СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 -5304

Д.И. Блохинцев, Р.П. Зайков

РАЗЛОЖЕНИЕ ИНВАРИАНТНОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ ФУНКЦИИ БИЛОКА[illegible]ППАМ ПУАНКА[illegible]0(3,2))

1970

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 -5304

Д.И. Блохинцев, Р.П. Зайков

РАЗЛОЖЕНИЕ ИНВАРИАНТНОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ ФУНКЦИИ БИЛОКАЛЬНОГО ПОЛЯ ПО ГРУППАМ ПУАНКАРЕ, ЛОРЕНЦА И 0(4,1) (0(3,2))

В в е д е н и е

В работах [1,2] было показано, что частицы со спином больше 1/2 можно рассматривать как составные. С тех пор появилось большое количество исследований, посвященных этим вопросам. В последнее время интерес к составным моделям значительно возрос (кварковая модель [3] и различные модели, обладающие динамической симметрией [4]). В связи с объединением внутренних и пространственно-временных симметрий, а в настоящее время и с моделью Венециано [5,6], проявляется интерес к бесконечно-компонентным полям [4]. Однако, как было показано [7,8], невозможно построить локальную бесконечно-компонентную теорию с массовым спектром. Поэтому с самого начала можно рассматривать эту теорию как нелокальную, т.е. рассматривать поля как полилокальные [9]. Однако в таком случае эти поля преобразуются, вообще, по приводимым представлениям группы $SL(2,C)$. Здесь, как и в работах [9,10], будем рассматривать двухточечную функцию билокального скалярного поля. В работе [10] разложение по приводимым представлениям группы Лоренца проводилось с помощью преобразования Шапиро-Гельфанда-Граева (ШГГ)[11,12].

В настоящей работе мы будем разлагать двухточечную функцию билокального поля по двухточечным функциям, которые преобразуются по неприводимым представлениям группы Лоренца, без использования преобразователя ШГГ, например, как это делалось в работах [13-15] для амплитуды рассеяния. Здесь разложение проводится относительно групп $O(4,1)$ ($O(3,2)$), $O(3,1)$ и $O(3)$, последняя из которых изоморфна малой группе группы Пуанкаре, в фиксированной системе отсчета.

Мы рассматриваем ядро фурье-преобразования двухточечной функции билокального поля, существенно используя условие релятивистской инвариантности. Это ядро можно также рассматривать, как ядро некоторой инвариантной амплитуды упругого рассеяния двух скалярных частиц вне массовой поверхности. Переход на массовую поверхность можно сделать в окончательном результате.

При разложении относительно группы $O(3,2)$, $O(4,1)$ и $O(3,1)$ мы ограничиваемся только унитарными представлениями, однако здесь могут быть включены и неунитарные представления.

§2. Двухточечная функция билокального поля

Рассмотрим "двухточечную" функцию билокального скалярного поля

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = \langle 0 \mid \Phi(x_1, x_2) \Psi(y_1, y_2) \mid 0 \rangle, \tag{2.1}$$

где билокальное поле $\Phi(x, y)$ при преобразовании из физической группы Пуанкаре преобразуется как

$$U(a, \Lambda) \Phi(x, y) U^{-1}(a, \Lambda) = \Phi(\Lambda x + a, \Lambda y + a) \tag{2.2}$$

и удовлетворяет условию "локальной" коммутативности

$$[\Phi(x_1, x_2), \Phi(y_1, y_2)] = 0 \tag{2.3}$$

при

$$(x_\alpha - y_\beta)^2 < 0 \qquad (\alpha, \beta = 1,2).$$

Переходя в импульсное представление, имеем

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = \int d^4 p_1 \, d^4 p_2 \, d^4 q_1 \, d^4 q_2 \, \delta(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) \times$$
$$\times e^{ip_1 x_1 + ip_2 x_2 - iq_1 y_1 - iq_2 y_2} \, \theta(p_1 + p_2) \, K(p_1, p_2, q_1, q_2), \tag{2.4}$$

где $\theta(p)=\Theta(p^0)\Theta(p^2)$ выражает условие спектральности, а присутствие δ – функции является следствием трансляционной инвариантности двухточечной функции.

В ядре фурье-преобразования /2,4/ удобно перейти к новым переменным:

$$P=p_1+p_2, \qquad Q=q_1+q_2,$$
$$p=p_1-p_2, \qquad q=q_1-q_2. \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) в (2.4) и проинтегрировав по Q при помощи δ -функции, получаем:

$$F(X,Y,x,y)=\int d^4P\,d^4p\,d^4q\;\theta(P)e^{i(P(X-Y))+ixp+iyq}\;K(P,p,q), \tag{2.6}$$

где использованы следующие обозначения:

$$X=\frac{1}{2}(x_1+x_2), \quad Y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$$
$$x=\frac{1}{2}(x_1-x_2), \quad y=\frac{1}{2}(y_1-y_2). \tag{2.7}$$

Условие релятивистской инвариантности двухточечной функции

$$F(\Lambda x_1+a,\Lambda x_2+a,\Lambda y_1+a,\Lambda y_2+a)=F(x_1,x_2,y_1,y_2) \tag{2.8}$$

накладывает на ядро K требование

$$K(\Lambda P,\Lambda p,\Lambda q)=K(P,p,q). \tag{2.9}$$

Чтобы удовлетворить условию релятивистской инвариантности /2,9/, необходимо рассматривать ядро K как функцию независимых инвариантов, которые могут быть построены из четырех-векторов P, p и q. Эти инварианты обозначим посредством:

$$P^2 = s \ , \quad q^2 = \tilde{\tilde{t}} \ , \quad Pq = v \ ,$$

$$p^2 = r \ , \quad Pp = \tilde{\tilde{u}} \quad pq = w \ , \tag{2.10}$$

и, следовательно, имеем:

$$K = K(s, r, \tilde{\tilde{t}}, \tilde{\tilde{u}}, v, w). \tag{2.11}$$

Относительные импульсы p и q мы будем рассматривать как "спиновые" переменные в том смысле, что "спин" билокального поля выражается через эти переменные. Генераторы группы Лоренца для поля $\Phi(x_1, x_2)$ можно представить в виде:

$$M_{\mu\nu} = M^{(1)}_{\mu\nu} + M^{(2)}_{\mu\nu}, \tag{2.12}$$

где

$$M^{(a)}_{\mu\nu} = -i \left(p^{(a)} \frac{\partial}{\partial p^{\nu}_{(a)}} - p^{(a)}_{\nu} \frac{\partial}{\partial p^{\mu}_{(a)}} \right) \quad (a=1,2). \tag{2.13}$$

Переходя посредством (2.5) к переменным центра P и к относительным переменным p , получаем:

$$M_{\mu\nu} = M^{(P)}_{\mu\nu} + M^{(p)}_{\mu\nu} \ , \tag{2.14}$$

где

$$M^{(P)}_{\mu\nu} = -i \left(P_{\mu} \frac{\partial}{\partial P^{\nu}} - P_{\nu} \frac{\partial}{\partial P^{\mu}} \right) \tag{2.15}$$

и

$$M^{(p)}_{\mu\nu} = -i \left(p_{\mu} \frac{\partial}{\partial p^{\nu}} - p_{\nu} \frac{\partial}{\partial p^{\mu}} \right). \tag{2.16}$$

Из генераторов группы Лоренца и четырех-вектора P_μ можно построить оператор "спина":

$$\hat{S}^2 = -\frac{1}{P^2} W_\mu W^\mu = M^{\mu\nu}_{(p)} M^{(p)}_{\mu\nu} - M^{(p)}_{\mu\sigma} M^{\nu\sigma}_{(p)} P^\mu P_\nu, \tag{2.17}$$

где

$$W_\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} M^{\nu\sigma}_{(p)} P^\rho .$$

В /2,17/ мы учли, что $M^{(P)}_{\mu\nu}$ не дают вклада из-за антисимметрии тензора $\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$. Поэтому мы называем относительные переменные "спиновыми". Если поле $\Phi(x,y)$ описывает двухчастичную систему, то оператор /2,17/ в таком случае является оператором углового момента частиц в системе центра $(P=0)$. В этом смысле роль переменных p и q одинакова с переменными ξ и η, которые применялись в работе /8/ с той разницей, что здесь вообще имеем $p^2, q^2 \gtrless 0$.

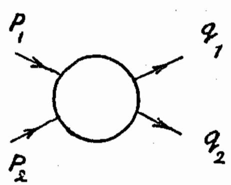

Рис. 1.

Функцию (2.11) можно рассматривать и как некоторую инвариантную амплитуду упругого рассеяния двух скалярных частиц вне массовой поверхности (рис. 1).

Фурье-преобразование (2.6) можно записать еще и в виде:

$$F(Y-Y; x, y) = \int d^4 P \; \theta(P) e^{iP(X-Y)} \tilde{\tilde{K}}(P; x, y), \tag{2.18}$$

где

$$\tilde{\tilde{K}}(P; x, y) = \int d^4 p \; d^4 q \; e^{ipx + iqy} \; K(P; p, q),$$

т.е. здесь ядро K находится в смешанном представлении: в P - представлении относительно координат "центра" и в x -представлении по относительным координатам. В дальнейшем и относительные координаты и относительные импульсы будем обозначать посредством p и q. При рассмотрении двухточечной функции будем использовать представление (2.19), а если имеем дело с диаграммой Фейнмана с четырьмя концами, - представление (2.6).

§3. Разложение инвариантного ядра K по $O(3)$ и $O(2,1)$ на гиперболоиде

Ниже мы разложим (2.11) по собственным функциям оператора "спина" (2.17) в случае, когда спиновые переменные заданы на гиперболоиде (либо двухполостном, либо однополостном). При этом рассмотрим также и случаи, когда $P^2 < 0$, т.е. когда P является не только времени-подобным, но и пространственно-подобным вектором. Последний случай осуществляется, когда K рассматриваем как инвариантную амплитуду диаграммы (рис.1). Случаи $P^2 > 0$ и $P^2 < 0$ рассмотрим отдельно:

а) $P^2 > 0$. Поскольку мы интересуемся инвариантными решениями уравнения

$$[\hat{S}^2 - \ell(\ell+1)]\, K_\ell = 0, \tag{3.1}$$

удобно перейти к системе покоя для вектора $P\,(\vec{P} = 0)$, в которой из (2.17) получаем:

$$\hat{S}^2\,(\vec{P}=0) = \vec{M}^2_{(p)} = 2p^k \frac{\partial}{\partial p^k} - \vec{p}^{\,2} \frac{\partial^2}{\partial p^k\,\partial p^k} + p^k\, p^\ell \frac{\partial^2}{\partial p^k\,\partial p^\ell}, \tag{3.2}$$

$$(k, \ell = 1,2,3).$$

Подставляя (3.2) в (3.1), получаем уравнение:

$$\sin^2\theta \frac{\partial^2 K}{\partial(\cos\theta)^2} - 2\cos\theta \frac{\partial K}{\partial\cos\theta} + \ell(\ell+1)\, K = 0, \qquad (\ell = 0,1,\dots), \tag{3.3}$$

где

$$\cos\theta = \frac{\tilde{\tilde{u}}\, v - s\, w}{\sqrt{(\tilde{\tilde{u}}^2 - s\, r)(v^2 - s\tilde{\tilde{t}})}} \, . \tag{3.4}$$

Здесь θ есть угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ в системе, в которой $\vec{P} = 0$.

Решения уравнения (3.3) можно представить в виде:

$$K_\ell = h_\ell(s, r, \tilde{\tilde{t}}, \tilde{\tilde{u}}, v) P_\ell \ (\cos\theta), \tag{3.5}$$

где $P_\ell(\cos\theta)$ являются решениями уравнения (3.3), регулярными в точке $\cos^2\theta = 1$. При этом мы ограничились только унитарными представлениями группы $O(3)$. Функции h_ℓ являются неизвестными. Имея в виду, что K является суперпозицией из K_ℓ , получаем:

$$K = \sum_{\ell=0}^{\infty} h_\ell \, (s, r, \tilde{\tilde{t}}, \tilde{\tilde{u}}, v) \, P_\ell \ (\cos\theta). \tag{3.6}$$

К такому же результату можно прийти, если в уравнение (3.1) подставить оператор (2.17) в переменных q . Это является следствием закона сохранения "спина".

б) В случае, когда $P^2 < 0$, естественная система координат является системой, в которой $\overset{\circ}{P} = (0,0,0,P_3)$. В этой системе оператор (2.17) записывается в виде:

$$\hat{S}^2(\overset{\circ}{P}) = 2p^\alpha \frac{\partial}{\partial p^\alpha} + p^\alpha p^\beta \frac{\partial^2}{\partial p^\alpha \partial p^\beta} - p^\alpha p_\alpha \frac{\partial^2}{\partial p^\beta \, \partial p_\beta} \, , \tag{3.7}$$

где $(\alpha, \beta = 0,1,2)$. Этот оператор есть оператор Казимира группы $O(2,1)$.

Как и в предыдущем случае, будем искать собственные функции оператора (3.7), т.е. решения уравнения

$$[\hat{S}^2(\overset{\circ}{P}) - j(j+1)]\, K = 0. \tag{3.8}$$

Из-за того, что группа $O(2,1)$ некомпактна, все ее унитарные представления, за исключением скалярного, бесконечномерные. Как известно /16/, существует четыре класса унитарных представлений этой группы:

1) Главная серия

$$\mathrm{Re}\, j = -\frac{1}{2}, \quad -\infty < \mathrm{Jm}\, j < \infty . \tag{3.9}$$

2) Дополнительная серия

$$-\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\, j < \frac{1}{2}, \quad \mathrm{Im}\, j = 0. \tag{3.10}$$

3) Дискретная серия

$$j = -\frac{1}{2}, \ -1, \ -3/2, \ldots \tag{3.11}$$

4) Скалярное представление

$$j = 0 . \tag{3.12}$$

Подставляя (3.7) в (3.8), получаем:

$$\left[(1 - z^2) \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2z \frac{\partial}{\partial z} + j(j+1) \right] K = 0, \tag{3.13}$$

где переменная z задается следующим образом

$$z = \frac{\tilde{\tilde{u}} v - s w}{\sqrt{(u^2 - rs)\, v^2 - s \tilde{\tilde{t}}}} \tag{3.14}$$

и которая совпадает по форме с переменной (3.4), однако ее значения зависят от характера векторов p и q. В случае, когда $p^2 > 0$ и $q^2 > 0$, имеем $1 \le z \le \infty$, в остальных $-\infty \le z \le \infty$.

Уравнение (3.13) показывает, что его решения можно представить в виде:

$$K_j = h_j (s, r, \tilde{\tilde{t}}, \tilde{\tilde{u}}, v)\, P_j (z), \tag{3.15}$$

где $P_j(z)$ является решением уравнения (3.13), а j принимает значения (3.9-12). Здесь, аналогично (3.6), имеем

$$K = \sum_j h_j(s, r, \tilde{\tilde{t}}, \tilde{\tilde{u}}, v) P_j(z). \qquad (3.16)$$

В случае, когда j имеет непрерывный спектр, сумму в (3.16) нужно понимать как интеграл.

§4. Разложение ядра K по группе Лоренца

Как уже отмечалось, ядро K приводимо относительно "спиновой" группы Лоренца. Здесь разложение ядра K по ядрам, которые преобразуются по неприводимым представлениям группы Лоренца, совершается прямо в переменных p и q, не переходя на конус, как это делалось в работе /10/. Чтобы сделать это разложение, сначала надо найти собственные функции операторов Казимира, соответствующих группе Лоренца. Как известно, группа Лоренца имеет два квадратичных оператора Казимира:

$$\begin{aligned} \hat{C}_1 &= \frac{1}{2} M_{\mu\nu} M^{\mu\nu} = \vec{M}^2 - \vec{N}^2 \\ \hat{C}_2 &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} M^{\mu\nu} M^{\sigma\rho} = \vec{M} \cdot \vec{N}, \end{aligned} \qquad (4.1)$$

где

$$M_j = \epsilon_{jk\ell} M_{k\ell}; \quad N_j = M_{0j} \quad (j, k, \ell = 1,2,3)$$

Подставляя (2.16) во второй из операторов (4.1), получаем

$$\hat{C}_2 = 0, \qquad (4.2)$$

что является следствием антисимметричности тензора $\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$.

Собственные значения операторов (4.1) выражаются посредством пары чисел $[\ell_0, \ell_1]$.

$$c_1 = \ell_0^2 + \ell_1^2 - 1, \quad c_2 = -i\,\ell_0 \ell_1 . \tag{4.3}$$

Из (4.2) и (4.3) следует, что в рассматриваемом нами случае имеем: либо $\ell_0 = 0$, а ℓ_1 – произвольное, либо ℓ_0 – произвольное целое число, а $\ell_1 = 0$. Ограничимся только разложением по унитарным представлениям группы Лоренца, т.е. по представлениям $r = [\,0, i\,\rho\,]$, где $-\infty \leq \rho \leq \infty$ (основная серия) и $\chi = [\,2m\,,\,0\,]$ (дополнительная).

Здесь, как и в §3, сначала надо найти собственные функции операторов Казимира (4.1), т.е. необходимо решить уравнения:

$$\begin{aligned} (\hat{C}_1^{(p)} - c_1)\,K &= 0 \\ (\hat{C}_1^{(q)} - c_1^1)\,K &= 0, \end{aligned} \tag{4.4}$$

где индекс $p\,(q)$ обозначает, что оператор действует на переменную $p\,(q)$. Подставляя (2.18) в первый из операторов Казимира (4.1), получаем:

$$\hat{C}_1^{(p)} = 3p \frac{\partial}{\partial p^\mu} + p^\mu p^\nu \frac{\partial^2}{\partial p^\mu \partial p^\nu} - p^2 \frac{\partial^2}{\partial p^\mu \partial p_\mu} . \tag{4.5}$$

Выражение для $\hat{C}_1^{(q)}$ получается заменой $p \to q$.

Подставляя (4.5) в (4.4), получим дифференциальное уравнение в инвариантных переменных. Вид его зависит от значений $p^2(q^2)(\gtrless 0)$. Поэтому рассмотрим отдельно случаи:

а) Когда $p^2(q^2) = 0$, из (4.5) следует, что уравнение (4.4) является уравнением для однородных функций и, следовательно, ядро K должно удовлетворять условию:

$$K(\,P,\,a\,p,\,q\,) = a^\nu K(P,p,q), \tag{4.6}$$

где $\nu = \ell_1 - 1$. Из (3.6) получаем:

$$h_\ell^{\ell_1-1}(s,r,\tilde{\tilde{t}},\tilde{\tilde{u}},v)=\tilde{\tilde{u}}^{\ell_1-1}\; h_\ell^{(\ell_1-1)}(s,\tilde{\tilde{t}},v). \tag{4.7}$$

Если имеем $p^2=q^2=0$, (4.6) выполняется и для переменных q. Согласно результатам работы /8/, самый общий вид h_ℓ можно записать как:

$$h_\ell^{[\ell_1,\ell'_1]}=\tilde{\tilde{u}}^{\ell_1-1}\; v^{\ell'_1-1}\; h_{\ell''}^{(\ell_1-1,\,\ell'_1-1)}(s). \tag{4.8}$$

Ограничиваясь разложением только по унитарным представлениям, получаем следующее разложение для K :

$$K=\int_{\rho=-\infty}^{\infty} d\rho \int_{\rho'=-\infty}^{\infty} d\rho'\; \tilde{\tilde{u}}^{i\rho-1}\; v^{i\rho'-1}\; \Sigma\, \sigma_\ell(s)\, P_\ell\;(\cos\theta). \tag{4.9}$$

б) $p^2>0,\ q^2>0$. Подставляя (4.5) в уравнение (4.4) и имея в виду, что K зависит от p, посредством r, $\tilde{\tilde{u}}$ и w, с учетом разложения (3.6) получаем уравнения для функции h_ℓ :

$$(1-\lambda^2)\frac{\partial g_\ell}{\partial\lambda^2}-2\lambda\frac{\partial g_\ell}{\partial\lambda}+[\kappa(\kappa+1)-\frac{(\ell+\frac{1}{2})^2}{1-\lambda^2}]\,g_\ell=0,$$

$$(1-\mu^2)\frac{\partial g_\ell}{\partial\mu^2}-2\mu\frac{\partial g_\ell}{\partial\mu}+[\kappa'(\kappa'+1)-\frac{(\ell+\frac{1}{2})^2}{1-\mu^2}]\;g_\ell=0, \tag{4.10}$$

где введены новые переменные:

$$\lambda=\frac{\tilde{\tilde{u}}}{\sqrt{rs}} \qquad\qquad \mu=\frac{v}{\sqrt{\tilde{\tilde{t}}s}}, \tag{4.11}$$

а g_ℓ задается следующим образом:

$$h_\ell=[(1-\lambda^2)(1-\mu^2)]^{-1/4}\,g_\ell(s,r,\tilde{\tilde{t}},\tilde{\tilde{u}},v) \tag{4.12}$$

и

$$\kappa = -\frac{1}{2} + \sqrt{1 + c_1} \ . \tag{4.13}$$

Уравнения (4.10) показывают, что g_ℓ факторизуется по λ и μ, т.е. ее можно представить в виде:

$$g_\ell^{\kappa\kappa'}(s, r, \tilde{\tilde{t}}, \tilde{\tilde{u}}, v) = f_\ell^{\kappa\kappa'}(s, r, t)\, a_\ell^{\kappa}(\lambda)\, b_\ell^{\kappa'}(\mu), \tag{4.14}$$

где a_ℓ^{κ} и $b_\ell^{\kappa'}$ удовлетворяют уравнениям (4.10), которые есть не что иное, как уравнения для функции Лежандра. Переменные λ и μ, согласно (4.11), при $s, r, \tilde{\tilde{t}} > 0$, принимают значения

$$1 \leq \lambda, \ \mu \leq \infty, \tag{4.15}$$

а в случае, когда $s < 0$ и $r, \tilde{\tilde{t}} > 0$, имеем

$$\mathrm{Re}\, \lambda, \mu = 0, \quad -\infty \leq \mathrm{Jm}\, \lambda, \mu \leq \infty . \tag{4.16}$$

Решения уравнения (4.10) однозначные и регулярные в интервале (4.15), при $\ell_1 = i\rho$, $\ell_0 = 0$, имеют вид:

$$a_\ell^{i\rho}(z) = P_{-\frac{1}{2}+i\rho}^{-(\frac{1}{2}+\ell)}(z) = \frac{2^{\ell+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\ell+\frac{1}{2})}(z^2-1)^{\frac{1}{4}+\frac{\ell}{2}}\, z^{-1-\ell+i\rho}\, F\left(\frac{1+\ell-i\rho}{2}, \frac{\ell-i\rho}{2}, 3/2+\ell, \frac{z^2-L}{z^2}\right) \cdot \tag{4.17}$$

Для $s < 0$, т.е. когда переменная z задана в интервале (4.16), решения уравнения (4.10) получаются из (4.17) путем аналитического продолжения. В этом случае необходимо учесть, что ℓ принимает значения (3.9–12) соответственно.

с) Для случая $p^2(q^2) < 0$ в разложение войдут, помимо представлений из основной серии $\tau = [0, i\rho]$, еще и представления из дискретной серии $\chi = [2m, 0]$ /12/. Решения уравнения (4.4) для представлений из основной серии получаются из (4.17) аналитическим продолжением.

Чтобы найти ядро K , которое преобразуется по представлениям из дискретной серии, необходимо решить уравнения (4.10), где κ заменено на

$$\kappa = -\frac{1}{2} + 2m, \tag{4.18}$$

а m – целое число. При этом надо иметь в виду, что переменные λ и μ – чисто мнимые, т.е.

$$\mathrm{Re}\,\lambda = \mathrm{Re}\,\mu = 0; \quad -\infty \leq \mathrm{Im}\,\lambda,\ \mathrm{Im}\,\mu \leq \infty.$$

В этом случае решения уравнения (4.14) имеют вид:

$$a^{\ell}_{m}(\mu) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{1/2+2m}} (\mu^2 - 1)^{-\frac{1}{4}+2m} \frac{\Gamma(1 + \ell + 2m)}{\Gamma(1 + 2m)} \times$$

$$\times F\left(\frac{2m-\ell}{2}, \frac{1+2m-\ell}{2}, 1+2m; \frac{1}{1-\mu^2}\right). \tag{4.18}$$

Ядро K , вообще говоря, является суперпозицией ядер, которые преобразуются по прямому произведению неприводимых представлений группы Лоренца.

$$K = \sum_{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}, \tag{4.19}$$

где суммирования в (4.19) нужно рассматривать как интегрирования, если α или β принимают непрерывные значения. Ядра $K_{\alpha\beta}$ определяются функциями h_2 , входящими в разложение (3.6) соответственно (3.16). Эти функции в рассматриваемых нами случаях выражаются равенствами (4.7), (4.12) и (4.14). (В последнее выражение необходимо учесть (4.17) или (4.18)).

§5. Разложение относительно группы $O(4,1)$ и $O(3,2)$.

В случае, когда $p^2 \neq 0$ и $q^2 \neq 0$ – функция f из (4.14) зависит от переменных s, r и $\tilde{\tilde{t}}$, функцию $g(x)$, заданную для $x^2 = x^2 - \vec{x}^2 \neq 0$, можно представить как функцию, определенную на конусе в пятимерном псевдо-эвклидовом пространстве с сигнатурой 1, если $x^2 > 0$, и с сигнатурой 2, если $x^2 < 0$. Группой движения на конусе является группа $O(4,1)$ для $x^2 > 0$ и $O(3,2)$ для $x^2 < 0$. Таким образом, рассматривая функцию K, заданную в пятимерном "спиновом" пространстве, можно разложить по собственным функциям операторов Казимира группы $O(4,1)$ $(O(3,2))$.

Группа $O(4,1)(O(3,2))$ является группой, которая сохраняет билинейную форму

$$g_{AB} X^A Y^B = X_0 Y_0 - \vec{X}\vec{Y} + \epsilon X_4 Y_4, \quad (A, B = 0,1,2,3,4), \tag{5.1}$$

где

$$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = \epsilon g_{44} = 1,$$

а

$$\epsilon = \begin{cases} 1 & \text{если} \quad p^2(q^2) > 0 \\ -1 & \text{если} \quad p^2(q^2) < 0. \end{cases}$$

Генераторы группы $O(4,1)((O(3,2))$ удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям

$$[L_{AB}, L_{CD}] = i(g_{AD} L_{BC} + g_{BC} L_{AD} - g_{AC} L_{BD} - g_{BD} L_{AC}). \tag{5.2}$$

Переход от четырехмерного "спинового" пространства к пятимерному можно сделать следующим образом: вводим пятимерные векторы посредством

$$p = (p, \sqrt{\epsilon r}) \quad \text{и} \quad q = (q, \sqrt{\epsilon \tilde{\tilde{t}}}. \tag{5.3}$$

Из (2.10) и (5.1) следует, что

$$p^2 = q^2 = 0.$$

Таким образом, посредством (5.3) дается отображение четырехмерной области, содержащейся внутри или вне светового конуса, на конус в пятимерном пространстве.

Генераторы группы O(4,1)((O(3,2)) можно записать как:

$$L_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 0,1,2,3)$$

$$L_{4\mu} = i p_4 \frac{\partial}{\partial p^{\mu}}, \tag{5.4}$$

где $M_{\mu\nu}$ – генераторы "спиновой" группы Лоренца, заданные формулой (2.16). Аналогичным образом задаются генераторы, действующие на переменные q .

Квадратичный оператор Казимира имеет вид:

$$L_{AB} L^{AB} = 4 p^{\mu} \frac{\partial}{\partial p^{\mu}} + p^{\mu} p^{\nu} \frac{\partial^2}{\partial p^{\mu} \partial p^{\nu}}, \tag{5.5}$$

а соответствующий оператор четвертой степени равен нулю,

$$W^A W_A = 0,$$

где

$$W^A = \epsilon^{ABCDE} L_{BC} L_{DE}.$$

Здесь ϵ_{ABCDE} – антисимметричный тензор в пятимерном пространстве, $\epsilon_{01234} = 1$.

Как и в предыдущем параграфе, определим собственные функции оператора Казимира (5.5)

$$(L_{AB} L^{AB} - a^2) K = 0 \tag{5.6}$$

Сделав соответствующие подстановки, получаем

$$[\, r^2 \frac{\partial}{\partial r^2} + 4r \frac{\partial}{\partial r} - a^2 \,]\, f = 0 \tag{5.7}$$

и аналогичное уравнение относительно переменных q

$$[\, \tilde{\tilde{t}}^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{\tilde{t}}^2} + 4\tilde{\tilde{t}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\tilde{t}}} - a'^2 \,]\; f = 0 . \tag{5.8}$$

Уравнения (5.7) и (5.8) показывают, что функция f факторизуется по переменным r и $\tilde{\tilde{t}}$, т.е.

$$f_{aa'}(s, r, \tilde{\tilde{t}}) = \sigma_{aa'}(s)\, \Xi_a(r)\, \Sigma_{a'}(\tilde{\tilde{t}}), \tag{5.9}$$

где Ξ_a и $\Sigma_{a'}$ удовлетворяют уравнениям (5.7) и (5.8) соответственно, и, следовательно, они являются однородными функциями степени однородности

$$\bar{\nu} = -3/2 + i\beta \qquad -\infty \le \beta \le \infty , \tag{5.10}$$

где

$$\beta^2 = -9/4 - a^2 .$$

Здесь мы ограничились разложением только по унитарным представлениям /17/. Для функции f получаем представление:

$$f_\ell^{(\ell_1 \ell_1')} = \int_{\beta=-\infty}^{\infty} d\beta \int_{\beta'=-\infty}^{\infty} d\beta'\; r^{-3/2+i\beta}\, \tilde{\tilde{t}}^{-3/2+i\beta'}\, \sigma_\ell^{[\ell_1, \ell_1', \beta, \beta']}(s). \tag{5.11}$$

Подставляя (5.11) в (4.14), получаем окончательное разложение для ядра K . Входящая в это разложение спектральная функция σ зависит только от s , а вся зависимость от "спиновых" переменных входит в известные функции.

Как уже отмечалось, полученное разложение имеет силу и для инвариантной амплитуды диаграммы (рис. 1), для которой внешние линии - скалярные, и не находятся на массовой поверхности.

Необходимо отметить, что ограничение с разложением только по унитарным представлениям, эквивалентно требованиям /12/ квадратичной интегрируемости относительно "спиновых" переменных. Если последнее предположение не выполняется, необходимо в разложения включить и неунитарные представления.

Если в окончательном разложении подставим

$$p_\alpha^2 = m_\alpha^2 \qquad (\alpha, \beta = 1,2)$$
$$q_\beta^2 = M_\beta^2 , \tag{5.12}$$

т.е. сделаем переход на массовой поверхности, предполагая для простоты, что все массы одинаковы, из (2.10), (3.4) и (4.11) следует, что

$$\bar{u} = v = \lambda = \mu = 0, \qquad r = \tilde{\tilde{t}} = 4m^2 - s ,$$
$$\cos\theta = -1 + \frac{2t}{4m^2 - s} ; \tag{5.13}$$

где s и t являются переменными Мандельстама, а θ - угол между относительными импульсами входящих и выходящих частиц в системе центра масс.

Авторы весьма признательны Я.А. Смородинскому за полезные замечания.

Литература

1. В.Л. Гинзбург, И.Е. Тамм. ЖЭТФ, 17, 227 (1947).
2. Д.И. Блохинцев. ЖЭТФ, 17, 545 (1947).
3. Н.Н. Боголюбов. Лекции в сб. "Физика высоких энергий и теория элементарных частиц", "Наукова Думка", Киев, 1967.
4. D.Tz. Stoyanov, I.T. Todorov. Jorn. Math. Phys., 9, 2146 (1968) - подробные ссылки даны в этой работе.

5. A.N. Kvinihidze, B.L. Markovsky, D.Tz. Stoyanov, A.N. Tavkhelidze, Comm. JINR; E2-5182, Dubna, (1970).
6. I.I. Grodsky, Preprint Clev. Univ., (1970).
7. I.T. Grodsky, R.F. Streater, Phys. Rev., 20, 695 (1968).
8. H.D.I. Abarbanel and Y. Frischman, Phys. Rev., 171, 1442 (1968), I.T. Todorov and R.P. Zaikov. Jorn. Math. Phys., 10, 2014 (1969).
9. R.F. Streater. Proc. Phys. Soc., 83, 549 (1964). Ann. Phys. (N.Y.), 30, 1 (1964).
10. Д.И. Блохинцев, Р.П. Зайков. ТМФ, 3, 166 (1970).
11. И.С. Шапиро. ДАН, 106, 647 (1956).
12. И.М. Гельфанд, М.И. Граев, Н.Я. Виленкин. "Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений". М., Физматгиз, 1962.
13. Н.Я. Виленкин, Я.А. Смородинский. ЖЭТФ, 46, 1973 (1964).
14. М.А. Либерман, Я.А. Смородинский, М.Б. Шефтель. ЯФ, 7, 202 (1968).
15. А.К. Агамапиев, Н.М. Атакишиев, И.А. Вердиев. ЯФ, 9, 201 (1969).
16. J.F. Boece, R. Delbourgo, Abdus Salam and J. Streater, Preprint ICTP-IC/67/9, Trieste (1967).
17. J. Figher, J. Niederle, R. Raczka. Jorn. Math. Phys., 7, 816 (1967).

Рукопись поступила в издательский отдел
4 августа 1970 года.

Блохинцев Д.И., Заиков Р.П. Р2-5304

Разложение инвариантной двухточечной функции билокального поля по группам Пуанкаре, Лоренца и $0(4,1)$ $(0(3,2))$

Двухточечная функция билокального поля разложена по унитарным представлениям групп Пуанкаре, Лоренца и $0(4,1)$ $(0(3,2))$. Это разложение проводится по функциям, заданным на двухполостном, однополостном гиперболоиде или на конусе, соответственно. Таким же образом получено разложение для инвариантной амплитуды рассеяния двух скалярных частиц вне массовой поверхности.

Сообщения Объединенного института ядерных исследований

Дубна, 1970

Blokhintsev D.I., Zaikov R.P. P2-5304

Expansion of the Invariant "Two-Point" Function for the Bilocal Field of the Lorentz, Poincare and $0(4,1)$ $(0(3,2))$ Groups

The "two-point" function for the bilocal field was expanded in the unitary representations of the Lorentz, Poincare and $0(4,1)$ $(0(3,2))$ groups. This expansion was performed in the functions given on the two-sheet, one-sheet hyperboloid or on the cone, respectively. In this way the expansion was obtained for the invariant scattering amplitude of two scalar particles out of the mass surface.

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.

Dubna, 1970