СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 5302

В.И. Журавлев, В.А. Мещеряков

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

О p-ВОЛНАХ πN-РАССЕЯНИЯ В МОДЕЛИ С КОРОТКОВОЛНОВЫМ ОТТАЛКИВАНИЕМ

1970

P2 - 5302

В.И. Журавлев, В.А. Мещеряков

О p-ВОЛНАХ πN-РАССЕЯНИЯ В МОДЕЛИ С КОРОТКОВОЛНОВЫМ ОТТАЛКИВАНИЕМ

1. Введение

В работе В.В. Серебрякова и Д.В. Ширкова [1] получена система уравнений для s- и p - волн πN - рассеяния, обобщающая уравнения Чу, Гольдберга, Лоу и Намбу (ЧГЛН) [2]. Для p-волн в статическом пределе они имеют вид:

$$f_i(\omega) = \frac{2}{3}\frac{f^2}{\omega}(\Lambda_1)_i + \Phi_i(\omega) + \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \left(\frac{\operatorname{Im} f_i(\omega')}{\omega' - \omega} + A_{ik}\frac{\operatorname{Im} f_k(\omega')}{\omega' + \omega} \right) d\omega', \qquad (1)$$

где

$$\Phi_i(\omega) = \phi_i(\omega) + \Psi_i(\omega) + X_i(\omega),$$

$$\phi_i(\omega) = \frac{1}{3}\left[\frac{8S(I)_i}{m_\sigma^2 + 4q^2} + \frac{R m_\rho^2 (1 + 2\mu_N)(\Lambda_2)_i}{M(m_\rho^2 + 4q^2)} + \frac{8\omega R(\Lambda_3)_i}{m_\rho^2 + 4q^2} \right],$$

$$\Psi_i(\omega) = \frac{2\gamma(I)_i}{3(M_p^2 + 4q^2)} = \Psi(\omega)(I)_i,$$

$$X_i(\omega) = \frac{2\omega\gamma_B(\Lambda_1 + \Lambda_3)_i}{3M(M_p^2 + 4q^2)} = X(\omega)(\Lambda_1 + \Lambda_3)_i.$$

Здесь

$$f_i(\omega) = e^{i\delta_i(\omega)} \sin \delta_i(\omega) / q^3, \quad i = \{(11), (13), (31), (33)\},$$

$\omega = \sqrt{q^2+1}$ – энергия мезона, $f^2 \simeq 0{,}08$ – пион-нуклонная константа связи, μ_N – аномальный магнитный момент нуклона и

$$R = \frac{g_{1V}\, g_{1\rho}}{8\pi m_\rho^2}, \qquad S = \frac{g_{\sigma NN}\, g_\sigma}{4\pi m_\sigma^2}.$$

Константы γ, γ_B и M_P учитывают вклад области высоких энергий, а матрицы в (1) имеют вид:

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 & 16 \\ -2 & -1 & 8 & 4 \\ -2 & 8 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

и I – единичный столбец.

Система (1) отличается от уравнений ЧГЛН наличием "потенциалов" $\Phi_i(\omega)$, которые учитывают вклады аннигиляционного канала ($\phi_i(\omega)$) и области высоких энергий ($\Psi_i(\omega)$ и $X_i(\omega)$) – эффекты коротковолнового отталкивания. Авторы работы/1/ не пытались решать уравнения, но проверили их согласованность с имеющимися экспериментальными данными по πN – рассеянию при низких энергиях. Вопрос о существовании решений уравнений (1), а также уравнений ЧГЛН, до сих пор остается открытым.

Известно, что фазы δ_{13} и δ_{31} малы по сравнению с резонансной фазой δ_{33}. Поэтому представляется разумным использовать приближение $f_{13} = f_{31} = 0$. Отметим, что в рамках обычной схемы ЧГЛН это приближение приводит к противоречию с условием унитарности/3/. В модели с коротковолновым отталкиванием можно математически непротиворечиво учесть это приближение за счёт выбора функций $\Psi(\omega)$ и $X(\omega)$. Аналогичная процедура использовалась в случае $\pi\pi$ – рассеяния/4/. В работе/4/ функция, описывающая вклад области высоких энергий, выбира-

лась из условия $\mathrm{Im}\, A_2 = \mathrm{Re}\, A_2 = 0$, где A_2 – парциальная волна с изоспином 2. При этих предположениях получалась решаемая модель с разумными свойствами.

Ниже мы получим решаемую модель из условий $f_{13} = f_{31} = 0$.

2. Формулировка модели

Определим функции $\Psi(\omega)$ и $X(\omega)$ из второго и третьего уравнений (1) так, чтобы $\mathrm{Re} f_{13} = \mathrm{Im} f_{13} = 0$ и $\mathrm{Re} f_{31} = \mathrm{Im} f_{31} = 0$. Подставляя полученные выражения для $\Psi(\omega)$ и $X(\omega)$ в первое и четвертое уравнения (1), получим:

$$f_i(\omega) = \frac{2f^2}{\omega}(\tilde{\tilde{\Lambda}}_1)_i + \tilde{\tilde{\Phi}}_i(\omega) + \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \left(\frac{\mathrm{Im}\, f_i(\omega')}{\omega' - \omega} + \tilde{\tilde{A}}_{ik} \frac{\mathrm{Im}\, f_k(\omega')}{\omega' + \omega} \right) d\omega'. \qquad (2)$$

Здесь $i = \{(11), (33)\}$,

$$\tilde{\tilde{\Phi}}_i(\omega) = \frac{R m_\rho^2 (1 + 2\mu_N)(\tilde{\tilde{\Lambda}}_2)_i}{M(m_\rho^2 + 4q^2)} + \frac{8\omega R (\tilde{\tilde{\Lambda}}_3)_i}{m_\rho^2 + 4q^2},$$

$$\tilde{\tilde{A}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\tilde{\Lambda}}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\tilde{\Lambda}}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\tilde{\Lambda}}_3 = -\tilde{\tilde{\Lambda}}_1,$$

Следуя работе В.А. Мещерякова/5/, построим функцию

$$v(q^2) = \frac{V(q^2)}{V(-1)}, \qquad V = \frac{1}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)},$$

где положение полюсов ω_1, ω_2 определяется из уравнения

$$\omega^2 + \frac{1}{4} m_\rho^2 - 1 = 0.$$

Тогда для функций $h_i(\omega)=f_i(\omega)/v(q^2)$ справедливы уравнения, аналогичные уравнениям Чу-Лоу:

$$h_i(\omega)=\frac{2f^2}{\omega}(\tilde{\tilde{\Lambda}}_1)_i+\frac{1}{\pi}\int_1^\infty\left(\frac{\operatorname{Im} h_i(\omega')}{\omega'-\omega}+\tilde{\tilde{A}}_{ik}\frac{\operatorname{Im} h_k(\omega')}{\omega'+\omega}\right)d\omega'. \qquad (3)$$

Уравнения (3) определяют аналитические функции $h_i(\omega)$ со следующими свойствами:

1) $h_i(\omega)$ аналитичны в комплексной плоскости ω с разрезами $(-\infty,-1]$, $[+1,+\infty)$;

2) $h_i^*(\omega)=h_i(\omega^*)$;

3) $\operatorname{Im} h_i(\omega+i0)=q^3v(q^2)|h_i(\omega+i0)|^2$ – условие унитарности:,

4) $h_i(-\omega)=\tilde{\tilde{A}}_{ij}\,h_j(\omega)$ – условие перекрестной симметрии;

5) $h_i(\omega)$ имеют в нуле полюс первого порядка,

$$\operatorname{Res} h_i(\omega)=2f^2(\tilde{\tilde{\Lambda}}_1)_i;$$

6) $h_i(\omega)\to 0$ для $|\omega|\to\infty$ и $\operatorname{Im}\omega\neq 0$.

Заметим, что матрица $\tilde{\tilde{A}}$ не удовлетворяет всем условиям, налагаемым на матрицу перекрестной симметрии. Для нее справедливо свойство

$$A^2=E, \qquad (4)$$

но она не удовлетворяет уравнениям

$$\sum_j A_{ij}=1. \qquad (5)$$

Перейдем от функций $h_i(\omega)$ к матричным элементам S-матрицы/6/:

$$S_i(\omega)=e^{2i\delta_i(\omega)}=1+2iq^3v(q^2)h_i(\omega). \qquad (6)$$

Для функций $S_i(\omega)$ основные свойства 1)–4) имеют вид:

1) $S_i(\omega)$ – аналитические функции в комплексной плоскости с разрезами $(-\infty,-1]$, $[+1,+\infty)$;

2) $S_i^*(\omega)=S_i(\omega^*)$;

3) $|S_i(\omega+i0)|^2=1$ для $\omega>1$;

4) $S_i(-\omega)=\tilde{\tilde{A}}_{ij}\,S_j(\omega)+\frac{2}{3}(\tilde{\tilde{\Lambda}}_1)_i$.

Несколько необычный вид условия перекрестной симметрии 4) связан с тем, что матрица $\tilde{\tilde{A}}$ не удовлетворяет (5). В следующем разделе мы найдем функции $S_i(\omega)$, удовлетворяющие условиям 1)–4).

3. Решение уравнений

С помощью конформного преобразования/6,7/

$$w=\frac{1}{\pi}\arcsin\omega$$

перейдем к переменной w. Условия 1)–4) принимают следующий вид:

1) $S_i(w)$ – столбец мероморфных в плоскости w функций;

2) $S_i^*(w)=S_i(w^*)$;

3) $S_i(1-w)S_i(w)=1$ (условие унитарности);

4) $S_i(-w)=\tilde{\tilde{A}}_{ij}S_j(w)+\frac{2}{3}(\tilde{\tilde{\Lambda}}_1)_i$.

Таким образом, задача сводится к решению системы нелинейных функциональных уравнений 3), 4) в классе мероморфных действительных функций комплексного переменного w.

Легко видеть, что условия 3), 4) оставляют инвариантной следующую функциональную связь:

$$S_{11}(w)=-S_{33}(w). \qquad (7)$$

Из условия 4) следует, что столбец функций $S_i(w)$ выражается следующим образом через свои чётную и нечётную части:

$$S(w)=\begin{pmatrix}2s(w)-1-a(w)\\ s(w)+a(w)\end{pmatrix}, \qquad (8)$$

где $a(w)$ – нечётная, а $s(w)$ – чётная функции w. С учётом инвариантной связи (7) имеем:

$$S(w)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}-a(w) \\ \\ \frac{1}{3}+a(w) \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Нечётная функция $a(w)$ должна удовлетворять уравнению (условие унитарности):

$$[\frac{1}{3}+a(w)][\frac{1}{3}+a(1-w)]=1. \qquad (10)$$

Уравнение (10) относится к дробно-линейному типу /8/. Для его решения введем функцию $\phi(w)=[a(w)-\gamma]^{-1}$, где постоянная γ определяется из алгебраического уравнения

$$\gamma^2+\frac{2}{3}\gamma-\frac{8}{9}=0, \quad \gamma_1=\frac{2}{3}, \quad \gamma_2=-\frac{4}{3}.$$

$\phi(w)$ подчиняется уравнению

$$\phi(w)+\phi(1-w)=-\frac{1}{\gamma+\frac{1}{3}}, \qquad (11)$$

общее решение которого есть

$$\phi(w)=g(w)-\frac{1}{2(\gamma+\frac{1}{3})}, \quad g(w)=-g(1-w).$$

Следовательно,

$$a(w)=\gamma+\frac{1}{g(w)-\frac{1}{2(\gamma+\frac{1}{3})}}. \qquad (12)$$

Нечётность функции $a(w)$ накладывает дополнительное ограничение на $g(w)$. Рассмотрим случай, когда $\gamma=\frac{2}{3}$. Из условий $a(w)=-a(-w)$ и $g(w)=-g(1-w)$ получим:

$$4g(w+1)g(w)+g(w+1)-g(w)+2=0. \qquad (13)$$

Уравнение (13) также относится к дробно-линейному типу и решается аналогично (10). Общее решение (13) есть

$$g(w)=\pm a\,\frac{\lambda^{w+\beta(w)-\frac{1}{2}}+1}{\lambda^{w+\beta(w)-\frac{1}{2}}-1}, \qquad (14)$$

где

$$2a^2+1=0, \quad \lambda=\frac{1+4a}{1-4a} \qquad (15)$$

и

$$\beta(w)=-\beta(-w), \quad \beta(w)=\beta(w+1), \quad \beta(w^*)=\beta^*(w). \qquad (16)$$

Подставляя (14) в (12), получим

$$a(w)=-\mathrm{th}\frac{c}{2}\,\mathrm{cth}\frac{c}{2}(w+\beta(w)),$$

$$a(w)=-\mathrm{th}\frac{c}{2}\,\mathrm{th}\frac{c}{2}(w+\beta(w)), \quad c=\ln\lambda. \qquad (17)$$

Случай $\gamma = -\frac{4}{3}$ приводит к функциям $a(w)$, которые совпадают с (17).

Окончательно для $S_i(w)$ имеем два типа решений

$$S(w) = \frac{1}{3}\left[1 - \mathrm{th}\frac{c}{2}\,\mathrm{cth}\,\frac{c}{2}(w+\beta(w))\right]\begin{pmatrix}-1\\+1\end{pmatrix}, \tag{18а}$$

$$S(w) = \frac{1}{3}\left[1 - \mathrm{th}\frac{c}{2}\,\mathrm{th}\,\frac{c}{2}(w+\beta(w))\right]\begin{pmatrix}-1\\+1\end{pmatrix}. \tag{18б}$$

Действительность функций $S_i(w)$ легко проверить.

При получении решений (18) существенно использовалась функциональная связь (7). Мы не можем показать, что все решения, удовлетворяющие условиям 1)-4), принадлежат к этому типу. Однако, если мы учтем, что функции h_i, а, следовательно, и S_i, должны иметь полюс в нуле, то можно привести некоторые соображения в пользу этого. Действительно, из условия унитарности 3) следует, что $S_{11}(1) = S_{33}(1) = 0$. Применяя совместно 3) и условие перекрестной симметрии 4), получим

$$S_{11}(n) = -S_{33}(n), \tag{19}$$

где n - любое целое число. Если дополнительно потребовать, чтобы $f(w) = S_{11}(w) + S_{33}(w)$ была регулярна при $\mathrm{Re}\,w > A$ и $|f(w)| < e^{a|w|}$, где $a < \pi$, $\mathrm{Re}\,w > A$, то по теореме Карлсона/9/ из (19) следует $S_{11}(w) = -S_{33}(w)$.

Из двух найденных решений (18) только (18б) имеет полюс в нуле. Таким образом, функции h_i, удовлетворяющие свойствам 1)-5), есть

$$h_{11} = \frac{1}{3v(-\cos^2\pi w)\cos^3\pi w}\left(\mathrm{th}\frac{c}{2}\cdot\mathrm{th}\frac{c}{2}w - 4\right)$$

$$h_{33} = \frac{-1}{3v(-\cos^2\pi w)\cos^3\pi w}\left(\mathrm{th}\frac{c}{2}\,\mathrm{th}\frac{c}{2}w + 2\right). \tag{20}$$

Свойство 6), очевидно, выполнено, следовательно, (20) удовлетворяют уравнению (3).

4. Заключение

Мы показали, что решение уравнения (3) обладает свойством $S_{11}(\omega) = -S_{33}(\omega)$. Это приводит к равенству длин рассеяния $a_{11} = a_{33}$ и к постоянному сдвигу фаз между $\delta_{11}(\omega)$ и $\delta_{33}(\omega)$, равному $\frac{\pi}{2}$, что противоречит экспериментальным данным. Для того, чтобы удовлетворить условию $f_{13} = f_{31} = 0$, мы воспользовались функциями $\Psi(\omega)$ и $X(\omega)$, которые должны быть малы при $\omega \to 0$. Однако, т.к. $f_i(\omega)$ имеют полюс при $\omega = 0$, функция $\Psi(\omega)$ оказалась не мала при $\omega \to 0$. Как нам кажется, это и является причиной противоречия с экспериментальными данными. В случае $\pi\pi$ - рассеяния парциальные амплитуды не имеют полюса в нуле, и аналогичная процедура там более оправдана/4/.

Авторы благодарны Д.В. Ширкову, обратившему их внимание на рассмотренную модель.

Литература

1. V.V. Serebryakov, D.V. Shirkov. Nucl. Phys., B6, 607 (1968).
2. G. Chew, F. Low, M. Goldberger and Y. Nambu. Phys. Rev., 106, 1337 (1957).
3. J.H. Schwarz. Phys. Rev., 152, 1325 (1966).
4. В.В. Серебряков, Д.В. Ширков. ЯФ, 7, 170 (1968).
5. В.А. Мещеряков. ЖЭТФ, 53, 175 (1967).
6. В.А. Мещеряков. ЖЭТФ, 51, 648 (1966).
7. T. Rothelutner. Zs. Phys., 177, 287 (1964).
8. В.И. Журавлев, В.А. Мещеряков, К.В. Рерих. ЯФ, 10, 168 (1969).
9. Е. Титчмарш. "Теория функций". Москва, 1951.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 августа 1970 года.