СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 5305

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Р.П. Зайков, Ч.Д. Палев

ПРИМЕР БЕСКОНЕЧНОКОМПОНЕНТНОГО ЛОКАЛЬНОГО ПОЛЯ С МАССОВЫМ СПЕКТРОМ

1970

Р2 - 5305

Р.П. Зайков, Ч.Д. Палев

ПРИМЕР БЕСКОНЕЧНОКОМПОНЕНТНОГО ЛОКАЛЬНОГО ПОЛЯ С МАССОВЫМ СПЕКТРОМ

В работах [1,2,3] показано, что невозможно построить локальную теорию с нетривиальным массовым спектром для полей, преобразующихся по бесконечномерным неприводимым представлениям группы $SL(2,C)$, и что эта трудность не возникает в случае конечнокомпонентных полей. Примеры нелокальных бесконечнокомпонентных полей, построенных из конечнокомпонентных полей, рассматривались в ряде работ (см., например, [4]). В работе [5] конечнокомпонентные поля объединялись в одно бесконечнокомпонентное локальное поле. В этом случае, однако, это поле не преобразуется по неприводимому представлению более широкой группы.

В последнее время интерес к бесконечнокомпонентным полям появился также в связи с представлением Венециано для амплитуды рассеяния [7,8].

В настоящей работе показано, что существуют локальные бесконечнокомпонентные поля с нетривиальным массовым спектром, которые преобразуются по неприводимым представлениям симплектической группы $Sp(4)$. Для этой цели используются результаты, полученные в работах [3,6]. Всюду в этой работе мы придерживаемся обозначений, используемых в [3].

2. Мы рассматриваем поле $\psi(x)$, преобразующееся по таким неприводимым представлениям группы $Sp(4)$, для которых представление подгруппы $SL(2,C)$ приводимо и распадается в бесконечную прямую сумму конечномерных представлений (см., например, [6]).

Поле $\psi_N(x,z)$, преобразующееся по выбранному неприводимому представлению группы $Sp(4)$, представим в виде прямой суммы полей $\psi_{\ell_0 n}(x,z)$, где $n = 0,1,2,\dots,$ а ℓ_0 – произвольное целое или полуцелое число. Каждое поле $\psi_{\ell_0 n}$ преобразуется по неприводимому конечномерному представлению $[\ell_0, |\ell_0| + n]$ подгруппы $SL(2,C)$ и реализуется в виде однородных полиномов степени $|\ell_0|+\ell_0+n-1, |\ell_0|-\ell_0+n-1$ комплексных спиноров $z=(z_1, z_2)$ и $\bar{z}=(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$, соответственно.

В пространстве представления генераторы Γ^μ, $\mu=0,1,2,3$, которые вместе с генераторами $M^{\mu\nu}$ (см. /3/) группы $SL(2,C)$ определяют алгебру $Sp(4)$, имеют вид:

$$\Gamma^\mu = \frac{i}{2}\left(g^{\mu\mu}\, z\sigma^\mu \bar{z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\sigma^\mu \frac{\partial}{\partial z} \right). \tag{1}$$

Неприводимое представление, по которому преобразуется поле $\psi_N(x,z)$, полностью определяется значением квадратичного оператора Казимира

$$K = \frac{1}{2} M^{\mu\nu} M_{\mu\nu} + \Gamma^\mu \Gamma_\mu \tag{2}$$

группы $Sp(4)$. Для рассматриваемых представлений $K=\frac{1}{2}N^2-2$, причем оказывается, что $N=2\ell_0$. Преобразование поля $\psi(x,z)$, соответствующее элементу (a,A) группы Пуанкаре $P=SL(2,C)\,T_4$, задается формулой:

$$U(a,A)\Psi(x,z)U^{-1}(a,A) = \psi(\Lambda x + a, z A^{-1}), \tag{3}$$

где $a\in T_4$, $A\in SL(2,C)$ и

$$\Lambda^\mu_\nu = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^\mu A \sigma_\nu \overset{*}{A}). \tag{4}$$

3. Рассмотрим двухточечную функцию

$$F_{\phi\psi}(x-y;\, z,w) = \langle 0|\phi(x,z)\psi(y,w)|0\rangle, \tag{5}$$

где ϕ и ψ преобразуются по неприводимым представлениям N и N′ группы $Sp(4)$. Используя условие спектральности, запишем $F_{\phi\psi}$ в виде:

$$F_{\phi\psi}(x;z,w) = \int \theta(p)K(p;z,w)e^{-ipx}\, d^4p, \tag{6}$$

где

$$\theta(p) = \Theta(p_0)\Theta(p^2).$$

Из инвариантности по группе Лоренца следует, что для каждого $A\in SL(2,C)$

$$K(\Lambda p;\, zA^{-1}, wA^{-1}) = K(p;z,w). \tag{7}$$

Трансформационные свойства полей $\phi(x,z)$ и $\psi(y,w)$ приводят к тому, что представление $[N\times N']$ группы $Sp(4)\times Sp(4)$, по которому преобразуется ядро K, распадается в прямую сумму неприводимых конечномерных представлений $SL(2,C)\times SL(2,C)$:

$$[N\times N'] = \sum_{n,n'=0}^{\infty} \oplus \left[\frac{N}{2}, \frac{N}{2}+n\right] \times \left[\frac{N'}{2}, \frac{N'}{2}+n'\right]. \tag{8}$$

Самый общий вид инвариантного ядра, преобразующегося по данному неприводимому представлению $[\frac{N}{2}, \frac{N}{2}+n]\times[\frac{N'}{2}, \frac{N'}{2}+n']$ группы $SL(2,C)\times SL(2,C)$, был получен в работе /3/. Учитывая эти результаты, из /8/ получаем следующее выражение для ядра K (без ограничения общности будем считать, что $N\geq N'$):

$$K = \kappa^{\frac{1}{2}(N+N')}(p\chi)^{\frac{1}{2}(N-N')}\sum_{n,n'=0}^{\infty}(p\xi)^n (p\eta)^{n'} \cdot \sum_{s=s_{min}}^{s_{max}} \rho_s^{nn'}(p^2)\, P_{s-s_{min}}^{(\frac{N}{2}+\frac{N'}{2},\, \frac{N}{2}-\frac{N'}{2})}(\cos\theta), \tag{9}$$

где

$$\kappa = z\epsilon w, \quad \chi_\mu = z\sigma_\mu \bar{w}, \quad \xi_\mu = z\sigma_\mu \bar{z},$$

$$\eta_\mu = w\sigma_\mu \bar{w}, \quad \cos\theta = 1 - \frac{p^2\cdot \xi\eta}{p\xi\cdot p\eta},$$

$$S_{min} = \frac{N}{2} \quad \text{и} \quad S_{max} = \min\left(n+\frac{N}{2},\, n'+\frac{N'}{2}\right).$$

4. Теперь мы покажем, что в двухточечной функции

$$F_{\psi\psi^*}(x;z,w) = \langle 0 \mid \psi\left(\frac{x}{2}, z\right)\psi^*\left(-\frac{x}{2}, w\right) \mid 0 \rangle \tag{10}$$

можно таким образом выбрать $\rho_s^{nn'}(p^2)$, что обобщенное свободное поле с произвольным массовым спектром будет локально в смысле Джаффе /9/.

Положим для свободного поля

$$\rho_s^{nn'}(p^2) = C_s^{nn'}\,\delta(p^2 - m_s^2). \tag{11}$$

Оказывается, что если p достаточно большое и константы $C_s^{nn'}$ выбраны так, что

$$C_s^{nn'} < \frac{1}{s(s!)^3\,(2s)!\,(n+n'+1)!}, \tag{12}$$

то ядро K удовлетворяет неравенству:

$$|K| < e^{\epsilon_0 |p_0| + \epsilon_1 |p_1| + \epsilon_2 |p_2| + \epsilon_3 |p_3|}, \tag{13}$$

где $0 < \epsilon_\alpha < 1$; $\alpha = 0,1,2,3$.

Для получения неравенства (12) удобно разложить полиномы Якоби в степенной ряд и воспользоваться равенством:

$$(p\xi)^n (p\eta)^n \sum_{s=s_{min}}^{s_{max}} \rho_s^{nn}(p^2)\, P_{s-s_{min}}^{\left(\frac{N+N'}{2}, \frac{N-N'}{2}\right)}(\cos\theta) =$$

$$= \sum_{s=s_{min}}^{s_{max}} \rho_s^{nn}(p^2) \sum_{k=0}^{s-s_{min}} \frac{(s+s_{min}+k)!\,(s-s_{min})!}{(k!)^2\,(s+s_{min})!\,(s-s_{min}-k)!} \cdot \tag{14}$$

$$\cdot\left(-\frac{p^2}{2}\right)^k \epsilon^{\alpha_1 c_1} \cdots \epsilon^{\alpha_k c_k}\, \epsilon^{b_1 d_1} \cdots \epsilon^{b_k d_k} \cdot$$

$$\cdot\, p_{\alpha_{k+1} b_{k+1}} \cdots p_{\alpha_n b_n} \cdot p_{c_{k+1} d_{k+1}} \cdots p_{c_n d_n} \cdot$$

$$\cdot\, z_{\alpha_1} \cdots z_{\alpha_n}\, \bar{z}_{b_1} \cdots \bar{z}_{b_n}\, w_{c_1} \cdots w_{c_n}\, \bar{w}_{d_1} \cdots w_{d_n},$$

где $p = \sigma_\mu p^\mu$.

Неравенство (13) является одним из достаточных критериев слабой локальности в смысле Джаффе. При выводе условия (12) для констант C_s^{nn} нигде не использовался явный вид выбранного в (11) спектра масс. Поэтому построенное обобщенное свободное поле локально для произвольного спектра масс, если только выполнено неравенство (12). Кроме того, из результатов /3/ непосредственно следует, что двухточечная функция $F_{\psi\psi^*}$ удовлетворяет условиям положительности и CPT-инвариантности.

Тем самым, хотя и на частном примере, мы показали, что существуют бесконечнокомпонентные поля с невырожденным спектром масс, которые удовлетворяют аксиомам поля и преобразуются по одному неприводимому представлению группы $Sp(4)$.

В заключение авторы выражают благодарность Д.И. Блохинцеву и Х.Я. Христову за полезные обсуждения и интерес к работе, а также Г.В. Ефимову за консультации по вопросам локальности.

Литература

1. *I.T. Grodsky and R.F. Streater. Phys.Rev.Letters, 20, 695 (1968).*
2. *H.D.I. Abarbanel and Y. Frischman. Phys.Rev., 171, 1442 (1968).*
3. *I.T. Todorov and R.P. Zaikov. J. Math. Phys., 10, 2014 (1969).*
4. *Дао Вонг Дик, Нгуен Ван Хьеу. ЯФ, 6, 186 (1967).*
5. *N. Wu. Preprint Univ. of Maryland, 903 (1968).*
6. *C.D. Palev. Nuovo Cimento 62A, 585 (1968).*
7. *A.N. Kvinikhidze, B.L. Markovski, D.T. Stoyanov, A.N. Tavkhelidze. Commun JINR, E2-5182, Dubna (1970).*
8. *I.T. Grodsky. Preprint Clevland Univ. (1967).*
9. *A.M. Jaffe. Phys.Rev., 158, 1454 (1967).*

Рукопись поступила в издательский отдел
4 августа 1970 года.