С323.1
А-92

3/I-1971

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 5336

А. Атанасов

К ВОПРОСУ О СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЯХ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТРЕХЧАСТИЧНОЙ СИСТЕМЫ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1970

Атанасов А.

P2-5336

К вопросу о связанных состояниях релятивистской трехчастичной системы

В квазипотенциальном подходе проблема определения масс связанных состояний релятивистской трехчастичной системы с квазипарными взаимодействиями сводится к анализу собственных значений эрмитового оператора. При некоторых предположениях относительно двухчастичного взаимодействия получена оценка для верхнего предела числа связанных состояний и алгоритма приближенного вычисления масс связанных состояний.

Сообщения Объединенного института ядерных исследований

Дубна, 1970

Atanasov A.

P2-5336

On the Bound States of the Relativistic Three-Particle System

In the quasipotential approach the problem of determination of the bound state masses in the three-particle system with the quasi-pair interaction is reduced to the analysis of the eigenvalues of the Hermitian operator. Under some assumptions concerning two-particle interaction an estimate is obtained for the upper limit of the bound state number and for the algorithm of the approximate calculation of the bound state masses.

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.

Dubna, 1970

Р2 - 5336

А. Атанасов

К ВОПРОСУ О СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЯХ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТРЕХЧАСТИЧНОЙ СИСТЕМЫ

§1. Введение

В квантовой теории поля задача трех частиц описывается системой трех интегральных уравнений /1/, которые аналогичны уравнениям Фаддеева в нерелятивистской квантовой механике. Определение энергий связанных состояний сводится к определению параметра E, при котором соответствующая однородная система имеет решение. Точное решение этой проблемы связано с большими математическими трудностями. Поэтому приходится искать некоторые другие характеристики спектра и способы приближенной оценки масс связанных состояний.

В настоящей работе предлагается способ определения верхнего предела числа связанных состояний и алгоритма приближенного определения масс таких состояний в самой простой модели трехчастичной системы в квазипотенциальном подходе /2,3/. Получено уравнение, аналогичное нерелятивистскому уравнению Шредингера. При использовании подходящего преобразования оно сводится к эквивалентному уравнению с эрмитовым квадратично интегрируемым ядром. Следуя работе /4,5/, мы будем применять метод, который ранее применяли в нерелятивистской теории трехчастичной системы.

В §2 получено уравнение, собственные значения которого рассматриваются как функции масс связанных состояний трехчастичной системы. Оценка числа связанных состояний и алгоритма определения их масс дается в §3.

§2. Уравнение на собственные значения трехчастичной релятивистской системы

Рассмотрим систему трех скалярных полей с массами m_1, m_2 и m_3, взаимодействующих между собой через поле массы μ. Трехчастичная функция Грина

$$\hat{G} = \langle 0 \,|\, T(\Psi_1(x_1)\Psi_2(x_2)\Psi_3(x_3)\bar{\Psi}_1(y_1)\bar{\Psi}_2(y_2)\bar{\Psi}_3(y_3)) \,|\, 0 \rangle \tag{1}$$

удовлетворяет уравнению Бете-Солпитера

$$\hat{G} = \hat{G}_0 + \hat{G}_0\hat{K}\hat{G}, \tag{2}$$

где $\hat{G}_0$ – функция распространения трех невзаимодействующих частиц, $\hat{K}$ – сумма всех неприводимых трехчастичных диаграмм. Двухвременная функция Грина, определенная равенством

$$G = G(t, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \,;\, t', \vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3) =$$

$$= \langle 0 \,|\, T(\Psi_1(x_1)\Psi_2(x_2)\Psi_3(x_3)\bar{\Psi}_1(y_1)\bar{\Psi}_2(y_2)\bar{\Psi}_3(y_3)) \,|\, 0 \rangle \Big|_{\substack{x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = t \\ y_1^0 = y_2^0 = y_3^0 = t'}} \tag{3}$$

удовлетворяет уравнению

$$G = G_0 + G_0 K G, \tag{4}$$

где G_0 – двухвременная функция распространения трех невзаимодействующих частиц, а оператор K определяется равенством

$$(\hat{G}_0\hat{K}\hat{G})\Big|_{\substack{x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = t \\ y_1^0 = y_2^0 = y_3^0 = t'}} = G_0 K G \,. \tag{5}$$

Ядро $\hat{K}$ можно представить в виде

$$\hat{K} = \hat{K}_1 + \hat{K}_2 + \hat{K}_3 + \hat{K}_T , \qquad (6)$$

где $\hat{K}_\alpha$ – сумма всех неприводимых несвязанных диаграмм, когда α-ая частица проходит без взаимодействия, $\hat{K}_T$ – сумма всех неприводимых связанных диаграмм. Каждый член можно представить как произведение

$$\hat{K}_\alpha (x_\alpha, x_\beta, x_\gamma; y_\alpha, y_\beta, y_\gamma) = S_\alpha^{-1} (x_\alpha - y_\alpha) K_\alpha^{(2)} (x_\beta, x_\gamma; y_\beta, y_\gamma), \qquad (7)$$

причем $S_\alpha (x_\alpha - y_\alpha)$ – пропагатор α-ой частицы, $K_\alpha^{(2)}$ – ядро уравнения Бете–Солпитера для двухчастичной функции распространения $G_\alpha^{(2)}(x_\beta, x_\gamma; y_\beta, y_\gamma)$ – подсистемы (β, γ). Аналогично уравнению (6), ядро K можно представить в виде

$$K = K_1 + K_2 + K_3 + K_T, \qquad (8)$$

где K_α определяется равенством

$$G_\alpha = G_0 + G_0 K_\alpha G_\alpha , \qquad (9)$$

а G_α – двухчастичная функция Грина:

$$G_\alpha = G_\alpha (x_\alpha, x_\beta; x_\gamma; y_\alpha, y_\beta, y_\gamma) = S_\alpha (x_\alpha - y_\alpha) G_\alpha^{(2)} (x_\beta, x_\gamma; y_\beta, y_\gamma).$$

В квазипарном приближении ядро K можно представить как сумму

$$K = K_1 + K_2 + K_3 . \qquad (10)$$

Мы рассмотрим самую простую модель, когда частицы взаимодействуют между собой путем обмена скалярного мезона в лестничном приближении. В этом случае, так как имеется мгновенное взаимодействие, ядро K совпадает с квазипотенциалом, определенным равенством

$$G^{-1} = G_0^{-1} - V. \tag{11}$$

Если в системе центра масс трех частиц ввести трехмерный относительный импульс подсистемы (β, γ):

$$q_\alpha = \frac{1}{m_\beta + m_\gamma}[m_\beta p_\gamma - p_\beta m_\gamma], \tag{12}$$

где $p_\alpha (\alpha = 1,2,3)$ – трехмерные импульсы частиц с массами m_α, то ядро V_α можно представить в виде

$$V_\alpha (q_\alpha, p_\alpha; q_\alpha', p_\alpha') = \frac{g^2}{4(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{(q_\alpha - q_\alpha')^2 + \mu^2} \delta^{(3)}(p_\alpha - p_\alpha'). \tag{13}$$

Используя представление (13), можно показать, что ядра V_α являются положительно определенными, эрмитовыми и с ограниченной нормой

$$\| V_\alpha \| = \operatorname{Sup} \frac{|(\phi, V_\alpha \Psi)|}{\|\phi\| \; \|\Psi\|}. \tag{14}$$

Рассмотрим уравнения, характеризующие связанные состояния трех частиц в импульсном представлении, которые получены в работе /3/:

$$G_0^{-1} \Psi_B = V \Psi_B, \quad \Psi_B^* G_0^{-1} = \Psi_B^* V. \tag{15}$$

В квазипарном приближении уравнения (15) не относятся к типу Гильберта–Шмидта, так как в подинтегральном выражении $Sp[(G_0 V)(G_0 V)^+]$ появляются члены типа $[\delta^{(3)}(p_\alpha - p_\alpha')]$, которые получаются вследствие присутствия несвязанных диаграмм (рис. 1). Соответствующее интегральное уравнение является существенно сингулярным, и ни один из известных методов теории интегральных уравнений к нему неприменим. Поэтому мы преобразуем уравнение (15) в эквивалентное ему, которое будет иметь хорошее ядро.

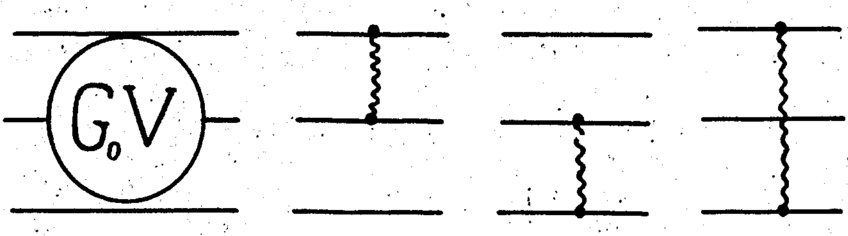

Рис. 1

Представим в первом уравнении (15) V в виде $V = V_1 + V_2 + V_3$. Если в полученное уравнение

$$\left(\sum_{a=1}^{3} V_a\right) \Psi_B = G_0^{-1} \Psi_B \tag{16}$$

подставить G_0^{-1} из уравнения (9), получаем:

$$V_a \Psi_B = V_a G_a (V_\beta + V_\gamma) \Psi_B . \tag{17}$$

Суммируя уравнения (17) с учетом (16), получаем новое уравнение для Ψ_B :

$$\Psi_B = I \Psi_B , \tag{18}$$

где I есть оператор

$$I = \sum_a \sum_{\beta \neq \gamma} G_0 V_a G_a V_\beta . \tag{19}$$

Уравнение (19) является аналогом уравнения Вайнберга /6/, описывающего связанные состояния нерелятивистской трехчастичной системы. В ядре этого уравнения несвязанные диаграммы отсутствуют (рис. 2).

Мы покажем, что определенный так оператор, при выбранном предположении относительно взаимодействия между частицами, представляет ядро Гильберта-Шмидта. Для этого нужно установить, что каждый член $G_0 V_a G_a V_\beta$ является оператором Гильберта-Шмидта. Оператор G_a

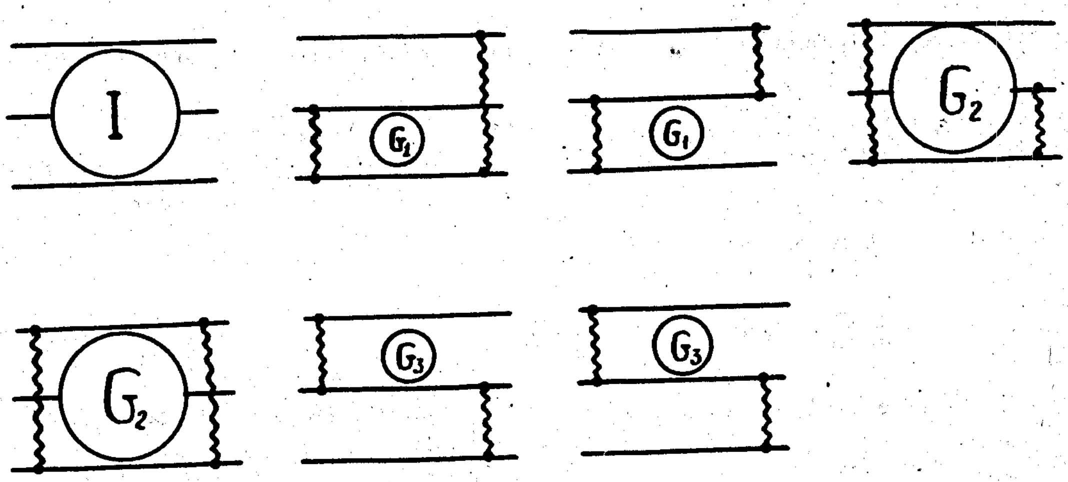

Рис. 2

удовлетворяет уравнению (9), ядро которого квадратично интегрируемо, так как для нормы Гильберта-Шмидта выполнено условие

$$\| G_0 V_\alpha \|_2 \leq \| G_0 \|_2 \| V_\alpha \|, \tag{20}$$

оператор

$$G_0 = -\pi^2 \frac{\omega_1(p_1)+\omega_2(p_2)+\omega_3(p_3)}{\omega_1(p_1)\,\omega_2(p_2)\,\omega_3(p_3)} \cdot \frac{\delta(p_1-p_1')\,\delta(p_2-p_2')\,\delta(p_3-p_3')}{M^2-[\omega_1(p_1)+\omega_2(p_2)+\omega_3(p_3)]^2} \tag{21}$$

$$\omega_i = \sqrt{m_i^2 + p_i^2}$$

квадратично интегрируем, и V_α обладает ограниченной нормой. Следовательно, согласно теореме (С-7) /6/, оператор G_α - ограничен. Для каждого члена суммы (19) получаем оценку,

$$\| G_0 V_\alpha G_\alpha V_\beta \|_2 \leq \| G_0 \|_2 \| V_\alpha \| \| G_\alpha \| \| V_\beta \| \tag{22}$$

и, разумеется, операторы $G_0 V_\alpha G_\alpha V_\beta$ и их сумма будут операторами Гильберта-Шмидта.

Аналогично нерелятивистскому случаю /4,5/, можно показать, что ядро I представимо в виде

$$I = 1-\left(\sum_{\alpha=1}^{3} G_\alpha - 2G_0\right)\left(G_0^{-1} - \sum_{\beta=1}^{3} V_\beta\right) = 1 - A\left(G_0^{-1} - \sum_{\beta=1}^{3} V_\beta\right), \tag{23}$$

где

$$A = \sum_{\alpha=1}^{3} G_\alpha - 2G_0 = G_3 + \sum_{\alpha\neq 3} G_0 V_\alpha G_0 + \sum_{\alpha\neq 3} G_0 V_\alpha G_\alpha V_\alpha G_0 \tag{24}$$

является эрмитовым положительно определенным оператором.

Если в уравнении (18) положим $\Psi_B = A^{1/2}\phi$, получаем уравнение

$$\phi = D\phi, \tag{25}$$

где $D = A^{-1/2} I A^{1/2}$ – эрмитовый оператор с квадратичноинтегрируемым ядром, зависящим от параметра M.

§3. Определение верхнего предела числа связанных состояния и масс связанных состояний

Рассмотрим уравнения

$$D\phi_i = \mu_i \phi_i, \tag{26}$$

решения которых, соответствующие собственным значениям $\mu_i = 1$, совпадают с решениями уравнения (25). Уравнение с ядром данного типа имеет собственные значения, μ_i, которые образуют последовательность вещественных чисел, предельная точка которых есть ноль. Из уравнения

$$<\Phi_i|[(1-\mu_i)A^{-1} - (G_0^{-1} - V)]|\Phi_i> = 0 \tag{27}$$

после дифференцирования получаем

$$<\Phi_i|A^{-1}|\Phi_i> \frac{d\mu_i}{dM} = 2M <\Phi_i|\pi^2 \frac{\omega_1(p_1)\omega_2(p_2)\omega_3(p_3)}{\omega_1(p_1)+\omega_2(p_2)+\omega_3(p_3)}|\Phi_i> + \tag{28}$$

$$+(1-\mu_i)<\Phi_i|\frac{dA^{-1}}{dM}|\Phi_i>.$$

Обозначим через M' самую большую массу связанных состояний. При изменении параметра M в интервале $0 < M \le M' < m_1 + m_2 + m_3$, когда он переходит через значения, для которых $\mu_i = 1$, $\frac{d\mu_i}{dM} > 0$, т.е. μ_1 переходит через единицу в положительную сторону. Следовательно, число связанных состояний равно числу μ_1, которые больше единицы. Это число меньше, чем $\sum\limits_{l=1}^{\infty} \mu_l^2 = \mathrm{Sp}\,[D(M')]^2$ и

$$N(M) < \mathrm{Sp}\,[D(M')]^2 = \mathrm{Sp}\,[I(M')]^2. \tag{29}$$

Остается открытым проблема о значениях параметра M для соответствующих связанных состояний.

Для того чтобы получить приближенные уравнения для спектра масс, образуем шпур $2n$-той степени оператора D

$$A_{2n} = \mathrm{Sp}\,D^{2n} = \mathrm{Sp}\,I^{2n}. \tag{30}$$

Обозначим множество переменных p_1, p_2, p_3 через q и $dp_1 dp_2 dp_3$ через dq. В импульсном представлении $2n$-той шпур ядра I представим в виде

$$A_{2n} = \int I^{2n}(q,q)\,dq, \tag{31}$$

где

$$I^{2n}(q,q') = \int \cdots \int I(q,q_1)\,I(q_1,q_2)\cdots I(q_{2n-1},q')\,dq_1 \ldots dq_{2n-1}. \tag{32}$$

В общем случае вычисление A_{2n} является трудной задачей, и обычно приходится использовать сепарабельное приближение. Так как мы доказали,что оператор I относится к типу Гильберта-Шмидта,. то его можно представить в виде:

$$I(q,q') = \sum_{k=1}^{m} U_k(q) W_k(q'). \tag{33}$$

Для шпура A_{2n} в этом случае получаем

$$A_{2n} = \sum_{k_1 k_2 \ldots k_{2n}=1}^{m} \Gamma_{k_1 k_{2n}} \Gamma_{k_2 k_1} \ldots \Gamma_{k_{2n} k_{2n-1}}, \tag{34}$$

где

$$\Gamma_{k\ell} = \int U_k(q) W_\ell(q) dq. \tag{35}$$

Если вместо чисел μ_i ввести их обратные значения $\lambda_i = \frac{1}{\mu_i}$, шпуры с четными индексами A_{2n} можно представить в виде

$$A_{2n} = \mathrm{Sp}\, D^{2n} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{2n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i^{2n}}. \tag{36}$$

Пусть собственному значению λ_1 соответствует p линейно независимых собственных функций, а числу $-\lambda_1$, если оно тоже собственное значение, будет соответствовать q линейно независимых собственных функций. Следовательно, в ряде (36) член с λ_1 содержится $r = p + q$ раз. При этих предположениях ряд представим в виде:

$$A_{2n} = \frac{r}{\lambda_1^{2n}} (1 + \epsilon_n), \tag{37}$$

где через ϵ_n обозначена величина

$$\epsilon_n = \frac{1}{r} \sum_{i=r+1}^{n} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)^{2n}. \tag{38}$$

Примем, что собственные значения расположены в порядке возрастания, т.е. $|\lambda_i| > |\lambda_1|$ при $i > r$, тогда $\epsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Для A_{2n+2} аналогично равенству (37), получаем:

$$A_{2n+2} = \frac{r}{\lambda_1^{2n+2}} (1 + \epsilon_{n+1}). \qquad (39)$$

Деля почленно (37) на (39), получаем выражение для

$$\lambda_1 = \lim \left(\frac{A_{2n}}{A_{2n+2}} \right)^{1/2}. \qquad (40)$$

Если n в уравнении (40) растет неограниченно, то

$$\lambda_1 = \lim \left(\frac{A_{2n}}{A_{2n+2}} \right)^{1/2}. \qquad (41)$$

Учитывая вид оператора D, для A_{2n} получим.

$$A_{2n} = Sp\,D^{2n} = Sp(A^{-1/2}\, I^{2n} A^{1/2}) = Sp\,I^{2n} \qquad (42)$$

и

$$\lambda_1 = \lim \left(\frac{Sp\,I^{2n}}{Sp\,I^{2n+2}} \right)^{1/2}. \qquad (43)$$

Из уравнения

$$\lambda_1(M) = 1,$$

где $\lambda_1(M)$ определяется из (42), получаем значения параметра M, для которых уравнение (18) имеет отличные от ноля решения. Эти значения M являются массами связанных состояний трехчастичной релятивистской системы. Зная $\lambda_1(M)$, мы можем определить собственное значение $\lambda_2(M)$ уравнения (26), как показано в работе /5/ для нерелятивистской задачи. Этот способ можно продолжить и для следующих собственных значений, и, таким образом, получаем возможность для определения полного спектра масс связанных состояний трехчастичной релятивистской системы.

§4. Заключение

Предлагаемый метод отличается от известных способов определения масс связанных состояний трехчастичной релятивистской системы. В нем не используется разложение по константе связи, причем не нужны собственные функции как при вариационном методе. Этот способ легко можно обобщить и для системы с произвольным числом частиц.

Автор выражает глубокую благодарность за плодотворные обсуждения Г.М. Десимирову, Д.С. Стоянову, Р.Н. Фаустову, В.И. Журавлеву.

Литература

1. D.Ts. Stoyanov, A.N. Tavkhelidze. Phys.Lett., 13, 76 (1964).
2. Р.Н. Фаустов. ЖТМФ, 3, 240 (1970).
3. А.Н. Квинихидзе, Д.Ц. Стоянов. Препринт ОИЯИ, Р4-4814, Дубна, 1969.
4. G.C. Girardi and H.Rimini. Nuovo Cimento, 37, 450 (1965).
5. A. Atanasov. Acta Phys.Polonica, A37, 337 (1970).
6. S. Weinberg. Phys.Rev., 133, B 232 (1964).

Рукопись поступила в издательский отдел
19 августа 1970 года.