СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 5363

В.Н. Стрельцов

ИНВАРИАНТЫ В НЕРЕЛЯТИВИСТСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1970

P2 - 5363

В.Н. Стрельцов

ИНВАРИАНТЫ В НЕРЕЛЯТИВИСТСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ [x]

[x] В порядке обсуждения.

1. Рассмотрим нерелятивистские преобразования координат[1]:

$$x = (x' + \beta ct')(1 + \frac{1}{2}\beta^2),\ y = y',\ z = z',\ t = t'(1 + \frac{1}{2}\beta^2) + \frac{\beta}{c}x', \tag{1}$$

где $\beta = v/c$, и покажем сначала, что квадрат интервала остается инвариантом и в рассматриваемом нерелятивистском приближении. При этом, как и ранее[2], в процессе доказательства мы будем отбрасывать члены порядка β^4 и учитывать, что в данном случае справедливо условие

$$\frac{x}{t} \approx \beta c\ . \tag{2}$$

С учётом этих замечаний на основании формул (1) будем иметь:

$$I_1 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2(1+\beta^2) + 2\beta ct'x'(1 + \underline{\tfrac{1}{2}\beta^2}) + \underline{\beta^2 x'^2} -$$

$$- x'^2(1 + \underline{\beta}^2) - 2\beta ct'x'(1 + \underline{\beta}^2) - \beta^2c^2t'^2(1 + \underline{\beta}^2) - y'^2 - z'^2.$$

Здесь подчёркнуты члены порядка β^4. Отбрасывая их, придём к требуемому равенству

$$c^2t^2-x^2-y^2-z^2=c^2t'^2-x'^2-y'^2-z'^2. \qquad (3)$$

Заметим, что характер доказательства инвариантности интервала не меняется и в Галилеевом приближении.

Действительно, после подстановки формул Галилея

$$x=x'+\beta ct, \quad y=y', \quad z=z', \quad t=t' \qquad (4)$$

в выражение для I_1 будем иметь

$$I_1=c^2t^2-x^2-y^2-z^2=c^2t'^2-x'^2-2\beta ct'x'-\beta^2c^2t'^2-y'^2-z'^2.$$

Отсюда следует, что требуемое условие неизменности интервала в этом случае, например, будет выполнено, если с привлечением (2) мы отбросим как малые (порядка β^2) по отношению к первому члену третье и четвёртое слагаемые в правой части.

Больше того, опять-таки на основании условия (2) мы вообще можем записывать в Галилеевом приближении инвариант I_1 в форме

$$I_1=c^2t^2.$$

Тогда на основании второй формулы (3) его неизменность при переходе к другой системе отсчёта очевидна[x/].

Что касается других 4- векторов, таких, как скажем, 4-импульс, преобразующийся в нерелятивистском приближении по формулам

$$p_x=(p_x'+\frac{\beta}{c}\epsilon')(1+\frac{1}{2}\beta^2), \quad p_y=p_y', \quad p_z=p_z', \quad \mathcal{E}=\mathcal{E}'(1+\frac{1}{2}\beta^2)+\beta c\,p_x, \qquad (4)$$

аналогичным (1), то неизменность соответствующих инвариантов доказывается совершенно так же. При этом в Галилеевом приближении, например, вместо (4) будем иметь

---

x/ Вместе с тем, очевидно, что пространственная часть интервала не будет обладать инвариантными свойствами в данном приближении.

$$p_x=p_x'+\frac{\beta}{c}\mathcal{E}', \quad p_y=p_y', \quad p_z=p_z', \quad \mathcal{E}=\mathcal{E}', \qquad (5)$$

а соответствующий инвариант запишется в форме

$$P_2=\mathcal{E}^2.$$

То, что это действительно инвариант, с очевидностью следует из последней формулы (5).

Остановимся теперь на вопросе об инвариантах электромагнитного поля. При этом будем опираться на следующие формулы преобразований для компонент электрического и магнитного полей:

$$E_x=E_x', \quad E_y=E_y'(1+\frac{1}{2}\beta^2)+\beta H_z', \quad E_z=E_z'(1+\frac{1}{2}\beta^2)-\beta H_y',$$

$$H_x=H_x', \quad H_y=(H_y-\beta E_z')(1+\frac{1}{2}\beta^2), \quad H_z=(H_z'+\beta E_y')(1+\frac{1}{2}\beta^2). \qquad (6)$$

Подставляя (6) в выражение $\vec{E}\vec{H}$ и отбрасывая члены порядка β^4, действительно получим, что

$$\vec{E}\vec{H}=\vec{E}'\vec{H}'.$$

Подобным же образом доказывается неизменность и второго инварианта $I_3=\vec{H}^2-\vec{E}^2$.

В Галилеевом приближении вместо формул (6) будем иметь

$$E_x=E_x', \quad E_y=E_y', \quad E_z=E_z',$$

$$H_x=H_x', \quad H_y=H_y-\beta E_z', \quad H_z=H_z'+\beta E_y', \qquad (7)$$

поэтому для I_8 может быть использовано выражение

$$I_8 = -\vec{E}^2 ,$$

инвариантность которого на основании первых трех формул (7) очевидна.

2. В заключение мы коснемся одного важного вопроса, связанного с результатами первой части п.1.

Для этого вслед за первым нерелятивистским преобразованием, приведшим к (3), произведем второе нерелятивистское преобразование. При этом получим

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2 t''^2 - x''^2 - y''^2 - z''^2. \qquad (8)$$

Далее будем рассуждать так. Мы произвели оба указанных преобразования последовательно, а так как они оба линейны, то в результате мы опять должны получить линейное преобразование. Теперь зададимся таким вопросом: является ли результирующее преобразование также нерелятивистским?

Легко видеть, что из двух написанных равенств (3) и (7) следует

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t''^2 - x''^2 - y''^2 - z''^2 ,$$

т.е. совокупность отмеченных преобразований также оставляет эту форму неизменной, а это и есть, с одной стороны, характеристика нерелятивистских преобразований, а, с другой стороны, основное условие групповости. Последний вывод находится, очевидно, в полном согласии с полученными ранее результатами /3/.

Литература

1. *В.Н. Стрельцов. Сообщение ОИЯИ Р2-4461, Дубна, 1969.*
2. *В.Н. Стрельцов. Сообщение ОИЯИ Р2-5131, Дубна, 1970.*
3. *В.Н. Стрельцов. Сообщение ОИЯИ, Р2-5313, Дубна, 1970.*

Рукопись поступила в издательский отдел

23 сентября 1970 года.