ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 5303

Ч.Д. Палев

МАКСИМАЛЬНАЯ ПРОСТАЯ АЛГЕБРА ЛИ, ПОСТРОЕННАЯ ИЗ ЗАДАННОГО ЧИСЛА ФЕРМИ-ОПЕРАТОРОВ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1970

8539/2 пр

P2 - 5303

Ч.Д. Палев

МАКСИМАЛЬНАЯ ПРОСТАЯ АЛГЕБРА ЛИ, ПОСТРОЕННАЯ ИЗ ЗАДАННОГО ЧИСЛА ФЕРМИ-ОПЕРАТОРОВ

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая физика"

1. Известно, что любая конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{A}$ может быть реализована с помощью бозе- или ферми-операторов рождения и уничтожения $\overset{+}{a}_i$, a_j $(i,j=1,2,..,n)$ /1/. При этом элементы алгебры могут быть выражены разными способами через $\overset{+}{a}_i$, $\overset{-}{a}_j$. В теоретической физике (например, лестничные представления алгебр Ли, бесконечно-компонентные уравнения, динамические группы) наиболее часто используются представления, в которых генераторы $\mathfrak{A}$ выражаются квадратичными комбинациями операторов $\overset{+}{a}_i$, a_j. Существуют также реализации $\mathfrak{A}$ полиномами степени выше второй. Для случая Бозе можно выразить элементы алгебры рациональными функциями операторов $\overset{+}{a}_i$, a_j.

Важным аспектом в проблеме реализации является задача нахождения всех алгебр Ли, которые могут быть построены из данного числа операторов рождения и уничтожения. В настоящей работе мы доказываем, что максимальная комплексная простая алгебра Ли, которая может быть реализована с помощью n пар ферми-операторов изоморфна классической алгебре A_{2^n-1}. Мы говорим, что алгебра $\mathfrak{A}$, принадлежащая множеству алгебр Ли Ω, максимальна в Ω, если она не является подалгеброй ни одной из алгебр, принадлежащих Ω. Ясно, что Ω может иметь в общем случае несколько максимальных элементов.

2. Рассмотрим совокупность $2n$ объектов $a_i^{\epsilon_i}$, $i=1,2,..,n$; $\epsilon_i=\pm 1$ и пусть Φ - произвольное поле. Обозначим через V_n ассоциативную алгебру над полем Φ с образующими $a_i^{\epsilon_i}$, которые удовлетворяют соотношениям:

$$a_i^{\epsilon_i} a_j^{\tilde{\tilde{\epsilon}}_j} + a_j^{\tilde{\tilde{\epsilon}}_j} a_i^{\epsilon_i} = I\,\delta_{ij}\,(1-\delta_{\epsilon_i \epsilon_j}), \qquad (1)$$

где $\epsilon_i, \tilde{\tilde{\epsilon}}_j = \pm 1$; $i, j = 1,\ldots,n$ и 1 – единичный элемент алгебры V_n. Алгебра V_n является фактор-алгеброй алгебры всех полиномов от $a_i^{\epsilon_i}$ по идеалу, порожденному множеством всех элементов вида:

$$a_i^{\epsilon_i} a_j^{\tilde{\tilde{\epsilon}}_j} + a_j^{\tilde{\tilde{\epsilon}}_j} a_i^{\epsilon_i} - I\,\delta_{ij}\,(1-\delta_{\epsilon_i \tilde{\tilde{\epsilon}}_j}). \qquad (2)$$

Соотношения (1) совпадают с антикоммутационными соотношениями для n пар ферми-операторов, если отождествить все a_i^- и a_i^+ с ферми-операторами уничтожения и рождения a_i и $\overset{+}{a}_i$. Однако $\overset{+}{a}_i$ не является эрмитовосопряженным к a_i^-, т.к. операция инволюции не определена.

3. Алгебра V_n конечномерна. Обозначим через B_n совокупность всех элементов алгебры V_n вида:

$$a_{i_1}^{\epsilon_1} \ldots a_{i_p}^{\epsilon_p} c_{i_{p+1}} \ldots . c_{i_q}, \qquad (3)$$

где по определению $c_r = a_r^- a_r^+ - a_r^+ a_r^-$, $i_1 > i_2 > \ldots > i_p$; $i_{p+1} > i_{p+2} > \ldots > i_q$, $i_p \neq i_q$, если $p \neq q$. Нетрудно проверить, что элементы множества B_n линейно независимы, а их линейная оболочка равна V_n. Поэтому B_n является базисом в пространстве V_n. В дальнейшем, говоря о базисе в V_n, мы всегда будем подразумевать этот базис. Обратим внимание на то, что один и тот же базисный вектор не может содержать множителей вида $a_i^+ a_i^-$, $a_i^{\epsilon} c_i$ $(i=1,\ldots,n)$.

Будем говорить, что базисный вектор

$$a_{i_1}^{\epsilon_1} \ldots a_{i_p}^{\epsilon_p} c_{i_{p+1}} \ldots c_{i_q} \qquad (4)$$

чётен (нечётен), если $2q-p$ чётно (нечётно). Элемент $a \subset V_n$ чётен (нечётен), если его можно представить в виде линейной комбинации чётных (нечётных) базисных векторов. Обозначим через $B_n^e(B_n^0)$ совокупность всех чётных (нечётных) базисных векторов, и пусть $V_n^e\ (V_n^0)$ – пространство, натянутое на $B_n^e(B_n^0)$. Очевидно, что V_n есть прямая сумма чётного и нечётного подпространства, т.е.

$$V_n = V_n^e + V_n^0. \qquad (5)$$

Произвольный элемент $a \subset V_n$ всегда представляется в виде:

$$a = \sum_i \alpha^i e_i + \sum \beta^j f_j, \qquad (6)$$

где

$$\alpha^i, \beta^j \subset \Phi;\ e_i \subset B_n^e,\ f_j \subset B_n^0.$$

Обозначим через S и R_n подпространства V_n, натянутые на единичный элемент и на все элементы порядка больше нуля, соответственно. Из коммутационных соотношений в V_n следует, что

$$[S, V_n] = 0 \quad \text{и} \quad [R_n, R_n] \subset R_n. \qquad (7)$$

Поэтому алгебра V_n распадается в прямую сумму своего центрального идеала S и подалгебры R_n :

$$V_n = S \oplus R_n. \qquad (8)$$

Так же как и для V_n через R_n^e и R_n^0 мы обозначим совокупность всех чётных и нечётных элементов алгебры R_n.

4. Определим линейные операторы $P\begin{pmatrix}1 \ldots n \\ j_1 \ldots j_n\end{pmatrix}$ (где $(j_1 \ldots j_n)$ – перестановка чисел $(1,\ldots,n)$ и $Q(\delta_1,\ldots,\delta_n)$ $(\delta_p = \pm 1$ для $p = 1,\ldots,n)$ в пространстве V_n следующим образом:

$$P\begin{pmatrix}1\dots n\\ j_1\dots j_n\end{pmatrix} a_{i_1}^{\epsilon_1}\dots a_{j_p}^{\epsilon_p} c_{i_{p+1}}\dots c_{i_q} = a_{j_{i_1}}^{\epsilon_1}\dots a_{j_{i_p}}^{\epsilon_p} c_{j_{i_{p+1}}}\dots c_{j_{i_q}} \qquad (9)$$

$$Q(\delta_1,\dots,\delta_n)\, a_{i_1}^{\epsilon_1}\dots a_{j_p}^{\epsilon_p} c_{i_{p+1}}\dots c_{i_q} = \delta_{i_{p+1}}\dots\delta_{i_q}\, a_{i_1}^{\delta_{i_1}\epsilon_1}\dots a_{i_p}^{\delta_{i_p}\epsilon_p} c_{i_{p+1}}\dots c_{i_q}.$$

Отображения P и Q сохраняют антикоммутационные соотношения (1) и поэтому являются автоморфизмами алгебры V_n (рассматривая V_n как ассоциативную алгебру или как алгебру Ли). Например:

$$Q(\delta_1,\dots,\delta_n)(a_i^{\epsilon_i}a_j^{\bar\epsilon_j}+a_j^{\bar\epsilon_j}a_i^{\epsilon_i}) = \qquad (10)$$

$$= a_i^{\delta_i\epsilon_i}a_j^{\delta_j\bar\epsilon_j}+a_j^{\delta_j\bar\epsilon_j}a_i^{\delta_i\epsilon_i} = \delta_{ij}(1-\delta_{\epsilon_i\bar\epsilon_j}).$$

Совокупность всех операторов $P\begin{pmatrix}1\dots n\\ j_1\dots j_n\end{pmatrix}$ дает представление группы перестановок в V_n. Множество всех операторов P и Q определяет группу G автоморфизмов алгебры V_n.

Любой базисный вектор $a_{i_1}^{\epsilon_1}\dots a_{i_p}^{\epsilon_p}c_{i_{p+1}}\dots c_{i_q}$ всегда может быть получен из $a_1^-\dots a_p^- c_{p+1}\dots c_q$ с помощью операторов P и Q, выбранных подходящим образом. Действительно, легко проверить, что

$$\frac{(-1)^{p-q}}{\epsilon_{p+1}\dots\epsilon_q} P\begin{pmatrix}1\dots n\\ j_1\dots j_n\end{pmatrix} Q(-\epsilon_1,\dots,-\epsilon_n)\times \qquad (11)$$

$$\times a_1^-\dots a_p^- c_{p+1}\dots c_q = a_{i_1}^{\epsilon_1}\dots a_{i_p}^{\epsilon_p}c_{i_{p+1}}\dots c_{i_q}.$$

Рассмотрим вектор $\Delta=\frac{1}{2}c_1\dots c_n$. Он является собственным вектором произвольного преобразования $P\begin{pmatrix}1\dots n\\ i_1\dots i_n\end{pmatrix}Q(\delta_1\dots\delta_n)$ с собственным значением $\delta_1\cdot\delta_2\dots\delta_n$:

$$P\begin{pmatrix}1\dots n\\ i_1\dots i_n\end{pmatrix}Q(\delta_1\dots\delta_n)\cdot\frac{1}{2}c_1\dots c_n = \qquad (12)$$

$$=\frac{1}{2}\delta_1\dots\delta_n c_{i_1}\dots c_{i_n} = \delta_1\dots\delta_n\cdot\Delta.$$

5. Выведем несколько соотношений, которые понадобятся нам в дальнейшем. Рассмотрим базисный вектор $e=a_1^-\dots a_p^- c_{p+1}\dots c_q$ и пусть Δ – вектор, определенный выше.

Нетрудно вычислить коммутатор $[\Delta, e]$. Оказывается:

$$[\Delta, a_1^- \dots a_p^- c_{p+1} \dots c_q] = \begin{cases} 0 & - p - \text{чётно} \\ a_1^- \dots a_p^- c_{q+1} \dots c_{q_n} - & p - \text{нечётно} \end{cases} \tag{13}$$

Вывод формулы (13) значительно упрощается, если иметь в виду, что:

$$a_i^{\epsilon_i} c_i = \epsilon_i a_i^{\epsilon_i}, \; c_i a_i^{\epsilon_i} = -a_i^{\epsilon_i}, \; c_i c_i = 1 . \tag{14}$$

Определим оператор π равенством:

$$\pi \cdot v = [\Delta [\Delta, v]] \tag{15}$$

для любого $v \in V_n$. Тогда из (13) имеем:

$$\pi \cdot a_1 \dots a_p c_{p+1} \dots c_q = \begin{cases} 0 & - p - \text{четно} \\ a_1 \dots a_p c_{p+1} \dots c_q & - p - \text{нечётно} . \end{cases} \tag{16}$$

Пусть $g \in G$ – автоморфизм, определенный формулой (11). Действуя элементом g на левую и правую часть равенства (16) и учитывая, что $g(\pi \cdot a_1 \dots a_p c_{p+1} \dots c_q) = g(\pi) . g(a_1 \dots a_p c_{p+r} \dots c_q)$ и $g(\pi) = \pi$, получаем:

$$\pi \cdot a_{i_1}^{\epsilon_1} \dots a_{i_p}^{\epsilon_p} c_{i_{p+1}} \dots c_{i_q} = \begin{cases} 0 & p - \text{чётно} \\ a_{i_1}^{\epsilon_1} \dots a_{i_p}^{\epsilon_p} c_{i_{p+1}} \dots c_{i_q} & p - \text{нечётно} \end{cases} \tag{17}$$

Если p – чётно (нечётно), то $2q - p$ также чётно (нечётно). Тем самым мы получили следующий результат:

6. Лемма 1. Все элементы пространства V_n являются собственными векторами оператора π. Собственное значение оператора π, соответствующее произвольному нечётному (чётному) элементу, равно единице (нулю). Поэтому оператор π проектирует алгебру V_n (R_n) на её нечётное подпространство $V_n^e (R_n^e)$ (см. (5)), т.е.

$$\pi V_n = V_n^e , \tag{18}$$

$$\pi R_n = R_n^e . \tag{19}$$

Лемма 2. Пусть V – алгебра Ли, W – ее простая подалгебра и J – идеал в V. Тогда либо $W \subset J$, либо $W \cap J = 0$.

<u>Доказательство:</u> Нетрудно показать, что $J' = J \cap W$ является идеалом в W. Так как по предположению алгебра W проста, то либо $J' = 0$, либо $J' = W$.

7. Теорема 1. Алгебра V_n распадается в прямую сумму своего центра S и простую подалгебру R_n, т.е.

$$V_n = S \oplus R_n . \tag{20}$$

Теорему докажем методом математической индукции. Для случая $n=1$ теорема верна. Действительно, V_1 имеет следующий базис:

$$B_1 = \{1, a^-, a^+, c = a^- a^+ - a^+ a^-\}, \qquad (21)$$

причём $[a^-, a^+] = c$, $[a^-, c] = -2a^-$

$$[a^+, c] = 2a^+. \qquad (22)$$

Поэтому алгебра R_1 с базисом a^-, a^+, c проста и является идеалом в V_1.

$$V_1 = S \oplus R_1. \qquad (23)$$

Над полем комплексных чисел C алгебра R_1 изоморфна алгебре A_1 (в классификации Картана), т.е. $SU(2, C)$. Обозначим через V^i_{n-1} подалгебру алгебры V_n, состоящую из всех полиномов операторов рождения и уничтожения, за исключением i-ой пары $a^{\epsilon}_{i_1}$ $(\epsilon = \pm 1)$.

Предположим, что для V^i_{n-1} теорема верна, т.е.

$$V^i_{n-1} = S \oplus R^i_{n-1}, \qquad (24)$$

где R^i_{n-1} проста, и докажем утверждение для V_n.

Доказательство разобьем на несколько частей:

а) Найдем сначала минимальный идеал J_n, который содержит подалгебру R^n_{n-1}. Так как $a^+_1 \subseteq R^n_{n-1}$, то

$$[\frac{1}{2} a^-_1 c_2 \dots c_n, a^+_1] = \frac{1}{2} c_1 \dots c_n \subseteq J_n \qquad (25)$$

т.е.

$$\Delta \subseteq J_n. \qquad (26)$$

Если f - произвольный нечётный элемент, то (см. лемму1):

$$\pi \cdot f = [\Delta, [\Delta, f]] = f \subseteq J_n. \qquad (27)$$

Пусть $a^{\epsilon_1}_{i_1}, \dots a^{\epsilon_p}_{i_p} c_{p+1} \dots c_q$ - произвольный чётный базисный вектор, для которого $p \neq 0$. Тогда

$$[\frac{1}{2} a^{\epsilon_1}_{i_1}, a^{\epsilon_2}_{i_2} \dots a^{\epsilon_p}_{i_p} c_{p+1} \dots c_q] = a^{\epsilon_1}_{i_1} \dots a^{\epsilon_p}_{i_p} c_{p+1} \dots c_q$$

и так как $\frac{1}{2} a^{\epsilon_1}_{i_1} \subseteq J_n$, то

$$a^{\epsilon_1}_{i_1} \dots a^{\epsilon_p}_{i_p} c_{i_{p+1}} \dots c_{i_q} \subseteq J_n. \qquad (28)$$

Кроме того,

$$[a^-_{i_1}, a^+_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_q}] = c_{i_1} \dots c_{i_q} \subseteq J_n. \qquad (29)$$

Поэтому все чётные базисные векторы не нулевого порядка, а, следовательно, и их линейные комбинации принадлежат J_n. Тем самым $R_n \subset J_n$. Так как R_n - идеал, содержащий R^n_{n-1}, то $J_n \subset R_n$.

Поэтому

$$R_n = J_n. \qquad (30)$$

б) Рассмотрим оператор

$$\nabla = \frac{1}{4} ad\, a^-_n (ad\, a^+_n)^2 \, ad\, a^-_n \cdot \pi, \qquad (31)$$

где для произвольного элемента $a \subset V_n$ оператор $ad\, a$ определяется равенством ($\xi \subset V_n$):

$$ad\, a \cdot \xi = [a, \xi]. \qquad (32)$$

Покажем, что ∇ является оператором проецирования алгебры R_n на нечётное подпространство R^{0}_{n-1} подалгебры R^{n}_{n-1}. Пусть e_i, f_j $(i, j = 1,2,\dots)$ – совокупность всех чётных и нечётных базисных векторов алгебры R^{n}_{n-1}. Произвольный элемент $r \subset R_n$ всегда может быть представлен в виде (сумма по повторяющимся индексам):

$$r = \alpha^{i} e_i a_n^- + \overset{\approx}{\alpha}{}^{i} f_i a_n^- + \beta^{j} e_j a_n^+ + \overset{\approx}{\beta}{}^{j} f_j a_n^+ +$$

$$+ \gamma^{k} f_k c_n + \overset{\approx}{\gamma}{}^{k} e_k c_n + \overset{\approx}{\delta}{}^{\ell} e_\ell + \delta^{\ell} f_\ell . \qquad (33)$$

Проекция r на R^{0}_{n-1} равна $\delta^{\ell} f_\ell$. Действуя оператором ∇ на r и, учитывая (см. лемму 1), что все слагаемые с отмеченными тильдой (не отмеченными) коэффициентами в (33) являются собственными векторами оператора π с собственным значением нуль (единица), имеем:

$$\nabla r = \frac{1}{4}[a_n^-, [a_n^+, [a_n^+, [a_n^-, \alpha^{i} e_i a_n^- + \gamma^{k} f_k c_n +$$

$$+ \beta^{j} e_j a_n^+ + \delta^{\ell} f_\ell]]]] . \qquad (34)$$

Коммутация первых двух слагаемых с a_n^+ дает нуль. Для первого слагаемого это очевидно. Для второго, учитывая, что a_n^- и f_k антикоммутируют и что $(a_n^-)^2 = 0$, имеем:

$$[a_n^-, f_k c_n] = [a_n^-, f_k (a_n^- a_n^+ - a_n^+ a_n^-)] =$$

$$= a_n^- f_k (a_n^- a_n^+ - a_n^+ a_n^-) - f_k (a_n^- a_n^+ - a_n^+ a_n^-) a_n^- = 0. \qquad (35)$$

Остальные два слагаемых являются собственными векторами оператора $ad\, a_n^+ \; ad\, a_n^-$ с собственным значением 2.

Поэтому получаем:

$$\nabla r = \frac{1}{2}[a_n^-, [a_n^+, \beta^{j} e_j a_n^+ + \delta^{\ell} f_\ell]] . \qquad (36)$$

Первое слагаемое дает, очевидно, нулевой вклад, а второе удваивается. Поэтому имеем окончательно:

$$\nabla r = \delta^{\ell} f_\ell \subset R^{0}_{n-1} , \qquad (37)$$

что и требовалось доказать.

в) Пусть J – идеал в R_n с нулевой проекцией на подпространство R^{n}_{n-1}. Тогда $J = R_n$. Докажем это. Пусть $r \subset J$ такой элемент, что в разложении (33) этого элемента хотя бы один из коэффициентов δ^{ℓ} или $\overset{\approx}{\delta}{}^{\ell}$ отличен от нуля. Допустим сначала, что для некоторого ℓ_0 коэффициент $\delta^{\ell_0} \neq 0$. Тогда из 7б мы получаем (см. (37))

$$\nabla r = \delta^{\ell} f_\ell \subset R^{n}_{n-1} . \qquad (38)$$

Из определения оператора ∇ следует, что если $r \in J$, то $\nabla r \in J$. Поэтому $J \cap R^n_{n-1} \neq 0$. Так как по предположению индукции алгебра R^n_{n-1} проста, то (см. лемму 2) $R^n_{n-1} \subset J$.

Следовательно, минимальный идеал J_n, содержащий R^n_{n-1}, содержится в J. Однако (см. (30)) $J_n = R_n$ и поэтому $R_n \subset J$. Так как обратное включение выполняется по условию, то $J = R_n$.

Рассмотрим элемент $r_1 \in J$ и допустим, что в разложении (33) коэффициент $\tilde{\tilde{\delta}}^{\ell_0}$, находящийся перед базисным вектором $(p>0)$

$$e_{\ell_0} = a_{i_1}^{\epsilon_1} \dots a_{i_p}^{\epsilon_p} c_{i_{p+1}} \dots c_{i_q} \in R^n_{n-1},$$

отличен от нуля. Тогда элемент $\tilde{\tilde{r}} = [a_{i_1}^{\epsilon_1}, r_1] \in J$, причём нечётный базисный вектор

$$[a_{i_1}^{-\epsilon_1}, a_{i_1}^{\epsilon_1} \dots a_{i_p}^{\epsilon_p} c_{i_{p+1}} \dots c_{i_q}] = a_{i_2}^{\epsilon_2} \dots a_{i_p}^{\epsilon_p} c_{i_{p+1}} \dots c_{i_q}$$

входит в разложение (33) вектора $\tilde{\tilde{r}}$ с ненулевым коэффициентом и поэтому, согласно выше доказанному, $J = R_n$. Совершенно аналогично доказывается, что если $r \in J$ содержит ненулевую координату вектора $c_{i_1} \dots c_{i_p}$, то $J = R_n$.

Рассмотренные три случая исчерпывают все возможности. Тем самым

$$J = R_n. \qquad (39)$$

г) так как все подалгебры R^i_{n-1} изоморфны алгебре R^n_{n-1}, то из предыдущего предположения следует, что, если алгебра R_n содержит нетривиальный идеал J, то он не пересекает ни одной из простых подалгебр R^i_{n-1}. Допустим, что такой идеал существует.

Тогда все элементы, принадлежащие J, являются линейными комбинациями базисных векторов вида:

$$a_{i_1}^{\epsilon_1} \dots a_{i_p}^{\epsilon_p} c_{i_{p+1}} \dots c_{i_n}. \qquad (40)$$

Допустим, что $r \in J$ имеет ненулевую проекцию на нечётный базисный вектор $g = a_1^- \dots a_p^- c_{p+1} \dots c_n$. Тогда $[g,r] = a_1^- \dots a_p^- \in R^n_{n-1}$ и $[g,r] \in J$. Следовательно, $J \cap R^n_{n-1} \neq 0$, что приводит к противоречию. Отсюда и из предложения 3 (формулы (11) и (12)) непосредственно вытекает, что если $r \in J$ имеет ненулевой коэффициент перед нечётным вектором (40), то $J \cap R^{i_n}_{n-1} \neq 0$, что невозможно. Следовательно, J не содержит линейных комбинаций нечётных векторов вида (40).

Допустим p – чётно. Тогда:

$$[a_1^+, a_1^- \dots a_p^- c_{p+1} \dots c_n] = a_2 \dots a_p c_{p+1} \dots c_n \in R^1_{n-1}.$$

Используя опять предположение 3, получаем, что J не может являться линейной комбинацией чётных векторов вида (40). Следовательно, J пусто. Итак, мы показали, что если алгебра R^n_{n-1} проста, то алгебра R_n не содержит нетривиальных идеалов. Следовательно, она тоже проста. Из этого следует, что S является центром алгебры V_n. Тем самым теорема доказана.

8. Предыдущая теорема показывает, что наиболее широкая простая алгебра Ли, которая может быть построена из n пар операторов рождения и уничтожения – это алгебра R_n. Действительно, алгебра V_n не может быть расширена алгебраически /1/ и поэтому V_n является наиболее широкой алгеброй Ли, а R_n – ее максимальной простой подалгеброй.

Для того, чтобы найти, какой классической алгебре Ли изоморфна алгебра R_n, найдем ее размерность. Совокупность всех упорядоченных мономов от $a_i^{\epsilon_i}$ $(i=1,\dots,n)$ является базисом в V_n, причём из антикоммутационных соотношений (1) следует, что всякий базисный элемент содержит $a_i^{\epsilon_i}$ не более одного раза. Поэтому число базисных векторов порядка m равно $\binom{2n}{m}$, а размерность $[V_n]$ алгебры V_n равна:

$$[V_n] = \sum_{m=0}^{2n} \binom{2n}{m} = 4^n. \tag{40}$$

Следовательно, $[R_n]=4^n-1$. Для $n > 2$ единственной комплексной алгеброй Ли, которая имеет размерность 4^n-1, является алгебра A_{2^n-1}. Если $n=1(2)$, то имеется несколько алгебр Ли с размерностями 3 (15) – это алгебры A_1, B_1, C_1, (A_3, D_3). Как известно, однако,/2/ эти алгебры изоморфны между собой: $A_1 \approx B_1 \approx C_1$ ($A_3 \approx D_3$). Поэтому размерность (40) алгебры R_n достаточна для ее идентификации. Алгебра R_n изоморфна алгебре A_{2^n-1}:

$$R_n \approx A_{2^n-1} . \tag{41}$$

Итак, мы доказали следующую теорему:

Теорема 2. Максимальная комплексная алгебра, которая может быть построена из n пар ферми-операторов, изоморфна алгебре A_{2^n-1}. Любая ее действительная форма является максимальной действительной алгеброй Ли того же числа ферми-операторов.

Автор выражает благодарность Д.Ц. Стоянову за полезные дискуссии, а также А.Н. Тавхелидзе за предоставленную возможность обсудить настоящую работу на семинаре по теории поля.

Литература

1. См., например, H.D. Doebner and T.D. Palev, "Realizations of Lie Algebras through Rational Functions of Cannonical Variables", ICTP, Trieste, IC/70/18,

2. Л.С. Понтрягин. "Непрерывные группы", ГИТЛ, Москва, 1954 г.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 августа 1970 года.