиц, которые в отличие от материальных точек могут не только двигаться вперед, но и вращаться вокруг своего центра масс. Таким образом, у нас есть две возможности описывать вращательное движение: при помощи переменной ℓ и при помощи индекса m. Такие две возможности имеются и в нерелятивистской квантовой теории при использовании уравнения Паули и уравнения Вигнера/9/. Эти две возможности как в нерелятивистской механике, так и здесь, не эквивалентны и поэтому a priori нельзя ограничиваться одной из них. В дальнейшем мы введем предположение, которое даст возможность ввести римановскую метрику в пространство P. Это предположение не вытекает из интерпретации вращающейся частицы и поэтому развиваемая здесь P - теория, наверное, имеет отношение к релятивистскому движению твердых частиц (а не только точек). Этот вопрос остается пока открытым [5].

Мы приняли, что каждому самосопряженному оператору σ соответствует одна переменная s и, по крайней мере, - один прибор S. Но какой фактически это прибор - на этот вопрос и в стандартной M - теории нет четкого общего ответа [10]. Локальные операторы, например $\psi\bar{\psi}, i\bar{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t} - i\psi\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t}$ и т.д., которыми пользуется теория вторичного квантования и средние значения которых (1) связаны со значениями операторных полей ψ только в одной точке p или x, преобразуются по закону (7), соотв. (9). Но в теории первичного квантования приборы, определяющие координаты или импульсы частиц в заданный момент, где бы они не находились, не локальные - по идее они сразу продувывают все пространство. Поэтому (7), как и (8), не имеет места в теориях первичного квантования.

Теперь нам предстоит все уравнения вторичного, а до этого и первичного квантования, которые пишутся для функций и операторов в стандартной M - теории, перенести в P - теорию. Мы будем стремиться к минимальным изменениям и к максимальному использованию аналогии. Имеется, однако, одно существенное препятствие. Пространство M - метрическое, а наличие метрического тензора дает возможность выписать ряд алгебраических, дифференциальных и других уравнений. В отличие от этого пространство P не метрическое, и это ограничивает возможность пользоваться инвариантными уравнениями. Мы покажем, что все же довольно естественно можно ввести метрику и в пространство P, потребовав, чтобы она была инвариантной по отношению к некоторой группе Q, действующей в пространстве P, но более общей, чем сама группа P. После этого не будет существенных затруднений перенести все основные утверждения M - теорий в P - теорию. Существование этой более общей группы в пространстве P, по отношению к которой теория должна быть инвариантной, не следует из принципа относительности - это более сильное утверждение, которое и является характерным для нашего подхода. Могут существовать, конечно, и другие P - инвариантные теории.

Ш. Введение метрики в P - пространство

Расстояние s от точки p до точки p_1 в пространстве P, по определению, будет функцией p и p_1:

$$s = s(p, p_1),$$

которая удовлетворяет следующим требованиям.

а) Расстояние не меняется при переходе к сходным парам:

$$s(p, p_1) = s(q \cdot p, q \cdot p_1)$$

при любом q.

При этом сходными мы называем два множества точек p_i и p_i', если одно получается из другого под действием слева (или справа) одного и того же преобразования из P:

$$p_i' = q \cdot p_i \quad (\text{или } p_i' = p_i \cdot q).$$

Если не указано другое, мы будем подразумевать левое сходство.

b) Если заданы n сходных пар точек, причем начало следующей пары совпадает с концом предыдущей:

$$p_0 p_1, p_1 p_2, \ldots, p_{n-1} p_n,$$

то расстояние от начала первой пары до конца последней в n раз больше расстояния от начала до конца первой пары:

$$S(p_0, p_n) = n\, s(p_0, p_1).$$

c) Если

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p$$

в смысле топологии группы P, то

$$\lim_{n\to\infty} s(0, p_n) = s(0, p).$$

Отметим, что выполнение соотношения треугольника и даже условия симметричности $s(p, p_1) = s(p_1, p)$ мы не потребовали.

Пусть dp – точка в окрестности единичного элемента 0 группы P и пусть $s(dp)$ – произвольная непрерывная и однородная первой степени функция dp. Выбирая

$$ds = s(dp) \tag{I}$$

как расстояние от 0 до dp, можно показать, что этим однозначно определяется расстояние между произвольными двумя точками в P. На самом деле, пусть по определению

$$dp_0 = p^{-1} \cdot (p + dp). \tag{2}$$

Тогда из (I) следует:

$$ds = s(p^{-1} \cdot (p + dp)) \tag{3}$$

есть расстояние от точки p до $p + dp$. То, что для бесконечно близких точек требование a) выполнено, проверяется легко, если иметь в виду, что

$$p^{-1}\cdot(p+dp)=(q\cdot p)^{-1}\cdot(q\cdot(p+dp)).$$

То, что этим расстояние однозначно определено и когда p и p_1 не бесконечно близки, следует из b) и с).

Величины (2) - их 10 -, очевидно, можно рассматривать как расстояние. Они не что иное, как компоненты перемещения, которые получаются, если p и $p+dp$ перенесем так, чтобы точка p перешла в единичный элемент O группы P. Если

$$(q\cdot p)_i = F_i(q_k, p_l)$$

есть закон умножения в группе P, то

$$(p^{-1}\cdot(p+dp))_i=\left(\frac{\partial F_i(q_k,p_l)}{\partial p_l}\right)_{q_k=p_k^{-1}} dp_l \tag{4}$$

позволяет найти как функции от p_l и dp_l эти 10 независимых между собой возможных расстояний от p до $p+dp$. Тогда ввиду (3) все другие определения расстояния сводятся к их однородным функциям первой степени.

Возможность ввести в пространство Пуанкаре P такое множество метрик, инвариантных по отношению к группе P, связана с тем, что число параметров группы равно, а не больше числа измерений её параметрического пространства. Поэтому группу P можно сравнить с группой трансляций в пространстве P.

Сформулируем дополнительное требование:

d) метрика в P риманова, т.е. ds^2 - вещественная квадратичная форма dp:

$$ds^2=a_{ij}\,dp_{oi}\,dp_{oj}=a_{ij}(p^{-1}\cdot(p+dp))_i(p^{-1}\cdot(p+dp))_j\,, \tag{5}$$

где a_{ij} - вещественная симметрическая матрица. Видим, что значительная свобода всё ещё остается - имеется 10.11/2=55 произвольных констант a_{ij} .

Отметим один побочный результат. В геометрии Римана ставится вопрос о группе движений - группе, которая сохраняет не только значение, но и форму линейного элемента ds , т.е. зависимость ds от p и dp . При любом выборе a_{ij} (5) задает риманово пространство с десятипараметрической группой движения P . Этим найден способ построения 10-мерных римановых пространств, допускающих 10-параметрическую группу движения. При этом ввиду транзитивности P ясно, что скалярная кривизна постоянна, но ввиду наличия 55 произвольных констант видно, что в общем метрика не сферическая. Все сказанное относительно метрики в P можно непосредственно обобщить на любую транзитивную и даже не транзитивную группу Ли /11/.

IУ. Дополнительная инвариантность метрики в P

Чтобы прийти к более конкретному выражению для ds , мы расширим группу P , по отношению к которой метрика должна быть инвариантной.

В соответствии с (II.2) обозначим

$$t=(t^{\mu}),\ l=(l_{\nu}^{\mu}), \qquad (1)$$

причем

$$a_{\varkappa\lambda}\, l_{\mu}^{\varkappa} l_{\nu}^{\lambda} = a_{\mu\nu} \qquad (2)$$

$(a_{00}=-a_{ii}=1;\ a_{\mu\nu}=0$ при $\mu\neq\nu;\ \mu,\nu=0,1,2,3;\ j,i=1,2,3)$.

Закон умножения в группе P и обратное преобразование задаются через

$$p \cdot p_1 = (t, \ell)(t_1, \ell_1) = (t + t.\ell_1,\ \ell.\ell_1), \tag{3}$$

$$p^{-1} = (-\ell^{-1}.t,\ \ell^{-1}), \tag{4}$$

и, следовательно,

$$dp_0 = (dt_0, d\ell_0) = (\ell^{-1}.dt,\ \ell^{-1}d\ell). \tag{5}$$

Более общая группа Q, которую мы вводим, определяется одним вектором τ и двумя лоренцовскими матрицами h и k:

$$Q = (\tau, h, k). \tag{6}$$

Она действует в пространстве P, причем, используя обозначения (П.2) и (3), её действие можно описать через

$$\begin{aligned}(\tau, h, k)(t, \ell) &= (\tau, h)(t, \ell)(0, k) = \\ &= (\tau + h.t,\ h.\ell.k),\end{aligned} \tag{7}$$

т.е. она представляет собой умножение элемента (t, ℓ) слева на (τ, h) и справа на $(0, k)$, а последовательность умножения, очевидно, не имеет значения.

Последнее требование к расстоянию S в P следующее:

е) Расстояние S инвариантно по отношению к преобразованию:

$$(t, \ell) \to (t, \ell)(0, k).$$

Иными словами, мы заменяем требование а) на более сильное требование а) Расстояние инвариантно по отношению к группе $\mathcal{Q}$ (6):

$$(t,\ell) \to (\tau, h)(t,\ell)(0,\kappa).$$

Физический смысл этого требования следующий. Величину s мы будем рассматривать как расстояние не между преобразованиями Пуанкаре, а между инерциальными системами отсчета O. (Ввиду того, что существует взаимно однозначная связь между материальными частицами и системами отсчета/I2/, мы будем рассматривать s и как расстояние между состояниями двух частиц.) Тогда условие дополнительной инвариантности означает, что если O и O_1 - две системы отсчета, а O' и O_1' получаются из O и O_1 одним и тем же лоренцовским поворотом, то расстояния от O до O_1 и от O' до O_1' должны быть одинаковы. Иными словами, метрика в P инвариантна по отношению к одновременному повороту осей систем O, связанных со всеми частицами. Поэтому мы назовем это условием изотропности. Условие изотропности менее ограничительно, чем условие инвариантности по отношению к группе левого и правого умножения на элементы из группы P:

$$p \to q\cdot p\cdot q'.$$

Ввиду (7) получаем, что применение $\mathcal{Q}$ к dp_0 (Ш.2) означает

$$(dt_0, d\ell_0) = (\ell^{-1}\cdot dt, \ell^{-1}\cdot d\ell) \to$$

$$\to (\kappa^{-1}\cdot \ell^{-1}\cdot dt, \kappa^{-1}\cdot \ell^{-1}\cdot d\ell\cdot\kappa) = (\kappa^{-1} dt_0, \kappa^{-1}\cdot d\ell_0\cdot\kappa),$$

т.е. dt_0 и $d\ell_0$ преобразуется по отношению к κ как ковариантный вектор и смешанный тензор. Тогда инвариантность по отношению к κ будет обеспечена, если dt_0 и $d\ell_0$ входят в ds (Ш.I) только в виде скалярных комбинаций (которые мы можем составить при помощи инвариантных тензоров $a_{\mu\nu}$, $a^{\mu\nu}$ и $\varepsilon_{\varkappa\lambda\mu\nu}$). При этом число независимых комбинаций конечно.

Их степень может быть только четной. (Из этого следует симметричность расстояния $S(P, P_1) = S(P_1, P)$. Комбинаций второй степени имеется всего три:

$$a_{\mu\nu} dt_0^{\mu} dt_0^{\nu}, \; a_{\varkappa\lambda} a_{\mu\nu} dl_0^{\varkappa\mu} dl_0^{\lambda\nu}, \; \varepsilon_{\varkappa\lambda\mu\nu} dl_0^{\varkappa\lambda} dl_0^{\mu\nu}$$

$$(l^{\mu\nu} = l^{\mu}_{\ \varkappa} a^{\varkappa\nu}).$$

Комбинациями четвертой степени являются

$$a^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\gamma\varkappa\lambda} \varepsilon_{\beta\delta\mu\nu} dt_0^{\gamma} dt_0^{\delta} dl_0^{\varkappa\lambda} dl_0^{\mu\nu},$$

и т.д. $\varepsilon_{\alpha\gamma\varkappa\mu} \varepsilon_{\beta\delta\mu\nu} dl_0^{\alpha\beta} dl_0^{\gamma\delta} dl_0^{\varkappa\lambda} dl_0^{\mu\nu}$.

Если мы учтем условия а), в) и с), не требуя пока d), то получим, что любую непрерывную и однородную первой степени по отношению к dt_0 и dl_0 функцию этих скалярных комбинаций можно взять в качестве dS. Мы потребуем все четыре условия а), б), с) и d) и тогда

$$ds^2 = a_{\mu\nu} dt_0^{\mu} dt_0^{\nu} + \alpha a_{\varkappa\lambda} a_{\mu\nu} dl_0^{\varkappa\mu} dl_0^{\lambda\nu} + \beta \varepsilon_{\varkappa\lambda\mu\nu} dl_0^{\varkappa\lambda} dl_0^{\mu\nu}. \tag{8}$$

Видим, что метрика все ещё неоднозначна, но остались только две вещественные константы α и β, значения которых следует искать из опыта.

Подставляя (5) в (8), видим, что метрика пространства не плоская - коэффициенты метрического тензора зависят от (I). Точнее, они зависят только от l, и это показывает, что пространство P цилиндрическое по отношению к t.

Метрика (8) допускает I6-параметрическую группу движений G (6). Этот результат, как способ получения римановских пространств с группами движения, число параметров которых больше, чем число измерений пространства, тоже можно обобщить на любую группу Ли, представляющую собой полупрямое произведение двух групп /II/.

У. Выбор координат в пространстве P

Мы попробуем выбрать координаты в IO-мерном пространстве P таким образом, чтобы выражение (IУ.8) было по возможности более простым. Параметры трансляции t^{μ} входят достаточно просто, так что вопрос сводится к параметризации матрицы Лоренца $\ell^{\mu}{}_{\nu}$. Параметризация, которой мы будем пользоваться, известна, но ради уточнения обозначений мы дадим некоторые выкладки. Пусть

$$\lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad (\alpha\delta - \gamma\beta = 1)$$

элементы группы $SL(2C)$. Связь между ℓ и λ задается через

$$\tau^{\mu\alpha\dot{\beta}} = \ell^{\mu}{}_{\nu}\, \lambda^{\alpha}{}_{\gamma}\, \tau^{\nu\gamma\dot{\delta}}\, \lambda_{\dot{\delta}}{}^{\dot{\beta}} \tag{I}$$

/I3/,/I4/ (стр. I07-II0). При этом первыми буквами греческого алфавита будем обозначать спинорные индексы. Они принимают два значения, например, +I/2, и -I/2, а $\tau^{\mu\alpha\dot{\beta}}$ представляют собой матрицы Паули:

$$\tau^{0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tau^{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tau^{2} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tau^{3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

При переходе к другой системе отсчета верхние и нижние спинорные индексы без точки или с точкой преобразуются следующим образом:

$$\psi'^{\alpha} = \lambda^{\alpha}{}_{\beta}\, \psi^{\beta}, \quad \psi'_{\alpha} = \lambda_{\alpha}{}^{\beta}\, \psi_{\beta},$$
$$\psi'^{\dot{\beta}} = \psi^{\dot{\alpha}}\, \lambda_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}, \quad \psi'_{\dot{\beta}} = \psi_{\dot{\alpha}}\, \lambda^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}},$$

где
$$\lambda_{\alpha}{}^{\beta} = \lambda^{-1T\alpha}{}_{\beta},\ \lambda_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta} = \lambda^{+\alpha}{}_{\beta},\ \lambda^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} = \bar\lambda^{-1\alpha}{}_{\beta}.$$

Поднятие и опускание индексов производится при помощи матриц
$$\gamma^{\alpha\beta} = \gamma_{\dot\alpha\dot\beta} = -\gamma_{\alpha\beta} = -\gamma^{\dot\alpha\dot\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы τ удовлетворяют соотношениям
$$\tau^{\mu\alpha\dot\beta}\tau_{\nu\alpha\dot\beta} = 2\delta^{\mu}{}_{\nu},\ \tau^{\mu\alpha\dot\beta}\tau_{\mu\gamma\dot\delta} = 2\delta^{\alpha}_{\gamma}\delta^{\dot\beta}_{\dot\delta}, \tag{3}$$

которые и определяют их до унитарного преобразования и до комплексной сопряженности, т.е. до знака у τ^2. При помощи (3) из (I) находим:
$$\ell^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2}\tau^{\mu}{}_{\alpha\dot\beta}\lambda^{\alpha}{}_{\gamma}\tau_{\nu}{}^{\gamma\dot\delta}\lambda_{\dot\delta}{}^{\dot\beta}. \tag{4}$$

Можно ввести еще величины
$$\tau^{\mu\dot\alpha\beta} = \bar\tau^{\mu\alpha\dot\beta},$$
при помощи которых связь (6) переписывается в виде
$$\tau^{\mu\dot\alpha\beta} = \ell^{\mu}{}_{\nu}\,\mu^{\dot\alpha}{}_{\dot\gamma}\tau^{\nu\dot\gamma\delta}\mu_{\delta}{}^{\beta}\ (\mu = \lambda^{T}),$$
а также и величины
$$\tau^{\mu\alpha}{}_{\beta} = \tau^{\mu}{}_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta} = \tau^{\mu\alpha\dot\beta},$$
которые хотя и написаны в виде спин-векторов, таковыми не являются: τ^{0} - скаляр, а $\underline{\tau} = (\tau^{i})\ (i = 1,2,3)$ - трехмерный комплексный вектор. Принимаем ещё
$$\lambda^{\alpha}{}_{\beta} = w_{\mu}\tau_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\beta}, \tag{5}$$

где w_0 - скаляр, а $\underline{w} = (w_i)$ - трехкомпонентный вектор, причем
$$w_0^2 - \underline{w}^2 = 1 \tag{6}$$
обеспечивает унимодулярность λ. Тогда (5) мы можем переписать в виде
$$\lambda^{\alpha}{}_{\beta} = \sqrt{1+\underline{w}^2}\,\delta^{\alpha}{}_{\beta} + \underline{w}\cdot\tau^{0\alpha}{}_{\beta}. \tag{7}$$

Соотношения (4) и (7) дают искому параметризацию ℓ через $\underline{w}$ и, следовательно, наряду с (П.2) мы можем написать

$$p = (t, w). \tag{8}$$

Остается подставить (7) и (4) в (IУ.8). Для этой цели введем ещё два комплексных трехкомпонентных вектора $d\underline{u}_o$ и $d\underline{v}_o$ такие, чтобы имея в виду (IУ.5) и (IУ.I), мы могли бы записать

$$d\ell^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & du_{oj} \\ du_{oi} & \varepsilon_{ijk} dv_{ok} \end{pmatrix} (\mu = o, i; \ \nu = o, j). \tag{9}$$

Тогда (IУ.8) переходит в

$$ds^2 = a_{\mu\nu} dt^{\mu} dt^{\nu} - 2\alpha (d\underline{u}_o^2 - d\underline{v}_o^2) + 8\beta \, d\underline{u}_o \, d\underline{v}_o . \tag{IO}$$

Пусть $d\underline{w}_o$ – вектор, соответствующий $d\ell_o$. Из (7) при малом $\underline{w} = d\underline{w}_o$ находим

$$d\lambda_o{}^{\alpha}{}_{\beta} = d\underline{w}_o \underline{\tau}^{\alpha}{}_{\beta}, \quad d\lambda_{o\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} = d\underline{\bar{w}}_o \cdot \underline{\tau}_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}$$

и из (4) при $\lambda^{\alpha}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta} + d\lambda_o{}^{\alpha}{}_{\beta}$ получаем

$$d\ell_o{}^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2} \tau^{-\mu}{}_{\alpha\dot{\beta}} (\delta^{\alpha}{}_{\gamma} + d\underline{w}_o \cdot \underline{\tau}^{\alpha}{}_{\gamma}) \tau_{\nu}{}^{\gamma\dot{\delta}} (\delta_{\dot{\delta}}{}^{\dot{\beta}} + d\underline{\bar{w}}_o \cdot \underline{\tau}_{\dot{\delta}}{}^{\dot{\beta}}) - \delta^{\mu}{}_{\nu}.$$

Тогда, имея в виду (3), находим

$$d\ell_o{}^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2} d\underline{w}_o \cdot \tau^{\mu}{}_{\alpha\dot{\beta}} \underline{\tau}^{\alpha}{}_{\gamma} \tau_{\nu}{}^{\gamma\dot{\beta}} + \frac{1}{2} d\underline{\bar{w}}_o \tau^{\mu}{}_{\alpha\dot{\beta}} \tau_{\nu}{}^{\alpha\dot{\delta}} \underline{\tau}_{\dot{\delta}}{}^{\dot{\beta}}$$

и после некоторых выкладок получаем

$$d\ell_o{}^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & dw_{oj} \\ dw_{oi} & -i\varepsilon_{ijk} dw_{ok} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & d\bar{w}_{oj} \\ d\bar{w}_{oi} & i\varepsilon_{ijk} d\bar{w}_{ok} \end{pmatrix}.$$

Сравнение с (9) дает

$$d\underline{w}_o = d\underline{u}_o + d\underline{v}_o, \quad d\underline{\bar{w}}_o = d\underline{u}_o - i d\underline{v}_o . \tag{II}$$

После подстановки

$$\gamma = -\alpha - 2i\beta$$

выражение (I0) принимает вид

$$ds^2 = a_{\mu\nu} dt^\mu dt^\nu + \gamma dw_{0i}^2 + \bar{\gamma} d\bar{w}_{0i}^2 , \tag{I2}$$

Выразим теперь $d\underline{w}_0$ через $\underline{w}$ и $d\underline{w}$. Так как λ дает представление ℓ , из (IУ.5) следует

$$d\lambda_0 = \lambda^{-1} \cdot d\lambda = \begin{pmatrix} \delta d\alpha - \beta d\gamma & \delta d\beta - \beta d\delta \\ -\gamma d\alpha + \alpha d\gamma & -\gamma d\beta + \alpha d\delta \end{pmatrix} . \tag{I3}$$

Сравнение с (I0) дает

$$\begin{aligned} 2\, dw_{01} &= -\gamma d\alpha + \delta d\beta + \alpha d\gamma - \beta d\delta , \\ 2\, dw_{02} &= i\gamma d\alpha + i\delta d\beta - i\alpha d\gamma - i\beta d\delta , \\ 2\, dw_{03} &= \delta d\alpha - \gamma d\beta - \beta d\gamma + \alpha d\delta . \end{aligned} \tag{I4}$$

С другой стороны, из (7) имеем

$$\alpha = \sqrt{1 + \underline{w}^2} + w_3 , \quad \beta = w_1 - i w_2 ,$$

$$\gamma = w_1 + i w_2 , \quad \delta = \sqrt{1 + \underline{w}^2} - w_3$$

и подставляя $d\underline{w}$ вместо $\underline{w}$, находим

$$d\alpha = dw_3 , \quad d\beta = dw_1 - i\, dw_2 ,$$

$$d\gamma = dw_1 + dw_2 , \quad d\delta = - dw_3 .$$

Тогда (I4) превращается в

$$\begin{aligned} dw_{01} &= w_0 dw_1 + i w_3 dw_2 - i w_2 dw_3 - w_1 dw_0 , \\ dw_{02} &= -i w_3 dw_1 + w_0 dw_2 - w_1 dw_3 - w_2 dw_0 , \\ dw_{03} &= i w_2 dw_1 - i w_1 dw_2 + w_0 dw_3 - w_3 dw_0 . \end{aligned}$$

При этом, согласно (6), w_0 и dw_0 задаются через

$$w_0 = \sqrt{1 + \underline{w}^2} , \quad dw_0 = \frac{\underline{w} \cdot d\underline{w}}{\sqrt{1 + \underline{w}^2}}$$

Подставляем w_0 в (I2) и находим окончательно

$$ds^2 = a_{\mu\nu} dt^\mu dt^\nu + \gamma\left(dw_i^2 - \frac{(w_i dw_i)^2}{1+w^2}\right) + \bar\gamma\left(d\bar w_i^2 - \frac{(\bar w_i d\bar w_i)^2}{1+\bar w^2}\right). \tag{I5}$$

Это выражение можно написать ещё в виде

$$ds^2 = a_{\mu\nu} dt^\mu dt^\nu - \gamma a_{\mu\nu} dw_\mu dw_\nu - \bar\gamma a_{\mu\nu} d\bar w_\mu d\bar w_\nu, \tag{I6}$$

причем w_μ и $\bar w_\mu$ не независимы - они должны оставаться на единичной комплексной псевдосфере в пространстве Минковского (6):

$$a_{\mu\nu} w_\mu w_\nu = 1, \quad a_{\mu\nu} \bar w_\mu \bar w_\nu = 1.$$

(Суммирование по μ и ν подразумевается).

Чтобы лучше понять структуру пространства P, введем ещё пространство P^*, отличающееся от P тем, что на $\underline{w}$ и $\underline{\bar w}$ будем смотреть как на независимые комплексные переменные. Пространство P^* тоже I0-мерное, но с 4 вещественными координатами t^μ и 6 комплексными w_i и $\bar w_i$. Тогда P^* будет прямой суммой соответствующих пространств T, W и $\bar W$. Само пространство P получим, если заменим сумму $W \oplus \bar W$ на её сечение W^*, учитывая, что $\underline{w}$ и $\underline{\bar w}$ комплексно сопряженные. Пространство W^* тоже 6-мерное, но уже с вещественными координатами u_i и v_i, определяемыми в соответствии с (II) из

$$\underline{w} = \underline{u} + i\underline{v}, \quad \underline{\bar w} = \underline{u} + i\underline{v}. \tag{I7}$$

УI. Свободное скалярное поле в P - пространстве

Пользуясь введенной в P метрикой, мы можем ввести разные свободные и взаимодействующие скалярные, векторные и тензорные поля и писать для них соответствующие дифференциальные уравнения. (Учтем, что скаляры, векторы и т.д. будут двух типов по отношению к P и к M). Можем ввести и спинорные поля, проще всего рассматривая их как спиноры в M . (Нетрудно проверить, что такое определение инвариантно по отношению к группе P .)

Мы ограничимся самым простым случаем свободного скалярного поля в P :

$$\Delta_P \Psi - M^2 \Psi = 0, \tag{I}$$

где волновая функция Ψ зависит от p (У.8), а Δ_P - оператор Белтрами - аналог операторов Лапласа и Даламбера, так что (I) - аналог уравнения Клейна-Гордона в P Наряду с (I) мы будем писать и уравнение

$$\Delta^*_P \Psi - M^2 \Psi = 0 \tag{2}$$

в P^* , которое отличается от (I) тем, что на $\underline{w}$ и $\underline{\bar{w}}$ мы будем смотреть как на независимые комплексные переменные и, следовательно, по аналогии с (У.8)

$$\Psi = \Psi(p^*), \; p^* = (t, \underline{w}, \underline{\bar{w}}). \tag{3}$$

Решение (I) получается из (2), если учесть в конце комплексную сопряженность $\underline{w}$ и $\underline{\bar{w}}$.

Уравнение (I) при нефиксированном M можно рассматривать и как уравнение для собственных значений и собственных функций оператора Белтрами Δ_P . И в том и другом случае мы могли бы ставить дополнительные требования на Ψ , например, ограниченность или стремление к нулю на бесконечности. Этого вопроса мы касаться не будем.

Мы найдем полный набор решений уравнения (I). Точное определение понятия полного набора требует заранее указать, в каком классе ищутся решения и в каком классе должны находиться коэффициентные функции разложения. Мы этого делать не будем, а примем формально, что метод разделения переменных дает полный набор, т.е. мы найдем все решения, получаемые разделением переменных.

В (2) переменные t, $\underline{w}$ и $\underline{\overline{w}}$ разделены и поэтому мы можем написать

$$\Psi = \Psi_T \Psi_w \Psi_{\overline{w}}, \tag{4}$$

$$\Box \Psi_T - m^2 \Psi_T = 0, \tag{5}$$

$$\Delta_w \Psi_w - (g^2 - 1)\Psi_w = 0, \tag{6}$$

$$\Delta_{\overline{w}} \Psi_{\overline{w}} - (\overline{g}^2 - 1)\Psi_{\overline{w}} = 0, \tag{7}$$

причем константы $m, g, \overline{g}$ – в общем комплексные –связаны соотношением

$$m^2 - \gamma(g^2 - 1) - \overline{\gamma}(\overline{g}^2 - 1) = M^2, \tag{8}$$

а Δ_w и $\Delta_{\overline{w}}$ – операторы Лапласа-Белтрами на единичной комплексной псевдосфере в пространстве M с координатами w_μ и $\overline{w}_\mu$. (Константы g и $\overline{g}$ в общем не комплексно сопряженные!)

Уравнение (5) сразу дает

$$\Psi_T(t, \underline{p}, \varkappa) = e^{i\varkappa\sqrt{m^2 + \underline{p}^2}\, t^0 - i\varkappa \underline{p}\cdot \underline{t}} = e^{i\varkappa p\cdot t}, \tag{9}$$

где $\varkappa = \pm 1$, $\underline{p}$ – трехмерный комплексный вектор, а p –

– четырехмерный вектор с пространственной компонентой ρ , удовлетворяющий условиям

$$p^2 = m^2, \quad \mathrm{Re}\, p^0 \geqq 0. \tag{10}$$

Оператор Δ_W не что иное, как оператор для угловой части оператора Даламбера. На самом деле, пусть

$$\begin{aligned} x^\mu &= r w_\mu, \\ w_0 &= \mathrm{ch}\rho, \\ w_1 &= \mathrm{sh}\rho \cos\theta, \\ w_2 &= \mathrm{sh}\rho \sin\theta \cos\varphi, \\ w_3 &= \mathrm{sh}\rho \sin\theta \sin\varphi. \end{aligned} \tag{11}$$

Тогда, как известно,

$$\Box_x = -\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r} r^3 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_W, \tag{12}$$

$$\Delta_w = \frac{1}{\mathrm{sh}^2\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\mathrm{sh}^2\rho\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\mathrm{sh}^2\rho}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right].$$

Известно, что если в n – мерном пространстве введены ортогональные криволинейные координаты x^i, так что

$$ds^2 = \sum_{k=1}^{n} \pm u_k^2(x^i)\, dx^{k^2},$$

то оператор Белтрами в этом пространстве записывается в виде

$$\Delta_x = -\frac{1}{u}\sum_{k=1}^{n} \pm \frac{\partial}{\partial x^k}\cdot\frac{u}{u_k^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x^k} \quad \left(u = \prod_{k=1}^{n} u_k\right). \tag{13}$$

Координаты r, ρ, θ, φ ортогональны так что применяя эту формулу к пространствам с координатами x^μ и w_i, находим $\Delta_W = \Delta_w$, что мы и хотели показать.

Тогда подставляем (12) в (6), вместо Δ_W разлагаем

$$\Psi_W = P(\rho)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi)$$

и для P, Θ и Φ находим уравнения

$$\frac{1}{sh^2\rho}\cdot\frac{d}{d\rho}\left(sh^2\rho\frac{dP}{d\rho}\right)-\frac{\nu(\nu+1)}{sh^2\rho}P-(g^2-1)P=0,$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)-\frac{\mu^2}{\sin^2\theta}\Theta+\nu(\nu+1)\Theta=0,$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+\mu^2\Phi=0.$$

Решениями этих уравнений являются функции

$$P(\rho)=sh^{-\frac{1}{2}}\rho\, Q^{\frac{1}{2}+\nu}_{-\frac{1}{2}+g}(ch\rho),\ \Theta(\theta)=Q^{\mu}_{\nu}(\cos\theta),\ \Phi(\varphi)=e^{i\mu\varphi},$$

причем $Q^{\mu}_{\nu}(z)$ – любое решение уравнения Лежандра

$$(z^2-1)\frac{d^2Q}{dz^2}+2z\frac{dQ}{dz}-\left[\frac{\mu^2}{z^2-1}+\nu(\nu+1)\right]Q=0 \qquad (13)$$

/15/. Аналогичным способом решается и уравнение (7), причем вместо (11) имеем:

$$\bar{w}_0=ch\bar{\rho},$$
$$\bar{w}_1=sh\bar{\rho}\cos\bar{\theta},$$
$$\bar{w}_2=sh\bar{\rho}\sin\bar{\theta}\cos\bar{\varphi},$$
$$\bar{w}_3=sh\bar{\rho}\sin\bar{\theta}\sin\bar{\varphi}$$

В результате полная система решений уравнения (2) будет

$$\Psi(p^*,\tau^*)=e^{i\varkappa p.t}\times$$
$$\times sh^{-\frac{1}{2}}\rho\, Q^{-\frac{1}{2}+\nu}_{-\frac{1}{2}+g}(ch\rho)\,Q^{\mu}_{\nu}(\cos\theta)\,e^{i\mu\varphi}\times \qquad (14)$$
$$\times sh^{-\frac{1}{2}}\bar{\rho}\, Q^{\frac{1}{2}+\bar{\nu}}_{-\frac{1}{2}+\bar{g}}(ch\bar{\rho})\,Q^{\bar{\mu}}_{\bar{\nu}}(\cos\bar{\theta})\,e^{i\bar{\mu}\bar{\varphi}},$$

причем p^* задается через (3), а различные решения характеризуются величиной

$$\tau^*=(\varkappa,p,m,g,\bar{g},\mu,\bar{\mu},\nu,\bar{\nu}) \qquad (15)$$

и, конечно, выбором решений Q уравнения Лежандра. При этом все компоненты τ^*, за исключением $\varkappa = \pm 1$, - комплексные и произвольные с учетом только соотношений (8) и (I0). Решения (I) получим, учитывая комплексную сопряженность $\underline{w}$ и $\underline{\bar{w}}$, т.е. ρ, θ, φ и $\bar{\rho}, \bar{\theta}, \bar{\varphi}$.

УП. Исследование особенностей полученных решений

Решения (УI.I4) вообще не однозначны и не всюду регулярны. Причина заключается в том, что при переходе от $\underline{w}$ и $\underline{\bar{w}}$ к ρ, θ, φ и $\bar{\rho}, \bar{\theta}, \bar{\varphi}$ функциональный определитель

$$\frac{\partial(\underline{w}, \underline{\bar{w}})}{\partial(\rho, \theta, \varphi, \bar{\rho}, \bar{\theta}, \bar{\varphi})} = ch\rho\, ch\bar{\rho}\, sh^2\rho\, sh^2\bar{\rho}\, \sin\theta \sin\bar{\theta}$$

аннулируется при

$$\theta, \bar{\theta} = k\pi \quad \text{и} \quad \rho, \bar{\rho} = ik\frac{\pi}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 - - -).$$

Следовательно, при этих значениях решение Ψ (УI.I4) может иметь особые точки, в частности, точки ветвления. Кроме того, (УI.I4) может иметь особые точки, если коэффициенты метрического тензора (У.I5) имеют сингулярность. Такими точками являются $\underline{w}^2$, $\underline{\bar{w}}^2 = 1$, т.е. опять $\rho, \bar{\rho} = i(k + \frac{1}{2})\pi$. Если мы выберем τ^* (УI.I5) так, чтобы регулярность в этих точках была обеспечена, мы обеспечим этим регулярность и однозначность (УI.I4) повсюду. Точки $\rho, \bar{\rho} = i(k + \frac{1}{2})\pi$ фактически регулярны, так что остается исследовать точки $\theta, \bar{\theta} = k\pi$ и $\rho, \bar{\rho} = ik\pi$. Обозначая через z аргумент функции Q, получаем, что особенности функции Ψ (УI.I4) обуславливаются особенностями $Q(z)$ при $z = \pm 1$. Но наличие особенности у некоторой функции $Q(z)$ ещё не означает, что мы должны отбросить соответствующее решение, так как она может быть скомпенсирована другим множителем $Q(z)$ в (УI.I4). Поэтому нам придется ввести понятие, более полно характеризующее функции $Q(z)$. Введем для этой цели понятие поведения аналитической функции $w(z)$ в окрестности особой точки $z = a$.

Пусть $w_i(z)$ - функции аналитические и, может быть, многозначные в окрестности точки $z = a$, но не обязательно в самой этой точке. Будем говорить, что в окрестности точки $z = a$ функция $w(z)$ является линейной комбинацией функции ,
если она представима в виде

$$w(z) = \sum a_i(z) w_i(z),$$

причем $a_i(z)$ - аналитические в окрестности $z = a$ и в самой этой точке. Соответственным образом вводится понятие линейной зависимости в окрестности точки $z = a$. Если при этом все $a_i(z)$ отличны от нуля при $z = a$, а $w_i(z)$ линейно независимы, то именно эти $w_i(z)$ задают поведение $w(z)$ в окрестности a. Конечно, это понятие может быть полезным, если речь идет не об одной функции $w(z)$, а о некотором множестве таких функций $w_A(z)$, причем $w_i(z)$ от A не должны зависеть. Регулярность произведения двух функций $w(z)$ и $w_i(\bar{z})$ в окрестности точки $z = a$ сводится к регулярности произведений функций, характеризующих их поведение в точках a и $\bar{a}$. Это условие достаточно. Оно и необходимо, если эти произведения линейно независимы.

В качестве двух линейно независимых решений уравнения Лежандра (УI.I3) мы возьмем присоединенную функцию Лежандра первого рода

$$P_\nu^\mu(z) = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}} G\left(-\nu, \nu+1, 1-\mu, \frac{1-z}{2}\right) \qquad (1)$$

и функцию

$$R_\nu^\mu(z) = z^{-\nu-1}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^{\frac{\mu}{2}} G\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}, \frac{\mu+\nu}{2}+1, \nu+\frac{1}{2}, \frac{1}{z^2}\right), \qquad (2)$$

где

$$G(\alpha,\beta,\gamma,z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha,\beta,\gamma,z) .$$

Ради простоты мы предпочли работать с функциями G и R, вместо гипергеометрической функции $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ и присоединенной функции Лежандра второго рода

$$Q_\nu^\mu(z) = \frac{\sqrt{\pi}\, e^{i\mu\pi}}{2^{\nu+1}} \Gamma(\mu+\nu+1)\, R_\nu^\mu(z) .$$

Здесь G и R в отличие от F и Q имеют смысл при всех значениях параметров.

Видно, что P и R выражаются через G и поэтому сначала изучим поведение G в окрестности точки $z=1$.

Примем, что n – любое натуральное число или 0. При этом, если n участвует в нескольких равенствах или неравенствах, его значения в общем разные. Тогда, пользуясь формулой

$$G(\alpha,\beta,\gamma,z) = \frac{\pi}{\sin\pi\delta}\left[\frac{(1-z)^\delta}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} G(\alpha-\delta, \beta-\delta, 1-\delta, 1-z) - \frac{1}{\Gamma(\alpha-\delta)\Gamma(\beta-\delta)} G(\alpha,\beta,1+\delta,1-z)\right]$$

$$(\delta = \alpha+\beta-\gamma),$$

которая в смысле предельного перехода справедлива и при $\delta = \pm n$, а также формулами

$$\mathcal{G}(\alpha, \beta, -n, z) =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} z^{\delta+1} \mathcal{G}(\alpha+n+1, \beta+n+1, n+2, z),$$

$$\Gamma^1(-n)/\Gamma^2(-n) = (-1)^{n+1}\Gamma(n+1),$$

/I6/, мы находим следующие функции, описывающие поведение $\mathcal{G}$ в окрестности точки $z=1$:

Таблица I

Значения параметров	Поведение
1. $\delta \neq \pm n$	$1, \quad (1-z)^{-\delta}$
2. $\delta = n;\ \alpha-\delta, \beta-\delta \neq -n$	$(1-z)^{-\delta}, \quad \ln(1-z)$
3. $\delta = n;\ \alpha, \beta \neq -n;\ \alpha-\delta = -n$ или $\beta-\delta = -n$	$(1-z)^{-\delta}$
4. $\delta = n;\ \alpha = -n, \beta-\delta \neq -n$ или $\beta = -n,\ \alpha-\delta \neq -n$	1
5. $\delta = n;\ \alpha, \beta-\delta = -n$ или $\beta, \alpha-\delta = -n$	0
6. $\delta = -n;\ \alpha, \beta \neq -n$	$1, \quad (1-z)^{-\delta}\ln(1-z)$
7. $\delta = -n;\ \alpha-\delta, \beta-\delta \neq -n;\ \alpha = -n$ или $\beta = -n$	1
8. $\delta = -n;\ \alpha-\delta = -n, \beta \neq -n$ или $\beta-\delta = -n, \alpha \neq -n$	$(1-z)^{-\delta}$
9. $\delta = -n;\ \alpha-\delta, \beta = -n$ или $\alpha, \beta-\delta = -n$	0

Подставляя в (I) и (2), находим поведение $P_\nu^\mu(z)$ и $R_\nu^\mu(z)$ при $z \to \pm 1$:

Таблица II

Значения параметров	Поведение
А) $W = P_\nu^\mu(z),\ z \to 1$	
1. $\mu \neq n+1$	$(1-z)^{-\frac{\mu}{2}}$
2. $\mu = n;\ \nu \neq \mu-n-1, -\mu+n$	$(1-z)^{\mu/2}$
3. $\mu = n;\ \nu = \mu-n-1, -\mu+n$	0

$$B)\ W = P_\nu^\mu(z),\ z\to -1$$

1. $\mu \neq \pm n$ $\qquad (1+z)^{\frac{\mu}{2}},\ (1+z)^{-\frac{\mu}{2}}$
2. $\mu = -n;\ \nu\neq \pm n$ $\qquad (1+z)^{\frac{\mu}{2}},\ (1+z)^{-\frac{\mu}{2}}\ln(1+z)$
3. $\mu = -n;\ \nu = \mu+n,\ -\mu-n-1$ $\qquad (1+z)^{\mu/2}$
4. $\mu = -n;\ \nu = \mu-n-1$ или $\nu = -\mu+n$ $\qquad (1+z)^{-\mu/2}$
5. $\mu = n;\ \nu \neq \pm n$ $\qquad (1+z)^{-\mu/2},\ (1+z)^{\mu/2}\ln(1+z)$
6. $\mu = n;\ \nu = -\mu-n-1$ или $\nu = \mu+n$ $\qquad (1+z)^{\mu/2}$
7. $\mu = n;\ \nu = -\mu+n,\ \mu-n-1$ $\qquad 0$

$$C)\ W = R_\nu^\mu(z),\ z\to \pm 1$$

1. $\mu \neq \pm n$ $\qquad (1\mp z)^{\mu/2},\ (1\mp z)^{-\frac{\mu}{2}}$
2. $\mu = -n,\ \nu\neq -\mu-n-1$ $\qquad (1\mp z)^{\mu/2},\ (1\mp z)^{-\mu/2}\ln(1\mp z)$
3. $\mu = -n;\ \nu = -\mu-n-1,\ \mu+n$ $\qquad (1\mp z)^{\mu/2}$
4. $\mu = -n,\ \nu = \mu-n-1$ $\qquad (1\mp z)^{-\frac{\mu}{2}}$
5. $\mu = n,\ \nu \neq \mu-n-1$ $\qquad (1\mp z)^{-\mu/2},\ (1\mp z)^{\frac{\mu}{2}}\ln(1\mp z)$
6. $\mu = n,\ \nu = \mu-n-1,\ -\mu+n$ $\qquad (1\mp z)^{-\mu/2}$
7. $\mu = n,\ \nu = -\mu-n-1$ $\qquad (1\mp z)^{\mu/2}$

Теперь приступим к отысканию регулярных решений среди (УI.I4). При этом регулярность будем понимать в смысле ограниченности и однозначности.

Запишем решение (УI.I4) в виде

$$\Psi(p) = K(t)L(\rho,\bar\rho)M(\theta,\bar\theta)N(\varphi,\bar\varphi),$$

$$K(t) = e^{i\varkappa p.t}, \tag{3}$$

$$L(\rho,\bar\rho) = sh^{-1/2}\rho\, sh^{-1/2}\bar\rho\, Q_{g-1/2}^{\mu+\frac{1}{2}}(ch\rho)\, Q_{\bar g-\frac{1}{2}}^{\bar\mu+\frac{1}{2}}(ch\bar\rho),$$

$$M(\theta,\bar\theta) = Q_\nu^\mu(\cos\theta)\, Q_{\bar\nu}^{\bar\mu}(\cos\bar\theta),$$

$$N(\varphi,\bar\varphi) = e^{i\mu\varphi + i\bar\mu\bar\varphi}. \tag{4}$$

Очевидно, регулярность Ψ требует регулярности в отдельности каждой из функций (4). Обеспечим прежде всего регулярность $M(\theta,\bar\theta)$ в точках $\theta_k = \bar\theta_k = k\pi$, которые соответствуют точкам $z = \bar z = \pm 1$. Обозначая $\theta - \theta_k = \omega$, $\bar\theta - \bar\theta_k = \bar\omega$, находим

$$z = \cos\theta = \cos(\theta_k + \omega) \approx (-1)^k(1-\tfrac{1}{2}\omega^2),\ \bar z \approx (-1)^k(1-\tfrac{1}{2}\bar\omega^2)$$

и, следовательно,

$$1 \mp z \approx \frac{1}{2}\omega^2,\quad 1 \mp \bar z \approx \frac{1}{2}\bar\omega^2, \tag{5}$$

причем знак (-) соответствует четному k, а (+) - нечетному, т.е. соответствуют $z = 1$ и $z = -1$. Равенства (5) приблизительны в том смысле, что отсутствуют более высокие степени по ω и $\bar\omega$, но эти члены несущественны - они не меняют поведения функции. Вопрос состоит в нахождении значений $\mu, \bar\mu$, $\nu, \bar\nu$ и линейных комбинаций Q функций P и R, при которых функция $M(\theta,\bar\theta)$ будет ограниченной и однозначной в окрестностях точек $\theta_k = \bar\theta_k = k\pi$. Таблицы П показывают, что если μ целое, а ν - нецелое, то функция Q, какой бы комбинацией P и R она не представлялась, будет иметь логарифмическую особенность при $z = 1$ или $z = -1$. То же самое относится и к $\bar\mu$ и $\bar\nu$. Логарифмические особенности нельзя скомпенсировать умножением. Следовательно, значения μ и ν группируются в два класса: A - μ - нецелое, и B - μ и ν - целые. Аналогичные классы $\bar A$ и $\bar B$ имеются и в плоскости $\bar\mu, \bar\nu$, так что в принципе имеется 4 возможности: $A\bar A, A\bar B, B\bar A, B\bar B$. В соответствии с таблицей П поведение функции во всех этих случаях будет определяться функциями типа

$$\omega^{\varepsilon\mu}\bar{\omega}^{\bar{\varepsilon}\bar{\mu}}=\rho^{\varepsilon\mu+\bar{\varepsilon}\bar{\mu}}e^{i(\varepsilon\mu-\bar{\varepsilon}\bar{\mu})\varphi} \quad (\varepsilon,\bar{\varepsilon}=\pm 1,\ \omega=\rho e^{i\varphi}).$$

Отсюда ясно, что требование однозначности функции одновременно в точках $z = +1$ и $z = -1$ приводит к тому, что μ и $\bar{\mu}$ должны быть одновременно целыми или полуцелыми. Таким образом, случаи $A\bar{B}$ и $B\bar{A}$ отпадают. Примем без ограничения общности, что вещественные части μ и $\bar{\mu}$ неотрицательны, а вещественные части ν и $\bar{\nu}$ – не меньше $-1/2$. Тогда член $\omega^{-\mu}\bar{\omega}^{-\bar{\mu}}$ не должен появляться, а это показывает, что в окрестности точки $z=\varepsilon$ $(\varepsilon=\pm 1)$ один из множителей $Q(\varepsilon z)$ и $Q(\bar{\varepsilon}\bar{z})$ должен сводиться, соответственно, к ω^{μ} и $\bar{\omega}^{\mu}$. В случае $A\bar{A}$, когда μ и $\bar{\mu}$ полуцелые, это приводит к

$$M(\theta,\bar{\theta})=P_{\nu}^{h+1/2}(\varepsilon\cos\theta)P_{\bar{\nu}}^{h+\frac{1}{2}}(-\varepsilon\cos\bar{\theta}) \tag{6}$$

$$(\varepsilon=\pm 1,\ h=0,1,2,\dots;\ \mathrm{Re}\,\nu,\ \mathrm{Re}\,\bar{\nu}\geq -\tfrac{1}{2}).$$

В случае $B\bar{B}$ получаем вторую серию решений:

$$M(\theta,\bar{\theta})=P_{k}^{h}(\cos\theta)P_{\bar{k}}^{\bar{h}}(\cos\bar{\theta}) \quad (k\geq h,\ \bar{h}\geq \bar{h}).$$

Тот же самый анализ относится и к функции $L(\rho,\bar{\rho})$. Там тоже получаются две серии решений. Однако ввиду наличия множителей $\mathrm{sh}^{-1/2}\rho$ и $\mathrm{sh}^{-1/2}\bar{\rho}$, сингулярность которых при $\rho,\bar{\rho}=ik\pi$ должна быть скомпенсирована, остается только возможность $B\bar{B}$, причем верхние индексы не должны принимать значение 0. Дальше, ввиду того, что верхние индексы функций Q и L (4) должны отличаться на 1/2 от нижних индексов функции Q в M, для множителя L остается только возможность $A\bar{A}$. При этом вследствие того, что у M суммы $\mu+\nu$ и $\bar{\mu}+\bar{\nu}$

целые, знак ε в (6) можно опустить.

Окончательно получаем первую серию решений :

$$\text{I}.\ \Psi(t,w,\tau)=e^{i\varkappa p\cdot t}\times$$
$$\times\, sh^{-\frac{1}{2}}\rho\, sh^{-\frac{1}{2}}\bar\rho\, P_{\ell}^{\kappa}(ch\rho)\, P_{\bar\ell}^{\bar\kappa}(ch\bar\rho)\,\times \tag{7}$$
$$\times\, P_{\kappa-1/2}^{h+1/2}(\cos\theta)\, P_{\kappa-1/2}^{h+1/2}(\cos\bar\theta)\, e^{i(h+1/2)(\varphi+\bar\varphi)}.$$

Параметры, характеризующие решения, будут

$$\tau=(\varkappa, p, m, h, \kappa, \bar\kappa, \ell, \bar\ell), \tag{8}$$

причем $\varkappa=\pm 1$; $h=0,1,\ldots$; $\kappa,\bar\kappa,\ell,\bar\ell=1,2\ldots$; $\ell\geq\kappa$, $\bar\ell\geq\bar\kappa$, а p – комплексный вектор, удовлетворяющий (УI.IO). Сравнивая (7) с (УI.I4), находим

$$g+\tfrac{1}{2}=\ell,\quad \bar g+\tfrac{1}{2}=\bar\ell,$$

так что, подставляя в (УI.8), получим

$$m^2-\gamma((\ell-\tfrac{1}{2})^2-1)-\bar\gamma((\bar\ell-\tfrac{1}{2})^2-1)=M^2.$$

Это соотношение дает дискретный спектр для параметра m , который, по-видимому, следует интерпретировать как массу.

Параметры m и p остались комплексными, потому что мы не накладывали на Ψ никаких условий на бесконечности. Мы рассмотрим один из вариантов, в котором функция Ψ будет функцией умеренного роста по отношению к аргументам t и w . Тогда m и p будут вещественными, а вместо (УI.IO) будем иметь

$$p^2=m^2,\quad p^0>0. \tag{9}$$

При нахождении (7) мы потребовали, чтобы функция $\Psi(t,\underline{w})$ была регулярной и однозначной при всех вещественных t и комплексных $\underline{w}$. Мы можем расширить множество решений (УI.I4), т.е. множество допустимых значений параметров (УI.I5) по отношению к (8), если учтем, что физический смысл имеют только выражения типа

$$\bar{\Phi}.\Psi=\int\sqrt{a}\,\bar{\Phi}(t,\underline{w})\Psi(t,\underline{w})(d\underline{t})(d\underline{w}), \tag{I0}$$

где $\underline{t}$ – пространственная компонента вектора t, Ψ и Φ – линейные комбинации решений уравнения (УI.I), достаточно быстро убывающие на бесконечности, а a – определитель метрического тензора (У.I5)

$$\sqrt{a}=|\,ch\rho\, ch\bar{\rho}\, sh\rho,\, sh\bar{\rho}\, \sin\theta \sin\bar{\theta}\,|. \tag{II}$$

Наличие множителей $sh\rho$ и $sh\bar{\rho}$ в (II) снимает дополнительную сингулярность в $L(\rho,\bar{\rho})$ (4) из-за множителя $sh^{-1/2}\rho\, ch^{-1/2}\bar{\rho}$ в Φ и Ψ. Поэтому значения $k,\bar{k}=0$ в (8) выпадать уже не будут. Кроме того, возможность $A\bar{A}$ для множителя $L(\rho,\bar{\rho})$ (4) восстанавливается, что даст еще следующий набор решений

$$\text{II.}\quad \Psi(t,\underline{w},\tau)=e^{i\varkappa p.t}\times$$
$$\times\, sh^{-1/2}\rho\, sh^{-1/2}\bar{\rho}\, P^{k+1/2}_{g-1/2}(\varepsilon ch\rho)P^{\bar{k}+1/2}_{\bar{g}-1/2}(\varepsilon ch\bar{\rho})\times \tag{I2}$$
$$\times\, P^{h}_{k}(\cos\theta)\,P^{\bar{h}}_{\bar{k}}(\cos\bar{\theta})\,e^{i(h\varphi+\bar{h}\bar{\varphi})}.$$

Здесь в отличие от (7) знак ε перед $ch\rho$ и $ch\bar{\rho}$ остается, так как решения при ε =I и ε =–I линейно независимы. В отличие от (6) он один и тот же, так как особые точки находятся при ρ, $\bar\rho = i\nu\pi$ и поэтому перемена знака получается вследствие перехода от ρ к $\bar\rho$. В этом случае имеем

$$\tau = (\varkappa, p, m, \varepsilon, h, \bar h, k, g, \bar g) \qquad (13)$$

при ограничениях (УI.8) и (9).

Дальнейшее расширение допустимых решений мы могли бы получить, если бы учли, что физический смысл вероятности имеют даже не выражения (10), а только величины типа $|\Psi\bar\Psi|^2$, т.е. многозначность фазового множителя практически несущественна. Это дает возможность, во-первых, в случае $A\bar A$ включить значения $\mu, \bar\mu = n + \frac{1}{4}$ и $\mu, \bar\mu = n - \frac{1}{4}$ и, во-вторых, включить случаи $A\bar B$ и $B\bar A$ при $\mu = n + \frac{1}{2}$, $\bar\mu = n$, соответственно $\mu = n$, $\bar\mu = n + \frac{1}{2}$. Так появляются еще следующие выражения для $\Psi(t, \underline{w}, \tau)$:

$$\text{III.}\quad \Psi(t, \underline{w}, \tau) = e^{i\varkappa p.t} \times$$

$$\times\, sh^{-1/2}\rho\, ch^{-1/2}\bar\rho\, P^{k+1/2+\delta/4}_{g-1/2}(\varepsilon ch\rho)\, P^{k+1/2+\delta/4}_{\bar g-1/2}(\varepsilon ch\bar\rho)\,\times \qquad (14)$$

$$\times\, P^{h+\delta'/4}_{k+\delta'/4}(\varepsilon'\cos\theta)\, P^{h+\delta'/4}_{k+\delta''/4}(-\varepsilon'\cos\theta)\, e^{i(k+\delta''/4)(\varphi+\bar\varphi)},$$

где

$$\tau = (\varkappa, p, m, \varepsilon, \varepsilon', \delta, \delta', h, k, g, \bar g), \qquad (15)$$

причем g, $\bar g$ и m удовлетворяют (УI.8).

$$\text{IV.}\quad \Psi(t, \underline{w}, \tau) = e^{i\varkappa p.t}$$

$$\times\, sh^{-1/2}\rho\, sh^{-1/2}\bar\rho\, P^{k+1/2}_{g-1/2}(\varepsilon ch\rho)\, P^{\bar k}_{\bar\ell}(ch\bar\rho)\,\times \qquad (16)$$

$$\times\, P^{h}_{k}(\cos\theta)\, P^{\bar h-1/2}_{\bar k-1/2}(\varepsilon'\cos\bar\theta)\, e^{ih\varphi+i(\bar h-1/2)\bar\varphi},$$

где

$$\tau = (\varkappa, \underline{p}, m, \varepsilon, \varepsilon', h, \bar{h}, \kappa, \bar{\kappa}, \bar{\ell}, g), \tag{17}$$

причем $\bar{h} \leqq h$, $\kappa \leqq \bar{\kappa}$, $\ell \geqq \bar{\kappa}$, а (УI.8) принимает вид

$$m^2 - \gamma(g^2-1) - \bar{\gamma}\left((\bar{\ell}+\tfrac{1}{2})^2-1\right) = M^2.$$

$$\text{V.}\quad \Psi(t, \underline{w}, \tau) = e^{i\varkappa p \cdot t} \times$$
$$\times\, sh^{-1/2}\rho\, sh^{-1/2}\bar{\rho}\, P_\ell^{\kappa}(ch\rho)\, P_{\bar{g}-1/2}^{\bar{\kappa}+1/2}(\varepsilon\, ch\bar{\rho}) \times \tag{18}$$
$$\times\, P_{\kappa-1/2}^{h-1/2}(\varepsilon'\cos\theta)\, P_{\bar{\kappa}}^{\bar{h}}(\cos\bar{\theta})\, e^{i(h-1/2)\varphi + i\bar{h}\bar{\varphi}},$$

где

$$\tau = (\varkappa, p, m, \varepsilon, \varepsilon', h, h', \kappa, \kappa', \ell, \bar{g}), \tag{19}$$

причем $h \leq \bar{h}$, $\kappa \geqq \bar{h}$, $\ell \geqq \kappa$, а (УI.8) дает

$$m^2 - \gamma\left((\ell+\tfrac{1}{2})^2-1\right) - \bar{\gamma}(\bar{g}^2-1) = M^2.$$

УШ. Квантование свободного скалярного поля в пространстве P

В качестве примера квантования в пространстве P мы проквантуем свободное скалярное поле, удовлетворяющее уравнению (УI.I), для которого при различных предположениях о классе допустимых решений мы нашли полные наборы: (УП.7), (УП.I2) (УП.I4), (УП.I6) и (УП.I8). При этом мы будем пользоваться аналогией с вторичным квантованием свободного скалярного поля в пространстве M. Чтобы лучше использовать эту аналогию, мы вкратце остановимся на тех основных моментах которые связаны с квантованием в M, в той форме, которая для нас удобна.

Пусть $\Psi(x)$ - комплексная волновая функция свободного скалярного поля в M и пусть

$$\Box\Psi - m^2\Psi = 0 \tag{I}$$

уравнение Клейна-Гордона, которому она удовлетворяет. Пусть $\Psi(x,\tau)$ - полная система линейно независимых решений, так что общее решение имеет вид:

$$\Psi(x) = \Psi(x,\tau)\,a(\tau), \tag{2}$$

причем подразумевается суммирование или интегрирование по компонентам τ. В частности, такой системой является система функций

$$\Psi(x,\varkappa,p) = e^{i\varkappa p\cdot x}, \tag{3}$$

где $\varkappa = \pm 1$, p - вещественный вектор в M, удовлетворяющий условиям (УII.9), а $\underline{p}$ - его пространственная часть. Тогда (2) сводится к виду

$$\Psi = \Psi(x,\varkappa,\underline{p})\,a(\varkappa,\underline{p}), \tag{4}$$

причем подразумевается суммирование по $\varkappa$ и интегрирование по $\underline{p}$ на верхней части массовой поверхности, т.е. подразумевается еще умножение на

$$dv = \frac{(d\underline{p})}{p^0} = \frac{(d\underline{p})}{\sqrt{m^2+\underline{p}^2}} \tag{5}$$

перед интегрированием по $\underline{p}$.

Так как уравнение (I) инвариантно относительно группы P, то полная система $\Psi(x,\tau)$ тоже должна быть инвариантной. Это означает, что в пространстве переменных τ существует унитарное представление $E(\tau,P,s)$ такое, что

$$\Psi(Px,s)=\Psi(x,\tau)E(\tau,P,s). \qquad (6)$$

Тогда, если напишем

$$\Psi(Px)=\Psi(x,\tau)a(P\tau),$$

то из (2) и (6) получим

$$a(P\tau)=E(\tau,P,s)a(s), \qquad (7)$$

т.е. в пространстве решений $\Psi(x,\tau)$ уравнения (I) и в пространстве коэффициентов разложения $a(\tau)$ осуществляется одно и то же представление группы P.

Вторичное квантование для рассматриваемого нами свободного скалярного поля в пространстве M означает замену коэффициентов разложения $a(\tau)$ на операторы $\alpha(\tau)$, действующие в некотором гильбертовом пространстве, причем их коммутатор

$$[\alpha(\tau),\ \alpha^{+}(s)]=iD(\tau,s) \qquad (8)$$

является C - числом (точнее, обобщенной функцией указанных аргументов). (В теории взаимодействующих полей это условие является слишком сильным - вместо условия (8) требуется локальная коммутативность.)

Принцип относительности требует, чтобы соотношение (8) было инвариантным по отношению к P, причем $\alpha(\tau)$ преобразуются по тому же самому закону (7), что и $a(\tau)$. Тогда, умножая (8) слева на $E(\tau,P,\tau')$ и справа на $E^+(s',P,s)$, находим

$$[E(\tau,P,\tau')\alpha(\tau'),\alpha^+(s')E^+(s',P,s)]=iE(\tau,P,\tau')D(\tau',s')E^+(s',P,s),$$

или

$$E(\tau,P,\tau')D(\tau',s')E^+(s',P,s)=D(\tau,s). \qquad (9)$$

Это показывает, что $D(\tau,s)$ - метрический тензор, соответствующий унитарному представлению E.

Если в качестве полной системы решений мы выберем (3), то из $Px=t+\ell x$ находим

$$\Psi(Px,\varkappa,\underline{p})=\Psi(t+\ell.x,\varkappa,\underline{p})=$$
$$=e^{i\varkappa p.t}e^{i\varkappa p.\ell.x}=\int e^{i\varkappa p.t}\delta_m(q-p.\ell)e^{i\varkappa q.x}\frac{(dq)}{q_0},$$

причем $\delta_m(\;)$ - трехмерная δ - функция на массовой поверхности (УП.9). Следовательно, сравнивая это выражение с (6), получаем

$$E(\varkappa,p,t,\ell,\lambda,q)=\delta_{\varkappa\lambda}e^{i\varkappa p.t}\delta_m(q-p.\ell) \qquad (10)$$
$$((p.\ell)^\nu=p^\varkappa a_{\varkappa\lambda}e^\lambda{}_\mu a^{\mu\nu}).$$

Подставляем (10) в (9) и получаем уравнение для D:

$$e^{i\varkappa p.t}e^{-i\lambda q.t}D(\varkappa,\underline{p}.\ell,\lambda,\underline{q}.\ell)=D(\varkappa,\underline{p},\lambda,\underline{q}).$$

(Очевидно, $\underline{p}.\ell$ - трехмерный вектор, соответствующий $p.\ell$).

Общим решением этого уравнения является функция

$$D(\varkappa, p, \lambda, g) = d_{\varkappa\lambda} \delta_m (p-q). \qquad (11)$$

При этом из (8) следует, что матрица $d_{\varkappa\lambda}$ – эрмитова. Как известно, она должна быть кратна I – это дополнительное физическое требование квантования, которое из общих соображений не вытекает.

Перейдем теперь к P – теории. Вместо уравнения (I) здесь имеет место (УI.I). Вместо множества M – множество P, а вместо группы P – группа Q. Выражение (2) здесь заменяется системой полных решений: (УП.7), или (УП.I2), или (УП.I4), (УП.I6) и (УП.I8) в зависимости от степени регулярности и однозначности, которые требуются.

Вторичное квантование в принципе осуществляется указанием коммутатора $D(r, s)$. Для него мы располагаем уравнением (9). Так как представление E унитарно, то уравнение имеет, по крайней мере, одно решение.

Трудности, связанные с решением этого уравнения, существенно зависят от выбора параметризации в полной системе решений. Мы укажем три варианта, но до конца их проводить не будем.

Пусть λ и $\varkappa$ – унимодулярные двухрядные матрицы, соответствующие, согласно (У.4), матрицам h и v. Тогда вместо (IУ.6) мы имеем

$$Q = (t, \lambda, \varkappa). \qquad (12)$$

Введем обозначение:

$$\Phi(\lambda, M)_{\ell m} = sh^{-1/2}\rho \, P_{g-1/2}^{\ell+\frac{1}{2}+\alpha}(\varepsilon \, ch\rho) P_{\ell+\alpha}^{m+\beta}(\varepsilon' \cos\theta) e^{i(m+\beta)\varphi}, \quad (I3)$$

причем $\ell, m = 0, 1, 2$, а связь ρ, θ, φ с λ задана через (УI.II) и(У.7), а $M = (\varepsilon, \varepsilon', \alpha, \beta, g)$ где $\alpha, \beta = 0, \pm\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$. Тогда все системы (УП.7), (УП.I2), (УП.I4), (УП.I6), (УП.I8) записываются в виде

$$\Psi(t, \underline{w}, \tau) = e^{i\varkappa p \cdot t} \Phi(\lambda, M)_{hk} \Phi(\bar{\lambda}, \bar{M})_{\bar{h}\bar{k}}, \quad (I4)$$

$$(\tau = (\varkappa, p, m, M, \bar{M}, h, \bar{h}, k, \bar{k})). \quad (I5)$$

При этом в случае (УП.7) имеем $h = \bar{h}$, в случае (УП.I2) – $k = \bar{k}$, а в случае (УП.I4) – $h = \bar{h}$, $k = \bar{k}$, так что индексы у Ψ соответственно уменьшаются. Между компонентами M и $\bar{M}$ тоже имеются некоторые связи, которые вытекают из (I3).

Метрика

$$d s_W^2 = d\underline{w}^2 - \frac{(\underline{w} \cdot d\underline{w})^2}{1 + \underline{w}^2},$$

а, следовательно, и уравнение (УI.6) инвариантны по отношению к группе $\ell \to h \cdot \ell \cdot k$, выражающей действие Q на ℓ . Следовательно, существуют представления $A(\chi)_{hk\ell m}$ и $B(\varkappa)_{hk\ell m}$, такие, что

$$\Phi(\chi \cdot \lambda, M)_{hk} = A(\chi)_{hk\ell m} \Phi(\lambda, M)_{\ell m},$$

$$\Phi(\lambda \cdot \varkappa, M)_{hk} = B(\varkappa)_{hk\ell m} \Phi(\lambda, M)_{\ell m}.$$

Матрица B , очевидно, выражается через A :

$$B(\lambda)_{hklm} = A(\lambda^T)_{lmhk}\,.$$

Что касается A, в случае $\alpha, \beta = 0$ она, очевидно, совпадает с представлением группы $SL(2,C)$ в каноническом базисе при $k_0 = 0$ и $c = g$ (в обозначениях Наймарка[I4], стр. I04) и при соответственно нормированных базисных векторах[I4,I7]. При $\alpha, \beta \neq 0$ существование матрицы A следует из предположения о том, что метод разделения переменных задает полную систему решений. Их, по-видимому, можно получить из матрицы A при $\alpha, \beta = 0$ аналитическим продолжением по h, k и l, m, заменяя после этого h, k и l, m на $h+\alpha, k+\beta$ и $l+\alpha, m+\beta$.

Представления A и B эквивалентны, и поэтому условие инвариантности по отношению к преобразованию $\lambda \to \chi\cdot\lambda\cdot\varkappa$ не требует и не дает ничего больше, чем инвариантность по отношению к $\lambda \to \chi\cdot\lambda$. Это означает, что при нахождении D мы можем ограничиться законом преобразования $\Psi(t, \underline{w}, \tau)$ под действием только группы P. Учитывая это и имея в виду (I0) и (I4), для матрицы E, по которой преобразуются волновые функции $\Psi(t, w, \tau)$, находим

$$E(\tau, t, \chi, s) = \delta_{\varkappa\lambda}\, e^{i\varkappa p\cdot t}\, \delta_m(q - p\cdot h)\,\delta_{MN}\,\delta_{\bar M \bar N} \times \tag{I6}$$
$$\times A(\chi, M)_{hklm}\, A(\bar\chi, \bar M)_{\bar h \bar k \bar l \bar m}$$

$$\left(\tau = (\varkappa, p, M, \bar M, h, k\, \bar h\, \bar k), s = (\lambda, q, N, \bar N; l, m, \bar l, \bar m)\right).$$

Имея в виду, что решение уравнения (9), соответствующего уравнению Клейна-Гордона, задается через (II), находим

$$A(\chi,M)_{hkh'k'}A(\bar{\chi},\bar{M})_{\bar{h}\bar{k}\bar{h}'\bar{k}'}D^{\circ}(M\bar{M}N\bar{N})_{\varkappa\lambda h'k'\bar{h}'\bar{k}'\ell'm'\bar{\ell}'\bar{m}'}\times \tag{17}$$

$$\times\bar{A}(\chi,N)_{\ell'm'\ell m}\bar{A}(\bar{\chi},\bar{N})_{\bar{\ell}'\bar{m}'\bar{\ell}\bar{m}}=D^{\circ}(M\bar{M}N\bar{N})_{\varkappa\lambda hk\bar{h}\bar{k}\ell m\bar{\ell}\bar{m}},$$

причем D° вводится через

$$D(\tau,s)=D(\varkappa,\rho,\lambda,q,h,k,\bar{h},\bar{k},\ell,m,\bar{\ell},\bar{m},M,\bar{M},N,\bar{N})= \tag{18}$$

$$=\delta_m(\rho-q)\,D^{\circ}(M,\bar{M},N,\bar{N})_{\varkappa\lambda,h,k,\bar{h},\bar{k},\ell,m,\bar{\ell},\bar{m}}\,.$$

Чтобы решить уравнение (I7), достаточно вместо A подставить соответствующие генераторы представления. При $\alpha,\beta=0$ они известны. Как их найти при $\alpha,\beta\neq 0$, мы отметили в связи с определением матрицы A. Решения уравнения Клейна-Гордона преобразуются по представлению группы P, которое может быть разложено только на два неприводимых представления. Поэтому P - инвариантность определяет D с точностью до матрицы второго ряда $d_{\varkappa\lambda}$.

Решения уравнения (УI.I), по-видимому, преобразуются по более разнообразным представлениям группы P и поэтому может иметь место большая неоднозначность в выборе D.

Уравнения (7), (8) и (9) имеют место при любом выборе полной системы решений уравнения (УI.I). При этом, если коммутаторы (8) суть C - числа при одном выборе базиса, то такое же положение будет иметь место и при любом другом выборе. Более того, если $T(\rho,\tau)$ - любая матрица, причем τ - произвольный параметр, а τ пробегает по всем векторам базиса, то коммутаторы операторов

$$\beta(\rho)=T(\rho,\tau)\,\alpha(\tau) \tag{19}$$

будут опять C – числами, а если матрица $T(\rho,\tau)$ имеет обратную в множестве функций $b(\rho) = T(\rho,\tau)c(\tau)$, то для $\beta(\rho)$ опять будет существовать трансформационный закон

$$\beta(Q\cdot\rho) = E(\rho,Q,\sigma)\,\beta(\sigma).$$

При этом $E(\rho,Q,\sigma)$ определяется из

$$b(Q\rho) = E(\rho,Q,\sigma)\,b(\sigma),$$

а $b(\rho)$ и $b(Q\rho)$ – из

$$\psi(p) = \psi(p,\tau)T^{-1}(\tau,\rho)\,b(\rho),$$

$$\psi(Q\cdot p) = \psi(p,\tau)T^{-1}(\tau,\rho)\,b(Q\cdot\tau).$$

Выберем в качестве $T(\rho,\tau)$ функции полного набора $\psi(\rho,\tau)$. Тогда получаем

$$[\psi(p),\psi^{+}(q)] = i\,D(p,q),$$

причем $D(p,q)$ будет удовлетворять уравнениям:

$$(\Delta_p - M^2)\,D(p,q) = 0,$$

$$(\Delta_q - M^2)\,D(p,q) = 0,$$

$$D(Q\cdot p, Q\cdot q) = D(p,q).$$

Решение этих уравнений – второй путь, идя по которому, мы могли бы найти $D(p,q)$.

Мы знаем, что линейная оболочка функций (УП.7), соответственно с добавлением функции (УП.12) или еще (УП.14), (УП.15), (УП.17) дает множество всех искомых решений уравнения (УI.1). Следовательно, в каждом из этих множеств осуществляется некоторое представление группы Q:

$$\psi(Q\cdot p,s) = \psi(p,\tau)\,E(\tau,Q,s). \tag{20}$$

Представление E можно разложить на прямую сумму неразложимых представлений:

$$E = \mathcal{U} E_o \mathcal{U}^+, \quad E_o = \delta_{ij} E_i(\tau_i, Q, s_i).$$

Тогда, обозначая

$$\phi_i(p, \tau_i) = \Psi(p, \tau) \mathcal{U}(\tau; i, \tau_i),$$

находим из (I9):

$$\phi_i(Q p_i, s_i) = \phi_i(p_i, \tau_i) E_i(\tau_i, Q, s_i)$$

и (9) сводится к

$$E_i(\tau_i, Q, \tau_i') D_{ij}(\tau_i' s_j') E_j^+(s_j', Q, s_j) = D_{ij}(\tau_i, s_j).$$

Так как E_i неразложимы, то получаем, что $D_{ij} = 0$ при $i \neq j$, а D_{ii} определены с точностью до постоянного множителя d_i. Так, общая формула для $\mathcal{D}(\tau, s)$ будет

$$D(\tau, s) = \mathcal{U}(\tau, i, \tau_i) d_i D_{oii}(\tau_i, s_i) \mathcal{U}^+(i, s_i, s).$$

Этим нахождение $D(\tau, s)$ сводится к разложению $E(\tau, Q, s)$ на неразложимые представления. Решение этой задачи облегчается, так как мы знаем полную систему решений уравнения (УI.I). Остается исследовать, как они зацепляются под действием группы Q. Для этой цели воспользуемся тем, что если $\Psi_i(p)$ решение, то $\Psi_i(Q \cdot p)$ - уже I6-параметрическое семейство решений, которые мы можем параметризовать параметрами группы Q (I.2). Поскольку группа $\Psi_i(Q \cdot p)$ только голоморфна Q, то разным элементам Q может соответствовать одна и та же функция $\Psi_i(Q \cdot p)$. Значения Q, которым соответствуют разные элементы группы $\Psi_i(G\cdot p)$, очевидно, составляют некоторую инвариантную подгруппу группы Q. Число этих подгрупп ограничено. Таким образом, выделяя последовательно различные представления группы Q, мы можем осуществить все этапы этого третьего пути для нахождения $D(\tau, s)$.

IX. О физическом смысле квантовой теории в P - пространстве

В квантовой теории, как и в любой статистической теории, имеются две терминологии. Можно считать, что волновая функция ψ, нормированная к I, описывает состояние одной частицы (или системы), и вероятность того, что переменная S, соответствующая оператору $\hat{s}$, для этой частицы имеет собственное значение S_i, определяется выражением

$$W_i(\psi) = |\overline{\Psi_i}\cdot\psi|^2, \tag{I}$$

где Ψ_i – нормированная на I собственная функция оператора $\hat{s}$, соответствующая собственному значению S_i /I8/. С другой стороны, волновая функция ψ может быть нормирована на любое положительное число M и тогда считается, что она описывает ансамбль независимых частиц (или систем) среднего числа M. Среднее число частиц, у которых S имеет значение S_i, опять задается через /I/, причем уже в соответствии со сказанным волновая функция нормирована на M. Эта формулировка более общая – она имеет смысл и тогда, когда M меняется со временем. Мы будем придерживаться её.

Чтобы лучше использовать аналогию со стандартной M - теорией, рассмотрим сначала однократно квантованное уравнение Клейна-Гордона

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \Delta \Psi + m^2 \Psi = 0. \tag{2}$$

Состояние в момент t_0 задается парой функций пространственных координат $\underline{x}$:

$$\phi(\underline{x}) = \left(\Psi(\underline{x},t), \ \frac{\partial \Psi(\underline{x},t)}{\partial t}\right)_{t=t_0}. \tag{3}$$

Вследствие самосопряженности уравнения (2) дивергенция вектора

$$j_\mu = \frac{i}{2}\left(\bar{\Psi}\frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} - \Psi \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x^\mu}\right)$$

исчезает, и поэтому интеграл

$$e = \int \rho(d\underline{x}), \quad \text{где } \rho = j_0 = \frac{i}{2}\left(\bar{\Psi}\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t}\right) \tag{4}$$

будет сохраняться во времени. Соответствующий оператор в пространстве функций (3) будет иметь вид:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{xy} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i\delta(\underline{x}-\underline{y}) \\ -i\delta(\underline{x}-\underline{y}) & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Чтобы диагонализовать этот оператор как характеристики состояния при $t = t_0$, вместо (3) вводится пара функций

$$w(\underline{p}) = (u(p), v(\underline{p})),$$

определяемых из

$$\Psi(\underline{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \left(u(\underline{p})e^{i(\underline{p}\cdot\underline{x} - E(t-t_0))} + v(p)e^{-i(\underline{p}\cdot\underline{x} - E(t-t_0))}\right)\frac{(dp)}{\sqrt{E}}$$

$\left(E = \sqrt{p^2+m^2}\right)$ или, что все равно, из

$$\Psi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(u(\underline{p}) e^{i\underline{p}\cdot\underline{x}} + v(\underline{p}) e^{-i\underline{p}\cdot\underline{x}} \right) \frac{(d\underline{p})}{\sqrt{E}},$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(u(\underline{p}) e^{i\underline{p}\cdot\underline{x}} - v(\underline{p}) e^{-i\underline{p}\cdot\underline{x}} \right) \sqrt{E}\,(d\underline{p}).$$

Оператор (5) в новом базисе $w(\underline{p})$ принимает вид

$$\mathcal{E}_{pq} = \begin{pmatrix} \delta(\underline{p}-\underline{q}) & 0 \\ 0 & -\delta(\underline{p}-\underline{q}) \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Далее указываются операторы $\underline{\pi}$ и $\underline{\xi}$, соответствующие каноническим динамическим переменным: импульсу $\underline{p}$ и координатам $\underline{x}$. (Остальные операторы для других динамических переменных получатся по общим правилам). Принимается

$$\underline{\pi} = \underline{p} \begin{pmatrix} \delta(\underline{p}-\underline{q}) & 0 \\ 0 & \delta(\underline{p}-\underline{q}) \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

$$\underline{\xi} = \begin{pmatrix} -i\dfrac{\partial\delta(\underline{p}-\underline{q})}{\partial\underline{p}} & 0 \\ 0 & -i\dfrac{\partial\delta(\underline{p}-\underline{q})}{\partial\underline{p}} \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Тогда, очевидно, оператор

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \delta(\underline{p}-\underline{q}) & 0 \\ 0 & \delta(\underline{p}-\underline{q}) \end{pmatrix} \qquad (9)$$

будет представлять собой оператор среднего числа частиц, т.е. нормы M. Все собственные значения этих операторов двукратно вырождены, т.е. волновая функция $\phi(x)$ (3) должна описывать два типа частиц. Оператор (6) снимает это вырождение. Он рассматривается как оператор заряда, так что $\phi(x)$ описывает заряженные скалярные частицы.

Даже если исследуемые частицы находятся во внешних векторном и скалярном полях, то есть если вместо (I) мы бы имели

$$a^{\mu\nu}\left(i\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}-A_{\mu}\right)\left(i\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}-A_{\nu}\right)\Psi-(m-V)^{2}\Psi=0, \qquad (I0)$$

то заряд e, задаваемый уже через

$$e=\overline{\Psi}\left(i\frac{\partial}{\partial t}-A_{0}\right)\Psi-\Psi\left(i\frac{\partial}{\partial t}-A_{0}\right)\overline{\Psi},$$

все равно будет сохраняться, но общее число частиц M – не сохраняется, частицы и античастицы могут рождаться и уничтожаться.

Всё сказанное об уравнении Клейна-Гордона (I) непосредственно относится и к рассматриваемому здесь уравнению (УI.I). Оператор Белтрами в пространстве P, хотя и имеет переменные коэффициенты, но тем не менее, как видно из (УI.I2), тоже самосопряжен. Поэтому опять можно ввести вектор тока $\mathcal{J}$, уже с I0 компонентами, с исчезающей дивергенцией. В переменных (УI.3), где $w=(\rho,\theta,\varphi)$, группируя компоненты $\mathcal{J}$ в $\mathcal{J}_t$, $\mathcal{J}_w$ и $\mathcal{J}_{\bar{w}}$ и имея в виду (У.I5), (УI.I2) и (УI.I3), получаем

$$\mathcal{J}_t=i\left(\overline{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial t^{0}}-\Psi\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial t^{0}}\right), \qquad (II)$$

$$\mathcal{J}_w=-i\gamma\left(\overline{\Psi}A_w-\Psi A_w\overline{\Psi}\right), \qquad (I2)$$

$$\mathcal{J}_{\bar{w}}=-i\gamma\left(\overline{\Psi}A_{\bar{w}}\Psi-\Psi A_w\overline{\Psi}\right), \qquad (I3)$$

причем оператор A_w задан через

$$A_w=\left(sh^{2}\rho\sin\theta\frac{\partial}{\partial\rho},\ \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta},\ \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right).$$

Отсюда нетрудно получить операторы массы и заряда. Аналогичным способом вводятся и операторы момента $\underline{p}$ и положения $\underline{t}$ (или $\underline{x}$). Но ввиду того, что число независимых переменных (помимо времени) равно 9, уже $\underline{p}$ и $\underline{x}$ не будут давать полных наборов. Какие переменные будут нужны еще, чтобы получить полный набор, и каков их физический смысл, т.е. как они связываются с переменными, описывающими вращательное движение частицы, - этот вопрос остается открытым.

Уравнение (УI.I) имеет один недостаток. Метрика (У.I5) индефинитна и поэтому (УI.I) в отличие от (2) -ультрагиперболического типа, так что задание ψ и при $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ не обеспечивает однозначность и существование ψ при всех t . Решения уравнения (УI.I) все же существуют - в гл. УП мы нашли три таких класса. Может быть, удастся ограничиться работой только с ними. Существует, пожалуй, и другой, более радикальный выход. Пусть $\psi(p,\tau)$ - полная система ортогональных и нормированных к $\delta(\tau,s)$ решений уравнения (УI.I). Состояние системы, соответствующее данному прибору G , может определяться одной функцией $\phi(p)$, не обязанной удовлетворять уравнению типа (УI.I), но с возрастанием t и $\underline{w}$ достаточно быстро убывающей, так чтобы интегралы типа

$$\phi\cdot\psi(\tau)=\int\bar{\phi}(p)\,\psi(p,\tau)\,(dp)$$

сходились. Тогда величину

$$N(\tau)=|\phi\cdot\psi(\tau)|^2$$

можно будет рассматривать как среднее число частиц в состоянии, характеризуемом параметром τ , а

$$N(q,\tau)=\int\bar{\phi}(q,p)\,\psi(p,\tau)\,(dp)$$

будет определять значение той же самой величины $N(\tau)$, при предположении что измерительный прибор сдвинут преобразованием Пуанкаре q. В частности, если q_t – перемещение во времени, $N(q_t, \tau)$ будет определять развитие системы во времени t. Все это, конечно, только возможные пути.

Открытым остается и вопрос, является ли инвариантность по отношению к Q, а не только к P, обязательной для всех полей – скалярных, векторных, тензорных и спинорных, или это требование связано только с одним видом скалярных частиц.

Что касается перехода ко вторичному квантованию, он происходит по общим правилам. Разница только в том, что требование Q – инвариантности к P – теории, в отличие от инвариантности в M – теории, более неоднозначно определяет коммутаторы. Сравнивая (УШ.II) с (УШ.I8) и учитывая наличие множителя $\delta_m(q-p)$ в (УШ.I8), получаем, что, хотя коммутаторы в P – теории в окончательном виде не найдены, скалярное поле в P - пространстве, т.е. все его компоненты в M – пространстве локально коммутативны.

Отметим еще, что P – теория является обобщением M – теории, т.е. что при некоторых дополнительных ограничениях P – теория сводится к M – теории. Для этого достаточно предположить, что $\Psi(t, \underline{w})$ от $\underline{w}$ не зависит. Тогда оператор Δ_P сводится к $\Box$, несмотря на значение γ. Чтобы свести P -теорию к M – теории, достаточно также предположить, что $\gamma = 0$. Зависимость Ψ от $\underline{w}$ при этом не отпадает, но она становится несущественной. Оба эти предположения, сводящие P-

теорию к M - теории, совместимы с P - инвариантностью, но из нее не следуют. Требование Q - инвариантности тоже не следует, но оно является менее ограничительным и, следовательно, только опыт может решить, какая теория лучше соответствует действительности. То, что уравнения (II.7) в отличие от (II.8) решаются легко, как и простота предположений, на которых P - теория строится, выявляют её преимущества перед M - теорией, несмотря на большую сложность в ее разработке.

В заключение считаю приятным долгом выразить сердечную благодарность профессору И.Тодорову и ст.н.с. Д.Стоянову за полезную дискуссию и критические замечания.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. F.Lurçat. Quantum field theory and the dynamical role of spin. Physics, I, No 2, 95 (1964).

2. A.Kihlberg. On the internal degrees of freedom of elementary particles. Arkiv. für Fysik., 28, I2 (1964).

3. A.Kihlberg. Fields on a homogeneous space of the Poincaré group. Preprint Göteborg Univ., Janvier, 1969.

4. G.Fuchs, Field theories on a homogeneous space of the Poincaré group. Part. I - Free fields, November 1968. Part 2 - Interaction models, Fevrier 1969. Preprints Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique.

5. G.Fuchs. Field theories on the Poncaré group. Relativistic models. Preprint Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique, Mars, 1970.

6. А.Вайтман. Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей. Москва, Изд-во "Наука", 1968.

7. Г.Нейман. Математические основы квантовой механики. Из-во "Наука", Москва, 1964

8. С.Газиорович. Физика элементарных частиц, Из-во "Наука", Москва, 1969.

9. E.Winger. Gruppentheorie und ihre Anwendungen auf die Quantenmechanik der Atomspektren. Braunschweig, 193I.

10. Хр.Я.Христов. О возможных связях квантовой теории с опытом. Сборник "Развитие современной физики". Из-во "Наука", Москва, 1964.

II. Л.П.Эйзенхэрт. Непрерывные группы преобразований. Гос.Из-во иностр. литературы. Москва, 1947.

12. Chr.Christov, N.Salié. Eigenschaften primärer Koordinaten. Доклады БАН, 20(3), 1957 (1967).

13. A.J.Macfarlane, On the Restricted Lorentz group and groups homomotphicaly related to it. J.Math.Phys. 3, No 6, 1116 (1962).

14. М.А.Наймарк. Линейные представления группы Лоренца. "Физматгиз", Москва, 1958.

15. Н.Виленкин. Я.А.Смородинский. ЖЭТФ 46, 1793 (1964).

16. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, Москва, 1962.

17. Хр. Я.Христов. Я.Арнаудова и др. О матричных элементах представлений группы Лоренца. Сборник. Вопросы теории элементарных частиц. Дубна, 1968.

18. J.D.Bjiorken, S.D.Drell, Relativistic Quantum Mechanics, M-c Grow Hill, 1964.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 декабря 1970 года.