ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 5338

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

М.И. Широков

# К ВОПРОСУ
# О СКОРОСТИ ФОТОНА

Направлено в ЯФ

1970

P2 - 5338

М.И. Широков

# К ВОПРОСУ О СКОРОСТИ ФОТОНА

Направлено в ЯФ

## В в е д е н и е

В работе /1/ было показано, что согласно теории квантовой электродинамики атом-детектор 2 может получить возбуждение от атома-источника 1 несколько ранее времени $R/c$ , где $R$ - расстояние между атомами. Точнее, если вначале, при $t=0$ , только атом 1 был возбужден, то в момент $t>0$ атом 2 может оказаться возбужденным, даже если $t<R/c$ . Эта задача Коши была решена в рамках такой модели: "атомы" состоят из нерелятивистских бесспиновых электронов, находящихся в осцилляторных потенциалах. Эти электроны взаимодействуют с квантованным электромагнитным полем, причем только дипольно. Описание возбужденных и основных состояний атомов и корпускулярная интерпретация электромагнитного поля осуществлялись не с помощью "голых" операторов рождения-уничтожения, а посредством "физических" операторов, вакуумный вектор которых совпадает с физическим вакуумом гамильтониана модели. Причины использования такого подхода, а также важные качественные и количественные отличия от результатов обычного подхода ("голый" формализм) были изложены во введении к /1/. Там же есть краткая история этой задачи Коши и ссылки на литературу. В настоящей работе тоже используются физические операторы и предполагается знакомство с работой /1/.

Задача Коши является идеализированным описанием эксперимента по передаче сигнала. Предполагается, что в момент $t = 0$ имеем некоторое заданное начальное состояние, а именно: осциллятор 1 однократно возбужден. В эксперименте же состояние фиксируется некоторым процессом приготовления, в результате которого не обязательно получается чистое однократное возбужденное состояние. С точки зрения теоретического описания самый простой способ быстрого приготовления возбужденного состояния – воздействие внешним классическим полем[x/]. Пусть наряду с основным осцилляторным потенциалом на первый электрон накладывается внешнее электрическое поле, которое в малой области $\ell = 1/\sqrt{m\varkappa_1}$, где локализован первый электрон, приближенно имеет вид добавочного осцилляторного потенциала. Наличие такого изменяющегося во времени электрического поля можно отобразить введением зависящих от времени параметров $\varkappa_{1x}(t)$, $\varkappa_{1y}(t)$ и $\varkappa_{1z}(t)$ осцилляторного потенциала $\frac{m}{2}\left[\varkappa_{1x}^2 x^2 + \varkappa_{1y}^2 y^2 + \varkappa_{1z}^2 (z-d)^2\right]$ для первого электрона[xx/].

В этой работе решается следующая задача. До момента $t=0$ оба атома не были возбуждены и фотоны отсутствовали. Такое состояние в "физической" корпускулярной интерпретации описывается стабильным

---

[x/] Можно возбуждать атом внезапно надвигаемым пучком фотонов или электронов. Но это означает, что вопрос о приготовлении переносится на этот пучок. Если он формируется и отклоняется внешним полем, то мы опять приходим к внешнему полю как исходному приготовляющему фактору. Проще сразу принять, что есть внешнее поле, непосредственно воздействующее на атом.

[xx/] Буквально это означает, что действующий на электрон потенциал меняется одновременно во всем пространстве. Однако можно полагать, что это достаточно хорошее описание действия внешнего поля, поскольку для электрона, уже находящегося в осцилляторной яме, существенно поведение потенциала в малой области около точки $+d$. Аналогичное предположение лежит в основе всех физических применений осцилляторных потенциалов.

вектором физического вакуума. В момент $t=0$ параметры $\mathcal{H}_{1x}$, $\mathcal{H}_{1y}$, $\mathcal{H}_{12}$ начинают изменяться со временем. Требуется найти вероятность $w(t)$ того, что второй атом в момент $t>0$ окажется возбужденным. Мы ограничимся решением в первом неисчезающем приближении теории возбуждений. Можно думать, что оно достаточно хорошее. Действительно, в [1,2] численным расчетом было продемонстрировано, что точное [x] решение задачи Коши при $t \lesssim R/c$ с точностью не хуже 1% совпадает с результатом первого неисчезающего приближения.

Результат оказывается таким же акаузальным, как и в задаче Коши, см. далее (33).

В отличие от настоящей квантовой электродинамики в обсуждаемой модели есть дипольное приближение и электроны описаны нерелятивистски. Однако для эффекта это не является существенным, см. §2 работы автора [3], где это было показано, правда, в рамках "голого" формализма.

Акаузальный эффект мал, но, по-видимому, может быть усилен и зарегистрирован, см. далее §3. Отметим, что наличие такого эффекта в квантовой электродинамике не противоречило бы ее явной лоренцевской инвариантности: известны, например, ковариантные классические нелинейные теории поля, в которых скорость сигнала может превышать скорость света $c$, см.[4], а также[5,6].

---

x/ Оговоримся, что в этом точном решении в [1] использовалось приближенное выражение для гамильтониана взаимодействия, поправки к которому не превосходят 1%. Это означает, в частности, что точное решение, полученное в [1], учитывая эффект затухания, дает для соответствующей константы (времени жизни) значение, отличающееся от истинного на $\sim 1\%$.

§1. Метод решения

Гамильтониан модели /1/ разделяется на три коммутирующих друг с другом гамильтониана: $H = H_x + H_y + H_z$. Мы выпишем один из них, остальные имеют аналогичный вид.

$$
\begin{aligned}
H_x = {} & \frac{p_{1x}^2}{2m} + \frac{m\varkappa_{1x}^2}{2} q_{1x}^2 + \frac{p_{2x}^2}{2m} + \frac{m\varkappa_{2x}^2}{2} q_{2x}^2 + \frac{e^2}{R^3} q_{1x} q_{2x} + \\
& + \frac{p_{1x}}{\sqrt{m}} \int_0^\infty dk \sum_{a=1,2} \mathcal{E}_1^a(k,d)\, p_{ax}(k) + \frac{p_{2x}}{\sqrt{m}} \int_0^\infty dk \sum_a \mathcal{E}_2^a(k,d)\, p_{ax}(k) + \\
& + \frac{1}{2}\Big[\int_0^\infty dk \sum_a \mathcal{E}_1^a\, p_{ax}(k)\Big]^2 + \frac{1}{2}\Big[\int_0^\infty dk \sum_a \mathcal{E}_2^a\, p_{ax}(k)\Big]^2 + H_{phx} ,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
H_{phx} = \frac{1}{2} \int_0^\infty dk \sum_a k \left[ q_{ax}^2(k) + p_{ax}^2(k) \right] . \tag{2}
$$

Функции $\mathcal{E}_1^a(k,d)$ и $\mathcal{E}_2^a(k,d)$ содержат константу связи $e$ и обрезание $g(k)$ и выписаны в /1/; $d = R/2$ .

Пусть до момента $t=0$ состояние описывалось стабильным вектором физического вакуума $\Omega$. В момент $t=0$ начинают изменяться параметры $\varkappa_{1x}$, $\varkappa_{1y}$, $\varkappa_{1z}$. Нас интересует вероятность

$$
w(t) = \sum_f \left| \langle f, S(t,0)\,\Omega \rangle \right|^2 , \tag{3}
$$

где $\sum_f$ означает сумму по всем состояниям $f$, в которых атом 2 является возбужденным. $S(t,0)$ есть оператор эволюции.

Однократно возбужденное состояние осциллятора 2 мы будем описывать вектором $\tilde{a}^+_{2x}\Omega$ и говорить, что имеем состояние с одним фононом сорта 2x. Двукратно возбужденное состояние 2 описывается вектором $\tilde{a}^+_{2x}\tilde{a}^+_{2x}\Omega$ (два фонона сорта 2x). Аналогично $\tilde{a}^+_{2y}\Omega$ описывает состояние "один фонон сорта 2y" и т.д. Здесь $\tilde{a}_{2x}$ – физический оператор, введенный в /1/. Процедура получения физических операторов рождения–уничтожения фононов и фотонов $\tilde{a}^+$ и $a$ в случае зависящих от времени параметров $\mathcal{H}_{1x}$, $\mathcal{H}_{1y}$, $\mathcal{H}_{12}$ остается той же самой, что и в /1/. Как и в /1/, вместо $\tilde{a}^+$ и $\tilde{a}$ мы будем использовать эквивалентные эрмитовские операторы $\tilde{q}$ и $\tilde{p}$ там, где это будет удобнее:

$$\tilde{q} = i(\tilde{a}-\tilde{a}^+)/\sqrt{2} \quad ; \quad \tilde{p} = (\tilde{a}+\tilde{a}^+)/\sqrt{2}\,. \tag{4}$$

Операторы координат электронов $q_1$ и $q_2$ и фотонные операторы $q_a(k)$, фигурирующие в (1), следующим образом выражаются через физические операторы $\tilde{q}_1$, $\tilde{q}_2$ и $\tilde{q}_b(\nu)$ (значок $x$ у всех величин опускается):

$$\sqrt{m}\, q_1 = a_{11}\tilde{q}_1 + a_{12}\tilde{q}_2 \quad ; \quad \sqrt{m}\, q_2 = a_{21}\tilde{q}_1 + a_{22}\tilde{q}_2\;;$$

$$\begin{aligned} q_a(k) = &-\left[\xi^a_1(k)\, a_{11} + \xi^a_2(k)\, a_{21}\right]\tilde{q}_1 - \\ &-\left[\xi^a_1(k)\, a_{12} + \xi^a_2(k)\, a_{22}\right]\tilde{q}_2 + \\ &+\frac{1}{\sqrt{k}}\int_0^\infty dk \sum_{b=1,2} X^a_b(k,\nu)\sqrt{\nu}\,\tilde{q}_b(\nu)\,. \end{aligned} \tag{5}$$

В этих формулах объединены все преобразования, описанные в §2 работы /1/. Обозначения:

$$a_{11}=\frac{\cos\vartheta\cos\phi}{\sqrt{\omega_1}}+\frac{\sin\vartheta\sin\phi}{\sqrt{\omega_2}}\ ;\quad a_{12}=\frac{\cos\vartheta\sin\phi}{\sqrt{\omega_1}}-\frac{\sin\vartheta\cos\phi}{\sqrt{\omega_2}}\ ;$$

$$a_{21}=\frac{\sin\vartheta\cos\phi}{\sqrt{\omega_1}}-\frac{\cos\vartheta\sin\phi}{\sqrt{\omega_2}}\ ;\quad a_{22}=\frac{\sin\vartheta\sin\phi}{\sqrt{\omega_1}}+\frac{\cos\vartheta\cos\phi}{\sqrt{\omega_2}}\ . \tag{6}$$

Функции $\xi_1^a(\kappa)$, $\xi_2^a(\kappa)$, $X_b^a(\kappa,\nu)$ и величины $\omega_1$, $\omega_2$, $\vartheta$, $\phi$ были введены и получены в /1/. Некоторые из них выписаны в Приложении А.

Если $\{q_1, q_2, q_a(\kappa)\}$ расположить столбцом, то (5) можно записать в виде $q=Q\tilde{q}$, где столбцы " матрицы" $Q$ нумеруются индексом $K$, принимающим дискретные значения 1,2 и два набора непрерывных значений $(a,\kappa)$ ; $a$ = 1,2; $0<\kappa<\infty$. Индекс строки $N$ (ню) принимает значения 1,2, $(b,\nu)$ ; $b$ = 1,2; $0<\nu<\infty$. В таких обозначениях соответствующее каноническое преобразование для операторов $p$ имеет вид $p=P\tilde{p}$ :

$$\begin{pmatrix}\frac{p_1}{\sqrt{m}}\\ \frac{p_2}{\sqrt{m}}\\ p_a(\kappa)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{\omega_1\omega_2}\,a_{22} & -\sqrt{\omega_1\omega_2}\,a_{21} & \int d\kappa\sum\limits_a \xi_1^a\, X_b^a(\kappa,\nu)\sqrt{\frac{\kappa}{\nu}}\\ -\sqrt{\omega_1\omega_2}\,a_{12} & \sqrt{\omega_1\omega_2}\,a_{11} & \int d\kappa\sum\limits_a \xi_2^a\, X_b^a(\kappa,\nu)\sqrt{\frac{\kappa}{\nu}}\\ 0 & 0 & \sqrt{\kappa}\,X_b^a(\kappa,\nu)/\sqrt{\nu}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{p}_1\\ \tilde{p}_2\\ \tilde{p}_b(\nu)\end{pmatrix}. \tag{7}$$

Хотя все операторы в (5) и (7) шредингеровские, но физические операторы $\tilde{q}$, $\tilde{p}$ зависят от времени, потому что $Q$ и $P$ суть функции времени, если $\mathcal{H}_{1x}$, $\mathcal{H}_{1y}$ и $\mathcal{H}_{12}$ зависят от времени.

Через физические операторы гамильтониан $H_x$ выражается следующим образом: $H(t) = \tilde{H}_0(t) + \tilde{H}_{int}(t)$ (значок x опять опущен), где

$$\tilde{H}_0(t) = \frac{\nu_1}{2}\left(\tilde{a}_1^+\tilde{a}_1 + \tilde{a}_1\tilde{a}_1^+\right) + \frac{\nu_2}{2}\left(\tilde{a}_2^+\tilde{a}_2 + \tilde{a}_2\,\tilde{a}_2^+\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\infty d\nu\, \Sigma_b\left[\tilde{a}_b^+(\nu)\,\tilde{a}_b(\nu) + \tilde{a}_b(\nu)\,\tilde{a}_b^+(\nu)\right] \quad ; \qquad (9)$$

$$\tilde{H}_{int}(t) = E\left(\tilde{a}_1^+\tilde{a}_2 + \tilde{a}_1\,\tilde{a}_2^+\right) + \int_0^\infty d\nu\, \Sigma_b\left\{E_1^b(\nu)\left[\tilde{a}_1\tilde{a}_b^+(\nu) + \tilde{a}_1^+\tilde{a}_b(\nu)\right] + \right.$$

$$\left. + E_2^b(\nu)\left[\tilde{a}_2\tilde{a}_b^+(\nu) + \tilde{a}_2^+\,\tilde{a}_b(\nu)\right]\right\} ; \qquad (10)$$

$$E = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\sin 2\phi$$

(см. §3 в /1/). В дальнейшем будем считать, что константа $\mathcal{H}_2$ всегда больше $\mathcal{H}_1(t)$. Например, пусть $\mathcal{H}_2 = 2\mathcal{H}$, а $\mathcal{H}_1$ при всех интересующих нас временах близко к константе $\mathcal{H}$, так что $\mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_1(t) \gg e^2\mathcal{H}$. В этом случае функции $E_1^b$ и $E_2^b$ из (10) в первом приближении имеют вид (см. Приложение A)

$$E_1^b(\nu) = -e\sqrt{\frac{\mathcal{H}_1}{m}}\cdot\frac{\nu\sqrt{\nu}}{\nu + \mathcal{H}_1}\, g(\nu)\, f_{b1}(\nu) \quad ;$$

$$E_2^b(\nu) = (-1)^b e\sqrt{\frac{\mathcal{H}_2}{m}}\cdot\frac{\nu\sqrt{\nu}}{\nu + \mathcal{H}_2}\, g(\nu)\, f_{b1}(\nu) \quad ; \qquad (11)$$

$$f_{b1}(\nu) = \sqrt{\frac{2}{3\pi}}\left\{1 - \frac{3}{2}(-1)^b\left[\frac{\sin\nu R}{\nu R} + \frac{\cos\nu R}{(\nu R)^2} - \frac{\sin\nu R}{(\nu R)^3}\right]\right\}^{1/2}.$$

Перенормированные частоты осцилляторов $\nu_1(t)$ и $\nu_2(t)$ в (9) близки к $\mathcal{H}_1(t)$ и $\mathcal{H}_2$ соответственно.

Многие амплитуды в (3) равны нулю. В §2 мы увидим, что равна нулю амплитуда перехода из $\Omega$ в состояние "один фонон сорта 2 или 1" или "один фотон", т.е. в одноквантовые состояния, как мы их будем называть. Вообще равны нулю все амплитуды перехода в состояния с нечетным числом квантов сорта $x$ (или сорта $y$, или сорта $z$). Из двухквантовых конечных состояний $f$ наиболее вероятными оказываются состояния $\tilde{a}^+_{2r}\,\tilde{a}^+_{1r}\,\Omega$, $r = x, y, z$ (один фонон сорта $2r$ и один фонон сорта $1r$). Для наших целей достаточно установить, что в сумме (3) не равно нулю при $t < R/c$ хотя бы одно из слагаемых, например с амплитудой

$$A(t) = \langle \tilde{a}^+_{2x}(t)\,\tilde{a}^+_{1x}(t)\,\Omega(t),\ S(t,0)\,\Omega(0)\rangle . \tag{12}$$

Сейчас мы явно отразили тот факт, что физические шредингеровские операторы явно зависят от времени, как и их вакуумный вектор $\Omega(t)$.

Непосредственный путь вычисления (12) таков:

1. Надо найти выражения $\tilde{a}(t)$ и $\tilde{a}^+(t)$ через $\tilde{a}(0)$ и $\tilde{a}^+(0)$. Их можно выписать, зная выражения $\tilde{q}(t)$, $\tilde{p}(t)$ и $\tilde{q}(0)$, $\tilde{p}(0)$, через $q$, $p$, см. (4), (5) и (7).

2 . Эти выражения надо вставить в

$$S(t,0) = P\exp\left\{-i\int_0^t dt' \left[ H_x(t') + H_y(t') + H_z(t') \right] \right\} \tag{13}$$

так, чтобы в $S(t,0)$ фигурировали только $\tilde{a}(0)$, $\tilde{a}^+(0)$.

3. Опять же с помощью этих выражений можно получить разложение $\Omega(t)$ по векторам $\Omega(0)$, $\tilde{a}^+(0)\Omega(0)$, $\tilde{a}^+(0)\tilde{a}^+(0)\Omega(0)\ldots$.

4. После этого (12) будет представлено только через операторы $\tilde{a}(0)$ и вектор $\Omega(0)$. Это громоздкое выражение возможно вычислить только по теории возмущений, по-видимому.

Мы вычислим (12) по-другому. Найдем сначала уравнения, которым подчиняются $\tilde{q}$ и $\tilde{p}$ как функции времени. Дифференцируя $q = Q\tilde{q}$ по времени, получим

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial t} Q\right)\tilde{q} + Q\frac{\partial}{\partial t}\tilde{q}, \qquad \text{откуда} \quad \frac{\partial}{\partial t}\tilde{q} = -Q^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial t} Q\right)\tilde{q}.$$

Поскольку $QP^T = 1$ (условие каноничности преобразований (5) и (7); можно его проверить непосредственно), то $Q^{-1} = P^T$. Таким образом получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{q} = -P^T\dot{Q}\tilde{q}; \qquad \frac{\partial}{\partial t}\tilde{p} = -Q^T\dot{P}\tilde{p}.$$

Можно проверить, что наряду с $QP^T = 1$ имеет место также и $P^TQ = 1$. Дифференцируя $P^TQ = 1$ по времени, получаем $\dot{P}^TQ = -P^T\dot{Q}$. Видим, что для вычисления $\partial\tilde{q}/\partial t$ и $\partial\tilde{p}/\partial t$ достаточно вычислить "матрицу" $M = Q^T\dot{P}$: $\partial\tilde{p}/\partial t = -M\tilde{p}$ и $\partial\tilde{q}/\partial t = M^T\tilde{q}$. Далее можно непосредственно проверить, что правые части этих соотношений можно представить как $-i[\tilde{p}, \tilde{h}]$ и $-i[\tilde{q}, \tilde{h}]$ соответственно, где

$$\tilde{h} = \frac{1}{2} M_{NN'} \left( \tilde{q}_N \tilde{p}_{N'} + \tilde{p}_{N'} \tilde{q}_N \right) . \tag{14}$$

Подразумевается свертка по индексам $N, N'$ , определенным выше, перед (7). "Матрица" $M$ вычислена в Приложении Б.

Если теперь произвести унитарное преобразование

$$\breve{q} = V \tilde{q} V^{-1} \quad ; \quad \breve{p} = V \tilde{p} V^{-1}, \tag{15}$$

где $V(t)$ удовлетворяет уравнению $i\, \partial V/\partial t = \breve{h} V$ или $i \dot{V} = V \tilde{h}$, то окажется, что $\partial \breve{q} / \partial t = \partial \breve{p} / \partial t = 0$ . Преобразование (15) означает переход в картину, где "физические" операторы не зависят от времени. Поскольку исходная картина была шредингеровской, то новую можно назвать ультрашредингеровской. Конечное состояние в (12) в этой картине от времени не зависит:

$$V \tilde{a}_1^+(t)\, \tilde{a}_2^+(t)\, \Omega(t) = \breve{a}_1^+ \breve{a}_2^+ \breve{\Omega} .$$

Вектор $\breve{\Omega} = V(t)\, \Omega(t)$ не зависит от времени, т.к. он является вакуумным вектором не зависящих от времени операторов: $\breve{a}\, \breve{\Omega} = 0.$ Новый оператор эволюции $\breve{S}(t,0) = V(t)\, S(t,0)\, V^{-1}(0)$ подчиняется уравнению

$$i\, \partial \breve{S} / \partial t = (\breve{H} + \breve{h})\, \breve{S} .$$

И поэтому

$$A(t) = \left\langle \breve{a}_{2x}^+ \breve{a}_{1x}^+ \breve{\Omega} ,\ P\exp\left\{ -i \int_0^t dt' \left[ \breve{H}(t') + \breve{h}(t') \right] \right\} \breve{\Omega} \right\rangle . \tag{16}$$

Теперь объявим новым гамильтонианом взаимодействия сумму $\breve{H}_{int} + \breve{h} = \breve{H}'$, т.е. сумму операторов, которые так же зависят от $\breve{q}$ и $\breve{p}$, как (10) и (14) зависят от $\tilde{q}$ и $\tilde{p}$. Чтобы вычислить (16) по теории возмущений, сделаем обычное преобразование $W$ в картину взаимодействия:

$$q(t) = W^{-1}(t)\, \breve{q}\, W(t) \quad ; \quad i\partial W/\partial t = \breve{H}_o W \; ;$$

$$U(t,0) = W^{-1}(t)\, \breve{S}(t,0) W(0) \; ; \quad i\,\partial U/\partial t = H' U \,. \tag{17}$$

Оператор $\breve{H}_o$ так же зависит от $\breve{a}$ и $\breve{a}^+$, как $\tilde{H}_o$ от $\tilde{a}$ и $\tilde{a}^+$, см. (9). Операторы этой картины мы не снабдили никакими дополнительными индексами. Надеемся, что их нельзя будет спутать с операторами в (1). Для новых операторов уничтожения $a(t)$ имеются уравнения $\partial a/\partial t = -i\,[\,a,\, H_o]$, откуда

$$a_1(t) = \exp\left[-i\int_0^t dt'\; \nu_1(t')\right]\, a_1(0) \quad ;$$

$$a_2(t) = \exp\left[-i\int_0^t dt'\; \nu_2(t')\right] a_2(0) \cong \exp(-i\varkappa_2 t)\, a_2(0)\; ;$$

$$a_b(\nu,t) = \exp(-i\nu t)\; a_b(\nu,0)\,. \tag{18}$$

Здесь учтено, что $\nu_2$ очень слабо зависит от $t$ : $\nu_2 \cong \omega_2 \cong \varkappa_2$, см. Приложение Б. Вакуумный вектор $\Omega$ картины взаимодействия не зависит от $t$, если шкала энергии выбрана так, что $H_o\Omega = 0$. Для искомой амплитуды получаем

$$A(t) = \exp\left[-i\int_0^t \nu_1(t')\,dt'\right] \exp\left[-i\varkappa_2 t\right] \times$$
$$\times \left\langle a_{2x}^+(0)\,a_{1x}^+(0)\Omega,\ P\exp\left[-i\int_0^t dt'\left(H_x' + H_y' + H_z'\right)\right]\Omega \right\rangle. \tag{19}$$

Это выражение мы и вычислим в первом неисчезающем приближении теории возмущений. В изложенном методе мы не только избежали этапов 2 и 3 непосредственного пути вычисления (см. выше, стр. 6). Ранее гамильтониан $\tilde{H}_0$, см. (9), мог приводить к переходам вида $\Omega \to \to \tilde{a}_1^+ \tilde{a}_1^+ \Omega$ ввиду зависимости $\tilde{a}_1$ от $t$. Теперь и такие переходы осуществляются через посредство нового гамильтониана взаимодействия $H_{int} + h$ и могут вычисляться по теории возмущений.

## §2. Приближенное вычисление амплитуды передачи возбуждения

Выпишем приближенное выражение для $H_x' = H_{int\,x} + h_x$. С самого начала опустим все члены, содержащие величины порядка $e^2/R^4$ (или порядка $\vartheta$, см. Приложение Б) и еще меньшие. Потом мы увидим, что поправками от выброшенных членов можно будет пренебречь.

$$H' = \int_0^\infty d\nu \sum_b \left\{E_1^b(\nu)\left[a_1 a_b^+(\nu) + a_1^+ a_b(\nu)\right] + E_2^b(\nu)\left[a_2 a_b^+(\nu) + a_2^+ a_b(\nu)\right]\right\} +$$
$$+ \frac{\lambda(t)}{2}\cdot\frac{i}{2}\left(a_1 a_1 - a_1^+ a_1^+\right) + \tag{20}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\omega_1}}\int_0^\infty d\nu \sum_b \frac{\partial}{\partial t}\xi_1^b(\nu)\cdot\frac{i}{2}\left\{\left[a_1 a_b(\nu) - a_1^+ a_b^+(\nu)\right] + \left[a_1 a_b^+(\nu) - a_1^+ a_b(\nu)\right]\right\} +$$

$$+\int_0^\infty d\nu \int_0^\infty d\nu' \sum_{\ell,\ell'} \frac{\partial}{\partial t} X(\nu\ell, \nu'\ell') \frac{1}{2} \left[ q_\ell(\nu) p_\ell(\nu') + p_{\ell'}(\nu') q_\ell(\nu) \right] .$$

Индекс $x$ подразумевается. Использовано выражение (Б.6) для матрицы $M$, см. Приложение Б; $\lambda(t) \equiv \dot{\varkappa}_1(t) / \varkappa_1(t)$.

Поскольку $H'_x$, $H'_y$, $H'_z$ суть билинейные функции операторов рождения-уничтожения, то в любом порядке теории возмущений амплитуда перехода типа $\langle a^+_{2x}\Omega, P\exp[-i\int_0^t dt' H'(t')]\Omega\rangle$ равна нулю, как и все амплитуды с нечетным числом квантов сорта $x$ (или сорта $y$, или $z$) в конечном состоянии.

Операторы $H'_y$, $H'_z$ и их степени, фигурирующие в (19), могут создавать из вектора $\Omega$ либо опять $\Omega$, либо состояния с тем или иным числом квантов сортов $y$ или $z$. Эти состояния ортогональны к $a^+_{2x} a^+_{1x} \Omega$. Поскольку мы собираемся ограничиться наинизшим порядком теории возмущений, то можем заменить в (19) $P\exp$ на $P\exp[-i\int dt' \; H'_x(t')]$ и далее всюду опускать индекс $x$.

Интересующий нас переход $\Omega \to a^+_2 a^+_1 \Omega$ состоит в увеличении числа квантов на два. Старые члены взаимодействия $H_{int}$ (первая строка в (20)) могут $\Omega$ перевести только в $\Omega$, т.к. $H_{int}\Omega = 0$. Остальные члены в (20) могут увеличить число квантов на два, но ни один из них сам по себе не приводит к появлению фонона сорта 2. Поэтому в первом порядке теории возмущений амплитуда $A(t)$ равна нулю. Второй порядок

$$(-i)^2 \int_0^t dt_1 \; H'(t_1) \int_0^{t_1} dt_2 \; H'(t_2) \tag{21}$$

дает следующие промежуточные состояния:

а) два фонона сорта 1 (второй член в $H'(t_2)$ , порядок малости $\lambda$);

б) фонон сорта 1 и фотон (третий член в $H'(t_2)$ , порядок $e\lambda$ );

в) два фотона (четвертый член в $H'(t_2)$ , порядок $e^2\lambda$ ).

Далее оператор $H'(t_1)$ в (21) из всех этих состояний может превратить в $a_2^+ a_1^+ \Omega$ только состояния (б) (через посредство первого члена в (20), порядка $e$ , фотон переводится в фонон сорта 2). Это дает вклад в $A(t)$ порядка $e^2\lambda$ . Заметим, что $H'(t_1)$ может перевести (в) в другое возможное состояние $f$ в (3), а именно в $a_2^+ a_6^+(\nu)\Omega$ , но соответствующая амплитуда будет иметь меньший порядок $e^3\lambda$.

Оказывается, что третий порядок теории возмущений тоже дает в $A(t)$ вклад $\sim e^2\lambda$ через такую цепочку состояний:

$$\Omega \to \text{два фонона сорта 1 } (\lambda) \to \text{фонон 1+ фотон } (e) \to \text{фонон 1+} \tag{22}$$
$$+ \text{ фонон } 2\ (e)\,.$$

Таким образом, наиболее вероятный "механизм" появления возбуждения у второго осциллятора таков. Сначала возбуждается первый осциллятор (двукратно или однократно вместе с появлением фотона). Затем с помощью взаимодействия через электромагнитное поле один квант передается атому 2. Итак, мы получаем из (19) следующую формулу для $A(t)$ : модуль $A(t)$ равен модулю выражения

$$\langle a_2^+(0)\, a_1^+(0)\Omega,\ \Big\{-\int_0^t dt_1\, a_2^+(t_1)\,(\bar{E}_2\bar{a})_{t_1} \int_0^{t_1} dt_2 \frac{-i}{2\sqrt{\omega_1(t_2)}}\, a_1^+(t_2)\,(\dot{\bar{\xi}}_1\bar{a}^+)_{t_2} +$$

(23)

$$+i\int_0^t dt_1\, a_2^+(t_1)(\bar{E}_2\bar{a})_{t_1}\int_0^{t_1} dt_2\, a_1(t_2)(\bar{E}_1\bar{a}^+)_{t_2}\int_0^{t_2} dt_3\ \frac{-i\lambda}{2}\, a_1^+(t_3)a_1^+(t_3)\}\Omega\rangle .$$

Под скалярным произведением вида $(\bar{E}_2\bar{a})$ здесь подразумевается

$$(\bar{E}_2\bar{a})_t \equiv \int_0^\infty d\nu \sum_\ell E_2^\ell(\nu,t)\, a_\ell(\nu,t) . \tag{24}$$

С учетом (18) и канонических перестановочных соотношений для $a^+(0)$ и $a(0)$ получаем

$$|A(t)| \cong \Big| \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^\infty d\nu \sum_\ell \Big\{ \frac{i}{2\sqrt{\varkappa_1(t_2)}} \times$$

$$\times E_2^\ell(\nu) \frac{\partial}{\partial t} \xi_1^\ell(\nu,t_2) \exp\Big[i\varkappa_2 t_1 - i\nu t_1 + i\int_0^{t_2} \varkappa_1(t')dt' + i\nu t_2\Big] + \tag{25}$$

$$+ E_2^\ell(\nu) E_1^\ell(\nu,t_2) \exp\Big[i\varkappa_2 t - i\nu t_1 - i\int_0^{t_2} \varkappa_1(t')dt' + i\nu t_2\Big] \times$$

$$\times \int_0^{t_2} dt_3\, \lambda(t_3) \exp\Big[2i\int_0^{t_3} \varkappa_1(t')dt'\Big]\Big\}\Big| .$$

Здесь уже отражен тот факт, что функция $E_2^\ell$ в первом приближении не зависит от $t$ , см. (11). Наличие многократных интегралов по временам ведет к серьезным трудностям при попытке аналитического вычисления $A(t)$ . До сих пор считали, что величина $\lambda = \dot{\varkappa}_1/\varkappa_1$ мала (член, содержащий $\lambda$ , был включен в гамильтониан взаимодействия). Далее будем считать, что не только производная $\partial\varkappa_1/\partial t$ мала, но вообще мало все изменение $\varkappa_1(t)$ в интересующем нас интервале времен $0 < t \lesssim R/c$ , так что $\varkappa_1(t) = \varkappa(1 + \lambda t + \ldots) \cong \varkappa$ . Под $\lambda$ в дальнейшем понимается постоянная, равная $\dot{\varkappa}_1(t)/\varkappa_1(t)$

в точке $t=0$. Теперь имеем

$$\exp\left[i\int_0^t \varkappa(1+\lambda t')dt'\right] = \exp i\varkappa t \cdot \exp i\varkappa\lambda t^2/2 \cong \exp i\varkappa t,$$

если $\varkappa\lambda t^2 \ll 1$ или $\lambda\varkappa R^2 \ll 1$ ввиду $t \lesssim R$. Это условие можно переписать в виде $\lambda \ll \varkappa/(\varkappa R)^2$, так что безразмерная величина $\lambda/\varkappa$ оказывается много меньшей $e^2 = 1/137$ для тех значений $\varkappa R > 100$, для которых мы сможем вычислить $A(t)$. Ввиду малости $\lambda$ функция $E_1^{\ell}(\nu,t)$ из (11) приобретает вид

$$E_1^{\ell}(\nu,t) \cong e\sqrt{\frac{\varkappa}{m}}\ \frac{\nu\sqrt{\nu}}{\nu+\varkappa}\, g(\nu) f_{\ell L}(\nu)\left[1+\frac{\lambda}{2}\,\frac{\nu-\varkappa}{\nu+\varkappa}\,t\right]. \tag{26}$$

Аналогичная формула имеет место для $\partial\xi_1/\partial t$, см. (Б.4). Мы видим, что учет зависимости $E_1$ и $\partial\xi_1/\partial t$ от $t$ означал бы вычисление $A(t)$, являющейся величиной первого порядка по $\lambda$, с точностью до величин порядка $\lambda^2$, т.е. превышение точности использованного порядка теории возмущений. С учетом изложенного имеем

$$\sum_\ell E_2^{\ell}(\nu) E_1^{\ell}(\nu,t) \cong$$

$$\cong \frac{2\sqrt{\varkappa\varkappa_2}}{\pi m R}\, e^2 g^2(\nu)\cdot\frac{\nu^2}{(\nu+\varkappa)(\nu+\varkappa_2)}\left[\sin\nu R + \frac{\cos\nu R}{\nu R} - \frac{\sin\nu R}{(\nu R)^2}\right] \tag{27}$$

(см. (11) и (26)). Используя еще (Б.4) после ряда выкладок получаем

$$|A(t)| = \frac{\lambda}{\varkappa}\ \frac{e^2\sqrt{\varkappa\varkappa_2}}{\pi m R}\,\times$$

$$\times\left|\int_0^\infty d\nu\ \frac{\nu^2 g^2(\nu)}{(\nu+\varkappa)^3(\nu+\varkappa_2)}\left[\sin\nu R + \frac{\cos\nu R}{\nu R} - \frac{\sin\nu R}{(\nu R)^2}\right]\right|, \tag{28}$$

$$\times\left\{-e^{-i\nu t}\frac{\varkappa(\nu+3\varkappa)\exp(i\varkappa_2 t)}{(\nu-\varkappa)(\nu-\varkappa_2)}+\frac{\varkappa(\nu+3\varkappa)}{(\nu-\varkappa)(\nu-\varkappa_2)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\nu+2\varkappa}{\varkappa+\varkappa_2}\left[e^{-i(\varkappa_2+\varkappa)t}-1\right]-\frac{(\nu+\varkappa)^2}{(\nu-\varkappa)(\varkappa_2-\varkappa)}\left[e^{i(\varkappa_2-\varkappa)t}-1\right]\right\}\Bigg|. \tag{28}$$

Функция обрезания далее принята равной $g^2(\nu)=\frac{\mu^2}{\nu^2+\mu^2}$, $\mu\gg\varkappa$. Для расчета в первом неисчезающем приближении обрезание совершенно несущественно, его можно было не вводить (считать $g^2(\nu)=1$ или $\mu^2=\infty$ ).

В §2 работы /2/ описан способ приближенного вычисления интегралов, встречающихся в (28) (контур интегрирования $(0,\infty)$ переводится на лучи, близкие к мнимым полуосям). При условии

$$1\ll\varkappa|t-R|\ll\varkappa R \tag{29}$$

результат вычислений можно представить простым выражением, если выписывать только самые главные члены:

$$|A(t)|\cong\frac{\lambda}{\varkappa}\,\frac{e^2}{mR}\cdot\begin{cases}3/\pi\left[(R-t)\sqrt{\varkappa\varkappa_2}\,\right]^3, & t<R,\ |t-R|\ll R;\\[2mm] \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varkappa_2}{\varkappa}}\cdot\frac{\varkappa^2 g^2(\varkappa)}{(\varkappa_2+\varkappa)(\varkappa_2-\varkappa)}\,v(t), & t>R;\end{cases} \tag{30}$$

$$v(t)=\left|e^{i(\varkappa_2-\varkappa)(t-R)}-\frac{\varkappa_2(\varkappa_2+3\varkappa)\,g^2(\varkappa_2)}{(\varkappa_2+\varkappa)^2\,g^2(\varkappa)}\right|. \tag{31}$$

При $\varkappa_2 = 2\varkappa$ и $g^2(\varkappa_2) \cong g^2(\varkappa)$ функция $v(t)$ осциллирует в пределах от 1/9 до 19/9.

Рассмотрим возможный вклад в $A(t)$ от выброшенных из $H'$ членов, см. начало этого параграфа. Удержим, например, член $E(a_1^+ a_2 + a_1 a_2^+)$ из $H_{int}$, где $E \sim \phi \sim e^2/R^4$ (см. (10) и Приложение Б.). Во втором порядке теории возмущений ( $\Omega \to$ два фонона сорта $1(\lambda)$ $\to$ фонон 1 + фонон 2 $(E)$ ) получим вклад в $A(t)$ порядка $\lambda e^2/R^4$. Он гораздо меньше члена $\lambda e^2/R(R-t)^3$ в (30) при условии $|t-R| \ll R$.

Рассмотрим соответствующую задачу Коши: вначале при $t=0$ возбужден только атом 1, найти вероятность возбуждения 2 к моменту $t>0$. Теперь, конечно, $\varkappa_1$ постоянно. В первом неисчезающем приближении теории возмущений при $\varkappa_2 > \varkappa_1$ и при условиях (29) получим

$$\left| \langle \tilde{a}_2^+ \Omega, e^{-iHt} \tilde{a}_1^+ \Omega \rangle \right| \cong$$

$$\cong \frac{e^2}{mR} \begin{cases} 2/\pi \left[ (R-t)\sqrt{\varkappa_1 \varkappa_2} \right]^3, & t<R, \; |t-R| \ll R; \\ \sqrt{\dfrac{\varkappa_2}{\varkappa_1}} \cdot \dfrac{\varkappa_1^2 g^2(\varkappa_1)}{(\varkappa_2+\varkappa_1)(\varkappa_2-\varkappa_1)} \, u(t), & t>R; \end{cases} \tag{32}$$

$$u(t) = \left| e^{i(\varkappa_2-\varkappa_1)(t-R)} - \frac{\varkappa_2 g^2(\varkappa_2)}{\varkappa_1 g^2(\varkappa_1)} \right| .$$

## §3. Обсуждение эксперимента

Обсудим возможность экспериментальной проверки (30). Рассмотрим отношение $|A|$ в точке $t_- = R/c - \tau$ к $|A|$ в точке $t_+ = R/c + \tau$. Как из (30), так и из (32) при $1 \ll \tau\varkappa \ll R\varkappa$, $\varkappa_2 = 2\varkappa$ и $g^2(\varkappa) \cong 1$, получаем

$$\frac{|A(t_-)|}{|A(t_+)|} \cong \frac{1}{(\varkappa\tau)^3}. \tag{33}$$

Возьмем $\tau = 10/\varkappa$ в качестве наименьшего допустимого $\tau$. Тогда квадрат (33) равняется $10^{-6}$ и с ростом $\tau$ уменьшается как $\tau^{-6}$. Пусть энергия $\varkappa$ соответствует видимому свету $\lambda \sim 1/\varkappa \sim$ $\sim 10^{-5}$ см. Из (33) следует, что очень мала вероятность опережения больше чем на $10^{-14}$ сек. Такие малые опережения в настоящее время не могут быть зарегистрированы. Это одна из причин того, почему эффект не наблюдается в известных непосредственных изменениях скорости света. Примем, что опережение $10^{-9}$ сек еще наблюдаемо. Для получения такого опережения параметр $\sqrt{\varkappa\varkappa_2}$ в формуле $10^{-9}$ сек $= 10/\sqrt{\varkappa\varkappa_2}$ должен соответствовать длине волны $\sim 10$ см: атомы должны обмениваться фотонами радиоволнового диапазона. При этом факт возбуждения атома 2 должен быть зарегистрирован за время, не большее $10^{-9}$ сек. В принципе это может быть сделано с помощью трехуровневой системы-детектора, подробности см. в §6 работы [3].

Как видно, трудность проверки (31) состоит в незначительности опережения и в малости $|A|^2$ при $t < R/c$. Сейчас мы обсудим возможность усиления эффекта.

С.Т. Ма доказал в [7] следующую теорему: если излучающий "ток" 1 зависит от времени так, что его фурье-образ содержит только положительные частоты, то функция распространения фотона $\mathcal{D}_c$ может быть заменена на истинно-причинную функцию $\mathcal{D}_{ret}$. В [3] уже указывалось, что таких токов не может быть в задаче о скорости сигнала: если ток 1 был равен нулю до момента $t=0$, то его спектр не может быть положительно-частотным. Можно ожидать тем бо́льшей акаузальности, чем заметнее представлены отрицательные частоты в спектре тока. И действительно, в нашем случае ток имеет вид $j_1(t) \sim \theta(t)e^{-i\varkappa t-\gamma t}$ (с учетом затухания), и его фурье-образ $i/_{E-\varkappa+i\gamma}$ тем заметнее при отрицательных $E$, чем меньше $\varkappa$. И акаузальность становится заметней при уменьшении частоты $\varkappa$, как мы только что установили. А что будет, если $j_1$ является настолько немонохроматическим, что его частотный спектр даже приближенно не характеризуется какой-либо определенной константой $\varkappa$? Можно думать, что при отсутствии размерного параметра $\varkappa$ в выражении для амплитуды в области $t<R$ вместо безразмерных величин вида $1/\varkappa R$ и $1/\varkappa(t-R)$ могут появляться безразмерные величины вида $t/R$, уже не малые при $t$, сравнимом с $R$. Есть расчеты, подтверждающие это ожидание. Однако они были проделаны только в рамках "голого" формализма. Считая, что это обесценивает их значение, ограничимся изложением результата. Была решена следующая задача. Атом 1 находится до момента $t=0$ на метастáбильном уровне. Он начинает заметно излучать после включения в момент $t=0$ нарастающего магнитного поля, создающего вакантный нижележащий уровень. Главная качественная особенность полученной громоздкой формулы для вероятности $w(t)$ появления возбуждения у атома 2 состоит в том, что $w(t)$ в области времен $\frac{1}{2}\frac{R}{c} < t < \frac{R}{c}$ имеет тот же порядок величины, что и в области $t > R/c$ x/.

x/ Аналогичное явление имеет место и в случае, когда в качестве 1 берется внешний ток $J_1(t) \sim t\cdot\theta(t)$. Однако при этом оказывается, что $w(t)$ при $t > R/c$ не убывает с ростом $R$. Это недопустимо и может интерпретироваться только как указание на незаконность замены атома внешним неизменяющимся током в рассматриваемой задаче.

Мы заключаем, что существенно немонохроматический излучатель, по-видимому, необходим для успеха эксперимента.

## Приложение А

Параметры $\vartheta$, $\omega_1$, $\omega_2$ и функции $\xi_1$, $\xi_2$, с помощью которых "физические" операторы выражаются через "голые", были найдены в /1/ только для случая $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$. В этом приложении они будут приближенно вычислены для любых $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$. Как и в тексте статьи, подразумевается, что все величины имеют индекс $x$ (т.е. индекс первого слагаемого в формуле $H = H_x + H_y + H_z$).

Первая пара исходных уравнений была выписана в /1/ не для функций $\xi_1$, $\xi_2$, а для вспомогательных функций

$$\alpha_i^a(k) = \sqrt{k}\,\left[\,\xi_i^a(k) + \mathcal{E}_i^a(k)\right], \quad i = 1, 2 . \tag{A.1}$$

Это уравнения (27.1) и (27.2) из /1/. В дальнейшем мы будем писать перед номерами уравнений из /1/ цифру $I$. Перепишем (I.27.1) и (I.27.2), явно выделив члены, содержащие множитель $(\omega_1 - \omega_2)\sin\vartheta$, и вставив выражение (I.A.3) для $X_b^a$ :

$$\sum_a \alpha_1^a(\nu)\, C_b^a(\nu) =$$

$$= \nu\sqrt{\nu}\sum_a \left\{ \frac{\mathcal{E}_1^a(\nu)}{\nu+\omega_1} + \frac{(\omega_1-\omega_2)\sin\vartheta\left[\sin\vartheta\,\mathcal{E}_1^a(\nu) + \cos\vartheta\,\mathcal{E}_2^a(\nu)\right]}{(\nu+\omega_1)(\nu+\omega_2)} \right\} C_b^a(\nu) -$$

$$- P\int_0^\infty dk \sum_a \left[\alpha_1^a(k) - \nu\sqrt{k}\,\{\,1\,\}_k^a\right] \frac{\alpha_1^a(k)\beta_1^b(\nu) + \alpha_2^a(k)\beta_2^b(\nu)}{\nu^2 - k^2} ;$$

$$\Sigma_a \alpha_2^a(\nu) C_6^a(\nu) =$$

$$= \nu\sqrt{\nu} \sum_a \left\{ \frac{\mathcal{E}_2^a(\nu)}{\nu+\omega_2} + \frac{(\omega_1-\omega_2)\sin\vartheta\,[\cos\vartheta\, \mathcal{E}_1^a(\nu) + \sin\vartheta\, \mathcal{E}_2^a(\nu)]}{(\nu+\omega_1)(\nu+\omega_2)} \right\} C_6^a(\nu) -$$

$$- P\int_0^\infty dk\, \Sigma_a \left[\alpha_1^a(k) - \nu\sqrt{k}\, \{2\}_k^a\right] \frac{\alpha_1^a(k)\beta_1^a(\nu) + \alpha_2^a(k)\beta_2^b(\nu)}{\nu^2-k^2}. \qquad (A.2)$$

Здесь $\{1\}_k^a$ обозначает функцию, уже выписанную в фигурных скобках в первом члене правой части, но от аргумента $k$, а не $\nu$.

В уравнениях (А.2) фигурируют параметры $\vartheta$, $\omega_1$, $\omega_2$, для которых имеем выражения (I.24), которые могут быть переписаны так:

$$\sin 2\vartheta = 2(S+\xi_{12})/\sqrt{\phantom{x}}\, Sgn \;; \qquad (A.3)$$

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2}\left[(\varkappa_1^2+\xi_{11}) + (\varkappa_2^2+\xi_{22})\right] + \frac{1}{2}\sqrt{\phantom{x}}\, Sgn \;; \qquad (A.4')$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2}\left[(\varkappa_1^2+\xi_{11}) + (\varkappa_2^2+\xi_{22})\right] - \frac{1}{2}\sqrt{\phantom{x}}\, Sgn \;. \qquad (A.4'')$$

$Sgn$ означает знак разности $(\varkappa_1^2+\xi_{11})-(\varkappa_2^2+\xi_{22})$. Если она равна нулю, то $\vartheta = 45^\circ$, см. (I.24), и вместо $\sqrt{\phantom{x}}\,Sgn$ в (А.4) надо вставить $2(S+\xi_{12})$. Далее,

$$S = e^2/R^3 m \quad ;$$

$$\Gamma \equiv \left| \{ [(\varkappa_1^2 + \xi_{11}) - (\varkappa_2^2 + \xi_{22})]^2 + 4(S + \xi_{12})^2 \}^{1/2} \right| ;$$

$$\xi_{ij} = \int_0^\infty k\,dk \sum_a \xi_i^a(k)\, \xi_j^a(k) \quad ; \qquad i,j = 1,2 . \tag{A.5}$$

Параметры $\vartheta$, $\omega_1$, $\omega_2$ зависят от функций $\alpha$ или $\xi$ через посредство величин $\xi_{ij}$. Таким образом, для $\alpha_1^a$, $\alpha_2^a$, $\vartheta$, $\omega_1$, $\omega_2$ имеем систему уравнений: (A.2), (A.3) и (A.4). Будем решать ее следующим методом последовательных приближений.

Объявляем (или угадываем), что выражения

$$\alpha_1^a(\nu) = \frac{\nu\sqrt{\nu}}{\nu + \varkappa_1}\, \varepsilon_1^a(\nu) \quad ; \qquad \alpha_2^a(\nu) = \frac{\nu\sqrt{\nu}}{\nu + \varkappa_2}\, \varepsilon_2^a(\nu) \tag{A.6}$$

суть первые приближения для $\alpha_1^a$ и $\alpha_2^a$ : истинные значения $\alpha$ мало отличаются от (A.6). Докажем это, давая одновременно определение термина "первое приближение".

1 . Выражения (A.6) пропорциональны константе связи $e$ $(e^2 = 1/137)$, поскольку $\varepsilon \sim e$, см. (I.16). Мы будем говорить, что $\alpha$ имеют порядок $e$ : $\alpha_1^a \sim e$ и $\alpha_2^a \sim e$. Из (A.1) следует, что $\xi_1^a \sim e$ и $\xi_2^a \sim e$ тоже:

$$\xi_1^a(\nu) = -\frac{\varkappa_1}{\nu + \varkappa_1}\, \varepsilon_1^a(\nu) \quad ; \qquad \xi_2^a(\nu) = -\frac{\varkappa_2}{\nu + \varkappa_2}\, \varepsilon_2^a(\nu) . \tag{A.7}$$

Тогда, исходя из (A.5), можно показать, что

$$\xi_{11} < e^2 \mathcal{H}_1^2 \cdot 2\mu/3m \quad ; \quad \xi_{22} < e^2 \mathcal{H}_2^2 \cdot 2\mu/3m . \tag{A.8}$$

2. Разность (A.4') и (A.4'') дает $\omega_1^2 - \omega_2^2 = \sqrt{\phantom{x}}\, sgn = \dfrac{2(S+\xi_{12})}{\sin 2\vartheta}$. Использовано (A.3). Это означает, что $(\omega_1^2 - \omega_2^2)\sin 2\vartheta \sim e^2$.

3. Из (A.4) получаем, пренебрегая $\xi_{11}$ и $\xi_{22}$ по сравнению с $\mathcal{H}_1^2$ и $\mathcal{H}_2^2$ на основании (A.8): а) если $\mathcal{H}_1^2 - \mathcal{H}_2^2 \gg 2(S+\xi_{12})$, то $\omega_1^2 \cong \mathcal{H}_1^2$ и $\omega_2^2 \cong \mathcal{H}_2^2$ ; б) если $\mathcal{H}_1^2 - \mathcal{H}_2^2$ того же порядка величины или меньше, чем $2(S+\xi_{12})$, то $\omega_1^2 \cong \omega_2^2 \cong \frac{1}{2}(\mathcal{H}_1^2 + \mathcal{H}_2^2)$. В обоих случаях $\omega_1$ и $\omega_2$ приблизительно равны $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ соответственно, так что $\omega_1 + \omega_2 \cong \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$.

4. По происхождению $2\vartheta$ есть величина, которая изменяется в пределах $(-\pi/2, +\pi/2)$. Поэтому $\cos\vartheta \geq 1/\sqrt{2}$.

5. Из 2), 3) и 4) следует, что $(\omega_1 - \omega_2)\sin\vartheta$ имеет порядок $e$:

$$(\omega_1 - \omega_2)\sin\vartheta \cong (S+\xi_{12}) / (\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2)\cos\vartheta . \tag{A.9}$$

Вычисление величины $(S+\xi_{12})$ показывает [x], что

$$(S+\xi_{12}) \cong \frac{e^2}{R^4} \cdot \frac{8}{\pi m}\left[\frac{1}{\mathcal{H}_1} + \frac{1}{\mathcal{H}_2}\right], \tag{A,10}$$

---

[x] Это вычисление для случая $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ изложено в приложении А к /2/. В /1/ для этой величины приведено неправильное значение $-e^2/mR^3$.

так что на самом деле безразмерная величина $(\omega_1-\omega_2)\sin\vartheta/(\omega_1+\omega_2)$ при $R(\varkappa_1+\varkappa_2)\gg 1$ гораздо меньше, чем $e^2$.

6. С помощью формул приложения А из /1/ убеждаемся, что функции $\beta_1^b$ и $\beta_2^b \sim e$, а функции $C_b^a(\nu)\sim e^0=1$. Поэтому интегралы в правых частях (А.2) [x] суть функции порядка $e^3$. Такого же порядка вторые слагаемые в фигурных скобках в (А.2), поскольку $(\omega_1-\omega_2)\sin\vartheta\sim e^2$. Все эти величины поэтому можно отбросить по сравнению с членами вида $\sum_a \frac{\nu\sqrt{\nu}\ \varepsilon_1^a(\nu)}{\nu+\omega_1} C_b^a(\nu)$ (порядка $e$).

Уравнения (А.2) после этого приобретают вид

$$\sum_a\left[\alpha_1^a(\nu)-\frac{\nu\sqrt{\nu}}{\nu+\omega_1}\ \varepsilon_1^a(\nu)\right]C_b^a(\nu)=0\ ,$$

$$\sum_a\left[\alpha_2^a(\nu)-\frac{\nu\sqrt{\nu}}{\nu+\omega_2}\ \varepsilon_2^a(\nu)\right]C_b^a(\nu)=0\ . \qquad (А.11)$$

Заметим, что вместо $1/\nu+\omega_1$ можно писать $1/\nu+\varkappa_1$, поскольку разность $\omega_1-\varkappa_1\sim e^2$. Детерминант (А.11) не равен нулю. Действительно, его квадрат равен $\bar{C}_1^2\bar{C}_2^2-(\bar{C}_1\cdot\bar{C}_2)^2$ (через $\bar{C}_1$ обозначен вектор с компонентами $C_1^a(\nu)$, $a=1,2$). Громоздкое вычисление этого выражения с помощью формул приложения А из /1/ показывает, что оно не может равняться нулю (но близко к единице). Таким образом, из (А.11) следует (А.6) и мы показали, что поправки к (А.6) действительно малы.

Следующее приближение к (А.6) вычисляется по такой схеме. Имея (А.6), вычисляем $\omega_1$, $\omega_2$ и $\vartheta$ (в первом приближении), а так-

---

[x] В случае модели с одним электроном /8/ было показано, что при наличии обрезания аналогичный интеграл сходится и действительно имеет тот же порядок по $e$, что и подинтегральная функция.

же функции $\beta$ и $C$, фигурирующие в (А.2). Полагаем $\alpha_j^a(k) = \dfrac{k\sqrt{k}\,\mathcal{E}_j^a(k)}{k+\omega_j} + \delta_j^a(k)$. Подставляем все эти выражения в (А.2). Для $\delta_j^a(k)$ получим некое выражение порядка $e^3$. Имея уточненные $\alpha$, можно опять повторить всю процедуру. Однако практические вычислительные трудности вряд ли можно преодолеть даже при нахождении $\delta_j^a(k)$.

Вычислим в первом приближении функции $E_1^b(\nu)$ и $E_2^b(\nu)$, фигурирующие в (I.28). Они равны правым частям уравнений (I.26.1) и (I.26.2) соответственно:

$$E_1^b(\nu) = \sqrt{\frac{\omega_1}{\nu}}\left[\cos\vartheta\cdot\beta_1^b(\nu) + \sin\vartheta\cdot\beta_2^b(\nu)\right],$$

$$E_2^b(\nu) = \sqrt{\frac{\omega_2}{\nu}}\left[-\sin\vartheta\cdot\beta_1^b(\nu) + \cos\vartheta\cdot\beta_2^b(\nu)\right]. \qquad (\text{А.12})$$

По формулам приложения А из /1/ функции $\beta$ выражаются через функции $\zeta$ и $\alpha$, см. (IА.8), (IА.9), (IА.6). В первом приближении следует пренебречь величинами порядка $e^3$ в квадратных скобках в (IА.6). Тогда получим

$$\zeta_1^a = \alpha_2^a/\sigma, \qquad \zeta_2^a = \alpha_1^a/\sigma. \qquad (\text{А.13})$$

После этого получаем простые выражения $\beta_1^b \cong \alpha_1^b$, $\beta_2^b \cong \alpha_2^b$. В случае $|\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2| >> e^2\mathcal{H}_1,\ e^2\mathcal{H}_2$ имеем $\vartheta \cong \varphi \cong 0$, и тогда функции $E_1$ и $E_2$, фигурирующие в (10) (в /1/ они обозначались через $\tilde{E}_1$ и $\tilde{E}_2$), совпадают с (А.12). Из (А.12), $\beta \cong \alpha$, (А.6) и (I.16) получаем для них выражения (11).

## Приложение Б. Вычисление $M = Q^T \dot{P}$

$Q$ и $P$ задаются соотношениями (5) и (7). Непосредственное перемножение $Q^T$ и $\dot{P}$ дает "матрицу" $M_{N_1 N_2}$ :

$$
\begin{pmatrix}
\frac{\lambda}{2}+\sqrt{\Gamma}\,(a_{11}\dot{a}_{22}-a_{21}\dot{a}_{12}) & \sqrt{\Gamma}\,(a_{21}\dot{a}_{11}-a_{11}\dot{a}_{21}) & \int d\kappa \sum\limits_{a}[a_{11}\dot{\xi}_1^a+a_{21}\dot{\xi}_2^a]\sqrt{\frac{\kappa}{\nu_2}}\,\chi \\
\sqrt{\Gamma}\,(a_{12}\dot{a}_{22}-a_{22}\dot{a}_{12}) & \frac{\lambda}{2}+\sqrt{\Gamma}\,(a_{22}\dot{a}_{11}-a_{12}\dot{a}_{21}) & \int d\kappa \sum\limits_{a}[a_{12}\dot{\xi}_1^a+a_{22}\dot{\xi}_2^a]\sqrt{\frac{\kappa}{\nu_2}}\,\chi \\
0 & 0 & \sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_2}}\int d\kappa \sum\limits_{a}\chi(\nu_1 b_1,\kappa a)\,\dot{\chi}(\kappa a,\nu_2 b_2)
\end{pmatrix}
\quad (\text{Б}.1)
$$

Здесь $\sqrt{\Gamma} \equiv \sqrt{\omega_1\omega_2}$ ; $\frac{\lambda}{2} = \frac{\partial}{\partial t}\sqrt{\Gamma}/\sqrt{\Gamma}$ , остальные обозначения см. в (6) и в работе /1/. При получении (Б.1) использовано соотношение $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 1/\sqrt{\Gamma}$.

Оказывается достаточным дать только приближенные выражения для величин, входящих в $M$ , сохраняя только самые главные, наибольшие члены. Выражения для параметров $\vartheta, \phi, \omega_1, \omega_2$ , входящих в $a_{ij}$ , см. (6), были выписаны в приложении А и в /1/. В случае $\mathcal{H}_2 = 2\mathcal{H}$ , $\mathcal{H}_1 \cong \mathcal{H}$ , когда $\mathcal{H}_1^2 - \mathcal{H}_2^2 >> e^2\mathcal{H}$ , угол $\vartheta$ оказывается малым:

$$
\operatorname{tg} 2\vartheta \cong 2\vartheta \cong \frac{e^2}{\pi m R^4} \cdot \frac{16}{\mathcal{H}_1(t)\,\mathcal{H}_2\,[\,\mathcal{H}_1(t) - \mathcal{H}_2\,]} \sim \frac{e^2}{R^4} \; . \quad (\text{Б}.2)
$$

Далее, угол $\phi$ тоже мал: $\phi \cong \vartheta \cdot \frac{\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2}{2}\Big/\sqrt{\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2}$ , см. формулу (36) в /1/. С точностью до величин порядка $e^2\mathcal{H}^2$ имеем $\omega_1^2 \cong \mathcal{H}_1^2$

и $\omega_2^2 \cong \varkappa_2^2$ . Поэтому $\dot\omega_1 \cong \dot\varkappa_1$ , $\dot\omega_2 \cong 0$ и $\frac{\lambda}{2} \cong \dot\varkappa_1/2\varkappa_1$ .

Таким образом, получаем

$$a_{11} \cong 1/\sqrt{\omega_1} \quad ; \quad a_{12} \cong \phi/\sqrt{\omega_1} - \vartheta/\sqrt{\omega_2} \; ;$$
$$a_{21} \cong \vartheta/\sqrt{\omega_1} - \phi/\sqrt{\omega_2} \; ; \quad a_{22} \cong 1/\sqrt{\omega_2} \; . \tag{Б.3}$$

В первом приближении по $e$ $\xi_1$ и $\xi_2$ даются формулами (А.7). В этом приближении $\dot\xi_2^a = 0$ , а

$$\frac{\partial}{\partial t}\xi_1^a(k,t) = \dot\varkappa_1 k\, \xi_1^a(k)/\varkappa_1(k+\varkappa_1) = -\lambda\sqrt{\varkappa_1}\, E_1^a(k,t)/k+\varkappa_1 \, . \tag{Б.4}$$

Наконец, $X(ka, vb)$ в первом приближении просто равно $\delta_{ab}\,\delta(k-v)$.

Для остальных величин в (Б.1) достаточно будет только указать их порядок малости. При вычислении искомой амплитуды $A(t)$ мы принимаем, что $\varkappa R \gg 1$ и что $\lambda$ очень мало: $\lambda/\varkappa \ll 1/(\varkappa R)^2$. Выпишем в порядке убывания три вида малых безразмерных констант, которые у нас фигурируют: $e^2$ , $\lambda/\varkappa$ и $\vartheta$ (константа $\vartheta$ согласно (Б.2) гораздо меньше, чем $e^2$ и $\lambda/\varkappa$ : $\vartheta \sim e^2/mR(\varkappa R)^3$.

Вычисления показывают, что

$$\dot\vartheta \sim \dot\phi \sim \lambda\vartheta \, ; \qquad \dot\omega_2 \sim \lambda\varkappa\vartheta^2 ; \qquad \dot X \sim \lambda e^2 \, . \tag{Б.5}$$

Запишем результирующее выражение для $M$ :

$$\begin{vmatrix} \lambda/2 & \lambda\phi/2 + \dot\phi + \dot\vartheta\sqrt{\omega_2/\omega_1} & \dot\xi_1^{b_2}(v_2)/\sqrt{\omega_1} \\ \lambda\phi/2 + \dot\vartheta\sqrt{\omega_1/\omega_2} - \dot\phi & \sim \lambda\vartheta^2 & (\phi/\sqrt{\omega_1} - \vartheta/\sqrt{\omega_2})\,\dot\xi_1^{b_2}(v_2) \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{v_1}{v_2}}\;\dot X(v_1 b_1 ; v_2 b_2) \end{vmatrix} \tag{Б.6}$$

Из всех выписанных элементов в выражение (20) из § 2 входят только $M_{11}$, $M_{1\nu_2}$ и $M_{\nu_1,\nu_2}$.

## Литература


1. И.А. Еганова, М.И. Широков. Препринт ОИЯИ, Р2-4645, Дубна, 1969.
2. И.А. Еганова. Препринт ОИЯИ, Р2- 4936, Дубна, 1970.
3. М.И. Широков. Препринт ОИЯИ, Р-1719, Дубна, 1964.
4. Д.И. Блохинцев. УФН, 61, 137 (1957);
   Suppl. Nuovo Cim., 3, 629 (1956).
   Дао Вонг Дык, Нгуен Ван Хьеу. Теоретическая и математическая физика, 2, 55 (1970).
5. Д.А. Киржниц, В.Л. Поляченко. ЖЭТФ, 46, 755 (1964).
6. G.Velo, D.Zwanziger. Phys. Rev., 186, 1337 (1969).
7. S.T.Ma. Nucl.Phys., 7, 163, (1958).
8. И.А. Еганова, М.И. Широков. ЯФ, 9, 1097 (1969).



Рукопись поступила в издательский отдел
19 августа 1970 года.

Широков М.И. P2-5338

К вопросу о скорости фотона

Рассматривается задача о скорости передачи возбуждения от атома-источника 1 к атому-детектору 2 в модели, близкой к квантовой электродинамике. Первоначально 1 и 2 находятся в основном состоянии, а затем 1 возбуждается внешним полем. Задача решена в первом неисчезающем приближении теории возмущений с помощью операторов рождения-уничтожения, вакуумный вектор которых совпадает с физическим вакуумом.

Результат аналогичен результату решения сходной задачи Коши (первоначально возбужден только атом 1): вероятность передать сигнал со скоростью, несколько превышающей скорость света $C$, не равна нулю. Этот акаузальный эффект мал, но, по-видимому, может быть усилен и зарегистрирован.

**Препринт Объединенного института ядерных исследований.**
**Дубна, 1970**

Shirokov M.I. P2-5338

On the Photon Velocity

Transfer of the excitation from atom-source 1 to atom-detector 2 in the model close to quantum electrodynamics is considered. Initially 1 and 2 are in the ground state, then 1 is excited by the external field. The problem is solved in the first nonvanishing approximation of the perturbation theory using the production-annihilation operators, the vacuum vector of which coincides with the physical vacuum.

The result is analogous to the result of the solution of the similar Cauchy problem (initially only atom 1 is excited): the probability of the signal transfer with the velocity, somewhat exceeding the light velocity C, is not equal to 0. This acausal effect is small, but probably, can be enhanced and detected.

**Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.**
**Dubna, 1970**