СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 5313

В.Н. Стрельцов

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

О ГРУППОВЫХ СВОЙСТВАХ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

1970

P2 - 5313

В.Н. Стрельцов

О ГРУППОВЫХ СВОЙСТВАХ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ*

* В порядке обсуждения

1. Прежде чем перейти к непосредственному рассмотрению вопроса, сформулированного в заглавии, необходимо коснуться процедуры вывода нерелятивистских преобразований /1/ и преобразований Галилея из преобразований Лоренца.

Так, для того чтобы прийти к преобразованиям Галилея, отбросим в формулах Лоренца

$$x' = \frac{x - \beta c t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t' = \frac{t - (\beta/c)x}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

где $\beta = v/c$, члены β^2 под радикалами. При этом будем иметь

$$x' = x - \beta c t, \quad t' = t - \frac{\beta}{c} x \qquad (1)$$

или

$$x' = x\,(1 - \beta \frac{t}{x} c)$$

$$\text{и} \quad t' = t\,(1 - \beta \frac{x}{t} \frac{1}{c}). \qquad (2)$$

В каком случае из полученных таким образом формул (1) и (2) будут вытекать преобразования Галилея?

Очевидно, что это будет иметь место только тогда, когда отношения x/t будут подчиняться определенному условию:

$$x / t \ll c$$

или, в частности, с учетом того, что в Галилеевом приближении β -малая величина $(\beta \ll 1)$ -условию:

$$\frac{x}{t} \approx \beta c.$$

В этом случае второй член в скобках в формуле (1) будет по порядку величины равен 1, а аналогичный член в (2) – β^2. Поэтому последним членом можно пренебречь, и мы придем к формулам Галилея.

С другой стороны, если

$$\frac{x}{t} \approx c \qquad \text{или} \qquad \frac{x}{t} \gg c ,$$

то переход к формулам Галилея будет, очевидно, невозможен.

Отсюда вытекает важное следствие. Коль скоро преобразования Галилея являются предельным случаем преобразований Лоренца, то и в общем случае специальная теория относительности должна описывать только пары времени – подобных событий.

После вышеизложенных рассуждений становится также понятным, что если мы хотим сохранить члены порядка β^2 (нерелятивистское приближение), то мы должны взять преобразования в форме

$$x' = (x - \beta ct)(1 + \frac{1}{2}\beta^2), \tag{3}$$

$$t' = t(1 + \frac{1}{2}\beta^2) - \frac{\beta}{c}x . \tag{4}$$

При этом мы никогда не должны забывать, что нерелятивистские преобразования являются приближенными, и обращение с ними требует известной осторожности. В частности, во всех математических процедурах следует учитывать, какие члены малы (порядка β^4) и отбрасывать их.

Выписанные ниже условные равенства (справедливые с точностью до членов порядка β^4):

$$t(1 + \ell_1\beta^2) + \ell_2\frac{\beta}{c}x(1 + \ell_3\beta_1\beta) = t(1 + \ell_1\beta^2) + \ell_2\frac{\beta}{c}x , \tag{N_1}$$

$$(1 + \ell_4\beta^2)(1 + \ell_5\beta_1\beta)(1 + \ell_6\beta_2^2) = 1 + \ell_4\beta^2 + \ell_5\beta_1\beta + \ell_6\beta_2^2 , \tag{N_2}$$

$$(1 + \ell_7\beta_1\beta_2 + \ell_8\beta^2)^{-1} = 1 - \ell_7\beta_1\beta - \ell_8\beta^2 , \tag{N_3}$$

где ℓ_n -числовые коэффициенты порядка 1 (по модулю), а $\beta_1 \approx \beta_2 \approx \beta$. помогут нам в этом.

Отметим здесь, что, например, при написании равенства (N_1) , мы учли, что отношение члена $\ell_2\ell_3(\beta^2\beta_1/c)x$ к t (максимальному члену) равно по порядку величины β^4 . После этого замечания другие два равенства, очевидно, пояснений не требуют.

Теперь мы имеем все необходимое, чтобы перейти к рассмотрению групповых свойств нерелятивистских преобразований.

2. Покажем сначала, что произведение двух специальных нерелятивистских преобразований (3), (4) и

$$x'' = (x' - \beta_1 c t')(1 + \frac{1}{2}\beta_1^2), \tag{3'}$$

$$t'' = t'(1 + \frac{1}{2}\beta_1^2) - \frac{\beta_1}{c}x \tag{4'}$$

с параметрами β и β_1 является также нерелятивистским преобразованием с параметром $\beta_2 = (\beta + \beta_1)(1 - \beta\beta_1)$.

Подставим для этого (3) и (4) в формулу (3').

При этом будем иметь:

$$x'' = [x(1 + \beta_1\beta + \frac{1}{2}\beta^2) - (\beta_1 + \beta)ct(1 + \frac{1}{2}\beta^2)](1 + \frac{1}{2}\beta_1^2),$$

откуда с учетом (N_2) и (N_3) получим последовательно

$$x'' = [\,x-(\beta+\beta_1)\,ct(1+\frac{1}{2}\beta^2)(1-\beta\beta_1-\frac{1}{2}\beta^2)\,]\,(1+\frac{1}{2}\beta_1^2)(1+\beta\beta_1+\frac{1}{2}\beta^2)=$$

$$=[\,x-(\beta+\beta_1)\,ct\,(1-\beta_1\beta)\,][\,1+\frac{1}{2}(\beta+\beta_1)^2\,]=$$

$$=(x-\beta_2\,ct)(1+\frac{1}{2}\beta_2^2).$$

Здесь мы также учли, что в нерелятивистском приближении $1+\beta_2^2/2 = 1+(\beta+\beta_1)^2/2$.

Подставив затем (3) и (4) в формулу (4'), будем иметь:

$$t'' = t\,(1+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{1}{2}\beta_1^2+\beta\beta_1)-\frac{1}{c}\,x\,(\beta_1+\beta+\frac{1}{2}\beta\beta_1^2+\frac{1}{2}\beta_1\beta^2).$$

Отсюда с учетом (N_1) получим

$$t'' = t\,(1+\frac{1}{2}\beta_2^2)-\frac{\beta+\beta_1}{2}\,x = t\,(1+\frac{1}{2}\beta_2^2)-\frac{\beta_2}{c}x\ .$$

Таким образом, основное условие группы оказывается выполненным.

Что касается ассоциативного закона, то его справедливость легко проверяется на основании рассуждений, аналогичных вышеизложенным.

Перейдем теперь к доказательству существования обратных элементов группы.

Для этого наряду с преобразованиями (3) и (4) рассмотрим обратные им преобразования

$$x=(x'+\beta\,ct)(1+\frac{1}{2}\beta^2), \qquad (5)$$

$$t=t'(1+\frac{1}{2}\beta^2)+\frac{\beta}{c}x \qquad (6)$$

и покажем, что их произведение приводит к тождественному преобразованию, т.е. равно единичному элементу группы.

Подставив (5) и (6) в (3) и воспользовавшись равенством (N_2) , получим

$$x'=x'(1+\frac{1}{2}\beta^2-\beta^2)(1+\frac{1}{2}\beta^2)=x'(1-\frac{1}{4}\beta^4)=x'.$$

Аналогичным образом для t' будем иметь

$$t'=t'(1-\frac{1}{2}\beta^2)(1+\frac{1}{2}\beta^2)=t'.$$

Таким образом, можно считать доказанным, что совокупность (однородных) специальных нерелятивистских преобразований образует группу.

Впрочем, этого и следовало ожидать, потому что нерелятивистские преобразования являются промежуточными между преобразованиями Лоренца и Галилея, определяющими соответствующие группы.

Литература

1. В.Н. Стрельцов. Сообщение ОИЯИ, Р2-4461, Дубна (1969).

Рукопись поступила в издательский отдел
5 августа 1970 года.