ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 5283

В.М. Дубовик, А.А. Чешков

МУЛЬТИПОЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ТОКА В КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

(I)

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1970

P2 - 5283

В.М. Дубовик, А.А. Чешков

МУЛЬТИПОЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ТОКА В КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

(I)

Направлено в ЖЭТФ

§ 1. Введение

Цель настоящей работы – развить на основании классических мультипольных разложений формализм, феноменологическим образом описывающий электромагнитные вершины, содержащие частицы с высшими спинами[x)], и рассмотреть в нем простейший процесс – излучение γ -кванта.

Еще лет десять назад работы по электромагнитным взаимодействиям частиц с высшими спинами имели характер абстрактных теоретических исследований. В настоящее время в связи с успехами физики высоких энергий ситуация резко изменилась. Сейчас известно около двухсот "элементарных" частиц, причем больше половины из них имеют спины $j \geq 1$. Следует учесть, что имеется явная тенденция увеличения значений спинов для высших состояний.

Поскольку мы не знаем динамической картины взаимодействия фотонов с элементарной частицей, приходится применять феноменологическое описание процессов. Теоретико-групповое рассмотрение полевых операторов позволяет выражать матричные элементы, описывающие электромагнитные процессы, через инвариантные функции – формфакторы. Необходимость выделения инвариантных величин из амплитуды упругого электромагнитного рассеяния, комптон-эффекта, фото- и электророждения резонансов возникает в дисперсионном подходе. Выражение вершинных функций через формфакторы необходимо также при использовании таких новых методов, как модели симметрии элементарных частиц и алгебры токов.

[x)] Высшими спинами принято называть спины $j \geq 1$.

К частицам с высшими спинами можно отнести также и ядра. Одним из инструментов исследований структуры ядер является рассеяние электронов на ядрах. В настоящее время в связи с ростом энергий эксперимента появляется необходимость вводить в расчеты высшие мультипольные моменты ядер. Следует также учитывать все релятивистские эффекты в рассеянии, поскольку, например, эффект отдачи ядра в экспериментах на новейших электронных ускорителях может быть значителен не только для легких, но и для средних и даже для тяжелых ядер.

Прогресс в методике создания поляризованных мишеней открывает новые экспериментальные возможности дальнейшего детального исследования электромагнитной структуры нуклонов и ядер (измерение высших мультипольных формфакторов частиц).

В связи с вышеизложенным, а также с гипотезой о нарушении CP-инвариантности в электромагнитных взаимодействиях феноменологическое описание электромагнитных свойств частиц получило дальнейшее развитие. Более детально изучены свойства оператора электромагнитного тока при P – и T–отражениях. Открыто новое семейство мультипольных токовых моментов, отличных от зарядовых и магнитных.

Последнее обстоятельство заставляет вновь детально рассмотреть старый вопрос о мультипольном разложении электромагнитного тока в классическом и в квантовом случаях.

§ 2. Мультипольные моменты классического электромагнитного тока

Под разложением тока по мультипольным моментам обычно подразумевается разложение плотности тока в ряд по полному набору "δ-образных" функций пространственных координат, т.е. функций, отличных от нуля только на бесконечно малом интервале и преобразующихся по неприводимым представлениям группы O(3). Коэффициенты разложения называются мультипольными моментами тока (полный заряд, электрический и магнитный дипольные моменты и т.д.). Мультипольные моменты вместо со средними значениями их 2^L –степенных радиусов распределений, очевидно, полностью определяют плотность тока, т.е. задание их значений эквивалентно заданию плотности тока.

Поскольку 4-вектор плотности тока $J_\mu = \{\rho, \vec{J}\}$ подчиняется условию сохранения

$$\partial_\mu J_\mu = 0 , \tag{1}$$

только три компонены J_μ являются независимыми функциями. При мультипольном разложении они порождают три семейства мультипольных моментов: кулоновское (зарядовое) и два токовых.

Если, как обычно, разложить пространственную часть J_μ на продольную и поперечную составляющие тока:

$$\vec{J} = \vec{J}_{||} + \vec{J}_{\perp} , \tag{2}$$

$$\mathrm{rot}\, \vec{J}_{||} = 0 , \quad \mathrm{div}\, \vec{J}_{\perp} = 0 , \tag{2a}$$

то закон сохранения (1) связывает кулоновские мультипольные моменты с мультипольными моментами продольной части тока $\vec{J}_{||}$:

$$-\dot{\rho} = \mathrm{div}\, \vec{J}_{||} , \tag{3}$$

так что плотность распределения заряда полностью определяет продольную составляющую тока.

Используя определение продольной и поперечной векторных функций (2a), разложение (2) можно представить в виде (см.,например, /1/ или /2/):

$$\vec{J} = \vec{J}_\perp + \vec{J}_{||} = \mathrm{rot}\,\vec{M} + \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{R} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi \,. \qquad (4)$$

В этом выражении векторные функции $\vec{M}$ и $\vec{R}$ определяют поперечную часть тока $\vec{J}_\perp$, а скалярная функция ϕ – продольную. Векторы $\vec{M}$ и $\vec{R}$ можно выразить через скалярные функции ψ и χ (см., например /1/,):

$$\vec{M} = \vec{x}\,\psi\,(\vec{x}, t)\,; \quad \vec{R} = \vec{x}\,\chi(\vec{x}, t)\,. \qquad (5)$$

Тогда три скалярные функции ψ, χ и ϕ (ϕ связана в силу уравнения (3) с ρ) полностью определят сохраняющийся ток J_μ x/. Разложение каждой из них в ряд порождает семейство соответствующих мультпольных моментов: $\phi\,(\rho)$ –зарядовых или кулоновских; ψ –магнитных (обычных); χ – второе семейство токовых моментов – магнитных моментов II рода /3/. Будем называть их тороидными; выбор названия станет ясным из дальнейшего (§3).

Простейший способ получения мультипольного разложения сводится к следующей формальной операции (см., например, /4/). Представим плотность тока $J_\mu\,(\vec{x}, t)$ в виде:

$$J_\mu\,(\vec{x}, t) = \int J_\mu\,(\vec{\xi}, t)\,\delta\,(\vec{\xi} - \vec{x}\,)\,d^3\xi\,. \qquad (6)$$

Подставляя в (6) разложение δ –функции в ряд Тейлора

$$\delta\,(\vec{x} - \vec{\xi}\,) = \sum_{L=0}^{\infty} \frac{(-1)^L}{L!}\,\xi_i\,\xi_j\,\ldots\,\xi_k\,\partial_i\,\partial_j\,\ldots\partial_k\,\delta\,(\vec{x}\,) \qquad (7)$$

---

x/ Подчеркнем, что такое введение $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{R}$ не противоречит теореме Гельмгольца, но вытекает из нее и расшифровывает ее смысл (см., например, /1/гл. 13).

и почленно интегрируя, получим для временной компоненты плотности тока

$$\rho(\vec{x},t) = \sum_{L=0}^{\infty} A^L_{ij\ldots k}(t)\,\partial_i\,\partial_j \ldots \partial_k\,\delta(\vec{x}) \tag{8}$$

и для пространственной компоненты

$$J_\ell(\vec{x},t) = \sum_{L=1}^{\infty} B^L_{\ell,ij\ldots k}(t)\,\partial_i\ \partial_j \ldots \partial_k\,\delta(\vec{x}), \tag{9}$$

где симметричный тензор L -ого ранга $A^L_{ij\ldots k}(t)$, равный

$$A^L_{ij\ldots k}(t) = \frac{(-1)^L}{L!} \int \xi_i\,\xi_j \ldots \xi_k\,\rho\ (\vec{\xi},t)\,d^3\xi\ , \tag{10}$$

является линейной комбинацией 2^L -польного кулоновского момента и средних значений 2^n -степеней радиусов распределения 2^{L-n} -польных кулоновских моментов плотности тока (напомним, что 2^L -польный момент является неприводимым тензором ранга L).

Аналогично тензоры

$$B^L_{\ell,i\,j\ldots k}(t) = \frac{(-1)^{L-1}}{(L-1)!} \int \xi_i\,\xi_j \ldots \xi_k\,J_\ell\ (\vec{\xi},t)\,d^3\xi \tag{11}$$

являются линейными комбинациями мультипольных моментов и их средних 2^n -степенных радиусов распределения продольной составляющей тока (симметричные по всем индексам части B^L) и поперечной составляющей тока (антисимметричные по различным парам индексов части B^L).

Выделение из A^L и B^L 2^L -польных моментов представляет собой чрезвычайно утомительную процедуру и в общем виде выполнить ее не удается[x/].

---

x/ Непосредственное разбиение тензора $\xi_i\,\xi_j\,J_\ell$ по неприводимым представлениям $0(3)$ показывает, что кроме обычного магнитного квадруполя в нем содержится еще диполь, не принадлежащий ни магнитному, ни кулоновскому семейству: $1 \times (2 \times 0) = 3 \times 2 \times 1 \times 1$ (ср. с /41/):

Поэтому нужно вместо разложения (7) использовать другой полный набор функций, каждая из которых преобразуется по неприводимому представлению группы трехмерных вращений.

Определение мультипольных моментов как неприводимых тензоров и, следовательно, разложение тока по неприводимым тензорным функциям характерно для методов теоретической физики и выражает стремление максимально избавиться в описании физических явлений от произвола в выборе систем отсчёта. Переменные во времени 2^L -польные моменты индуцируют 2^L -польное электромагнитное излучение, которое соответствует испусканию фотонов с моментом L, тогда как $A^L(t)$ и $B^L(t)$ индуцируют не только 2^L -польное излучение, но и излучение низших мультипольностей.

Подходящей полной системой функций является система регулярных решений уравнения Гельмгольца $F_{\ell m k}(\vec{x})$:

$$(\Delta + k^2) F_{\ell m k}(\vec{x}) = 0 , \tag{12}$$

$$\begin{gathered} F_{\ell m k}(\vec{x}) = f_\ell(kx) Y^*_{\ell m}(\vec{n}) , \\ \vec{n} = \vec{x}/|\vec{x}| = \{\theta, \phi\} . \end{gathered} \tag{12a}$$

Здесь $Y_{\ell m}(\vec{n})$ - сферические гармоники (в определении Эдмондса[5]), а $f_\ell(kx)$ - сферические функции Бесселя.

Функции $F_{\ell m k}(\vec{n})$ появляются естественным образом в определении мультипольных моментов плотности тока при разложении на мультиполи электромагнитного излучения данного 4-тока (см., например,[6,7]).

Функции $F_{\ell m k}(\vec{x})$ ортонормированы:

$$\int F_{\ell m k}(\vec{x}) F^*_{\ell' m' k'}(\vec{x})\, d^3x = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}\frac{1}{k^2}\delta(k-k'). \qquad (13)$$

Используя условие полноты функций

$$\sum_{\ell m k} F_{\ell m k}(\vec{x}) F^*_{\ell m k}(\vec{\xi}) = \delta(\vec{x}-\vec{\xi}),$$

$$\sum_{k} \equiv \int_0^\infty k^2\, dk \qquad (14)$$

и выражение для плотности тока (6), немедленно получаем разложение плотности заряда:

$$\rho(\vec{x},t) = \sum_{\ell m k} F_{\ell m k}(\vec{x})\, q_{\ell m}(k,t), \qquad (15)$$

где

$$q_{\ell m}(k,t) = \int F^*_{\ell m k}(\vec{x})\, \rho(\vec{x},t)\, d^3x. \qquad (16)$$

Если заряд сосредоточен в малой области, так что $\rho(\vec{x},t) \neq 0$ только при $kx \ll 1$, то можно воспользоваться для вычислений $q_{\ell m}(k,t)$ приближенными значениями $F_{\ell m k}(\vec{x})$. Пользуясь определением $f_\ell(a)$:

$$f_\ell(a) = i^\ell J_{\ell+1/2}(a)/\sqrt{a}, \qquad (17a)$$

$$f_\ell(a) \approx \sqrt{2/\pi}\,(ia)^\ell/(2\ell+1)!!, \tag{17б}$$

получаем

$$F_{\ell m k}(\vec{x}) \underset{kx\ll 1}{\approx} \sqrt{2/\pi}\,(ikx)^\ell\, Y^*_{\ell m}(\vec{n})/(2\ell+1)!!\,. \tag{18}$$

Сравнивая определение 2^ℓ -польного кулоновского момента (см., например,[8])

$$Q_{\ell m}(t) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} \int x^\ell\, Y_{\ell m}(\vec{n})\rho(\vec{x},t)\,d^3x\,, \tag{19}$$

и выражение $q_{\ell m}(k,t)$ при $k \to 0$ (в этом случае приближенное выражение (18) справедливо для любой функции $\rho(\vec{x},t)$, достаточно быстро убывающей с расстоянием), видим, что величины

$$Q_{\ell m}(-k^2,t) = \frac{(2\ell+1)!!\,\pi\sqrt{2}}{(-ik)^\ell\sqrt{2\ell+1}}\, q_{\ell m}(k,t) \tag{20}$$

являются кулоновскими 2^ℓ -польными распределениями, так что используя определение кулоновских распределений (20), получаем мультипольное разложение плотности заряда:

$$\rho(\vec{x},t) = \sum_{\ell m k} (-ik)^\ell\, \frac{\sqrt{(2\ell+1)/2}}{\pi(2\ell+1)!!}\, F_{\ell m k}(\vec{x})\,Q_{\ell m}(-k^2,t)\,. \tag{15a}$$

Кулоновские мультипольные распределения $Q_{\ell m}(-k^2, t)$ x/ можно разложить в степенной ряд

$$Q_{\ell m}(-k^2, t) = Q_{\ell m}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} k^{2n} Q_{\ell m}^{(n)}(t). \tag{21}$$

Учитывая свойства сферических функций Бесселя

$$(-2i)^n \frac{d^n}{(da^2)^n} \left[\frac{f_\ell(a)}{a^\ell} \right] = f_{\ell+n}(a)/a^{\ell+n}, \tag{22}$$

можно найти, что

$$Q_{\ell m}^{(n)}(t) = n! \, \overline{r_{\ell m}^{2n}}(t), \tag{23}$$

где

$$\overline{r_{\ell m}^{2n}}(t) = \frac{(2\ell+1)!!}{n! \, 2^n (2\ell + 2n + 1)!!} \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} \int x^{\ell+2n} Y_{\ell m}(\vec{n}) \rho(\vec{x}, t) \, d^3x \tag{24}$$

средний 2^n -степенной радиус распределения 2^ℓ -польного кулоновского момента. Разложение (21) теперь принимает вид:

$$Q_{\ell m}(-k^2, t) = Q_{\ell m}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-k^2)^n \, \overline{r_{\ell m}^{2n}}(t). \tag{25}$$

Если подставить ряд (25) в разложение плотности распределения заряда (15а) и почленно проинтегрировать по k, то получим разложение $\rho(\vec{x}, t)$ по производным δ -функции, преобразующимся по

---

x/ Замена переменной k на $-k^2$ несущественна и произведена, как будет видно в дальнейшем, для большей аналогии классических выражений с квантовыми.

неприводимым представлениям группы $O(3)$, то есть рассмотренная процедура позволяет получить в общем виде разложение плотности заряда по мультипольным моментам и их средним 2^n -степенным радиусам распределений.

При мультипольном разложении векторного поля (пространственной части тока $J_\mu(\vec{x}, t)$) выберем из тех же соображений, что и при разложении $\rho(\vec{x}, t)$, в качестве базисных функций полную систему регулярных решений векторного уравнения Гельмгольца:

$$(\Delta + k^2)\, \vec{Y}^{(\ell_0)}_{\ell m k}(x) = 0\,, \qquad \ell_0 = 0\,, \pm 1 \tag{26}$$

$$\vec{Y}^{(\ell_0)}_{\ell m k}(\vec{x}) = f_{\ell+\ell_0}(kx)\, \vec{Y}^{(\ell_0)}_{\ell m}(\vec{n})\,. \tag{26a}$$

Векторные шаровые функции $\vec{Y}^{(\ell_0)}_{\ell m}(\vec{n})$ (см., например, /7/) определяются соотношением:

$$[\vec{Y}^{(\ell_0)}_{\ell m}(\vec{n})]_\nu = \sum_{m'} \langle 1 \nu\, \ell+\ell_0 m' | \ell m \rangle\, Y^*_{\ell+\ell_0\, m'}(\vec{n})\,. \tag{27}$$

Однако эта система базисных функций не совсем удобна. Закон сохранения тока (3) связывает плотность заряда и продольную составляющую плотности тока. Поэтому удобно иметь в качестве базисных функций продольные и поперечные векторные функции. Система $\{\vec{Y}^{(\ell_0)}_{\ell m k}(\vec{x})\}$ таким свойством не обладает, но подходящие линейные комбинации этих функций $\vec{F}^{(\sigma)}_{\ell m k}(\vec{x})$ будут поперечными и продольными векторами:

$$\vec{F}^{(0)}_{\ell m k}(\vec{x}) = \vec{Y}^{(0)}_{\ell m k}(\vec{x}), \tag{28a}$$

$$\vec{F}^{(+)}_{\ell m k}(\vec{x}) = (2\ell+1)^{-1/2}\left[\sqrt{\ell+1}\,\vec{Y}^{(-1)}_{\ell m k}(\vec{x}) + \sqrt{\ell}\,\vec{Y}^{(+1)}_{\ell m k}(\vec{x})\right], \tag{28б}$$

$$\vec{F}^{(-)}_{\ell m k}(\vec{x}) = -i\,(2\ell+1)^{-1/2}\left[\sqrt{\ell}\,\vec{Y}^{(-1)}_{\ell m k}(\vec{x}) - \sqrt{\ell+1}\,\vec{Y}^{(+1)}_{\ell m k}(\vec{x})\right]. \tag{28в}$$

Векторы $\vec{F}^{(-)}_{\ell m k}(\vec{x})$ продольные, а $\vec{F}^{(0)}_{\ell m k}(\vec{x})$, $\vec{F}^{(+)}_{\ell m k}(\vec{x})$ – поперечные: x/

$$\operatorname{div}\vec{F}^{(0)}_{\ell m k} = \operatorname{div}\vec{F}^{(+)}_{\ell m k} = 0. \tag{29a}$$

$$\operatorname{div}\vec{F}^{(-)}_{\ell m k} = -k\,F_{\ell m k}, \tag{29б}$$

---

x/ Из соотношений (29б), (30б) и (30в) видно, что из 10 скалярных функций, определяющих базис(компоненты трех векторов $\vec{F}^{(\sigma)}_{\ell m k}$ и один скаляр $F_{\ell m k}$), независимы как раз три (ср. с (4)).

$$\mathrm{rot}\, \vec{F}^{(-)}_{\ell m k} = 0\,, \tag{30а}$$

$$\mathrm{rot}\, \vec{F}^{(0)}_{\ell m k} = -k\, \vec{F}^{(+)}_{\ell m k}\,, \tag{30б}$$

$$\mathrm{rot}\, \vec{F}^{(+)}_{\ell m k} = -k\, \vec{F}^{(0)}_{\ell m k}\,. \tag{30в}$$

Продольный вектор $\vec{F}^{(-)}_{\ell m k}(\vec{x})$ можно представить как градиент скаляра

$$\vec{F}^{(-)}_{\ell m k} = \frac{1}{k}\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F_{\ell m k}\,, \tag{31}$$

а поперечные векторы $\vec{F}^{(0)}_{\ell m k}(\vec{x})$ и $\vec{F}^{(+)}_{\ell m k}(\vec{x})$, в согласии с формулами (4), (5), соответственно как

$$\begin{aligned} \vec{F}^{(0)}_{\ell m k}(\vec{x}) &= \mathrm{rot}\,\{\, \vec{x}\, F_{\ell m k}(\vec{x})\,\}, \\ \vec{F}^{(+)}_{\ell m k}(\vec{x}) &= -\frac{1}{k}\, \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\{\, \vec{x}\, F_{\ell m k}(\vec{x})\,\}. \end{aligned} \tag{32}$$

Векторы $\vec{F}^{(\sigma)}_{\ell m k}$ ортонормированы :

$$\int (\vec{F}^{(\sigma)*}_{\ell m k}\, \vec{F}^{(\sigma')}_{\ell' m' k'})\, d^3x = \delta_{\ell\ell'}\, \delta_{m m'}\, \delta_{\sigma\sigma'}\, \frac{1}{k^2}\, \delta(k-k')\,, \tag{33а}$$

образуют полную систему

$$\sum_{\ell m k \sigma} [\vec{F}^{(\sigma)}_{\ell m k}(\vec{x})]_n [\vec{F}^{(\sigma)}_{\ell m k}(\vec{\xi})]^*_{n'} = \delta_{nn'} \delta^3(\vec{x}-\vec{\xi}) \tag{33б}$$

и обладают следующими свойствами чётности:

$$\vec{F}^{(\sigma)}_{\ell m k}(-\vec{x}) = (-1)^{\ell+\sigma} \vec{F}^{(\sigma)}_{\ell m k}(\vec{x}),$$
$$\sigma = 0, \pm \quad . \tag{34}$$

Отметим, что требования продольности и поперечности, а также определенной чётности базисных векторов определяют систему функций $\vec{F}^{(\sigma)}_{\ell m k}(\vec{x})$ единственным образом.

Для разложения вектора плотности тока $\vec{J}(\vec{x}, t)$ по системе введенных векторных функций поступим как и при получении разложения (15). Используя выражение (6) и условие полноты системы функций (33б), напишем (ср. с формулой (15)):

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = \sum_{\ell, m, k, \sigma} \vec{F}^{(\sigma)}_{\ell m k}(\vec{x})\, m^{(\sigma)}_{\ell m}(k, t), \tag{35}$$

где

$$m^{(\sigma)}_{\ell m}(k, t) = \int (\vec{F}^{(\sigma)*}_{\ell m k}(\vec{x})\, \vec{J}(\vec{x}, t))\, d^3 x . \tag{36}$$

Используя уравнение непрерывности и разложения (15) и (35), найдем, что величины $m^{(-)}_{\ell m}(k, t)$, определяющие продольную часть тока $\vec{J}_{\parallel}$, выражаются, как обычно, через производные кулоновских 2^{ℓ}-польных распределений:

$$m^{(-)}_{\ell m}(k,t) = (-ik)^{\ell}\,\frac{\sqrt{(2\ell+1)/2}}{k\pi(2\ell+1)!!}\;Q_{\ell m}(-k^2,t). \qquad (37)$$

Сравнение $m^{(0)}_{\ell m}(k,t)$ при $k \to 0$ с обычными магнитными 2^{ℓ}-польными моментами $M_{\ell m}(t)$ /8/

$$M_{\ell m}(t) \equiv M_{\ell m}(0,t) = i\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\int \sum_{m',\nu} x^{\ell}\, Y_{\ell m'}(\vec{n}) < 1\nu\,\ell m'|\,\ell m> J_{1\nu}(\vec{x},t)\,d^3x$$

$$J_{10} = J_z\,;\quad J_{1\pm1} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(J_x \pm iJ_y) \qquad (38)$$

показывает, что они отличаются от 2^{ℓ}-польных магнитных распределений $M_{\ell m}(-k^2,t)$ только нормировкой:

$$M_{\ell m}(-k^2,t) = \frac{i(2\ell+1)!!\,\pi\sqrt{2}}{(-ik)^{\ell}\sqrt{(\ell+1)(2\ell+1)}}\,m^{(0)}_{\ell m}(k,t). \qquad (39)$$

§ 3. Тороидные мультипольные моменты

Наконец, независимые в общем случае параметры $m^{(+)}(k,t)$, определяющие вместе с $m^{(0)}_{\ell m}(k,t)$ поперечную часть тока $J_{\perp}$, при $k \to 0$ (или при $kx \ll 1$ в выражении (36) – "длинноволновое приближение") оказываются не независимыми, а пропорциональными $m^{(-)}_{\ell m}(k,t)$.

В самом деле, сравнивая выражения (28б) и (28в) для $\vec{F}^{(+)}_{\ell m k}(\vec{x})$ и $\vec{F}^{(-)}_{\ell m k}(\vec{x})$, найдем, что

$$m_{\ell m} = i\sqrt{\frac{\ell+1}{\ell}}\, m^{(-)}_{\ell m} + \sqrt{\frac{2\ell+1}{\ell}}\, r_{\ell m} , \qquad (40)$$

где

$$r_{\ell m}(k,t) = \int (\vec{Y}^{(+1)}_{\ell m k}{}^{*}(\vec{x})\vec{J}(\vec{x},t))d^3x . \qquad (41)$$

Формулы (40) и (41) точные (без перехода к длинноволновому приближению), они только заменяют одни независимые параметры $m^{(+)}_{\ell m}$ другими $r_{\ell m}$. Но в длинноволновом приближении наиболее употребительном в конкретных расчётах, оказывается, что $m^{(+)}_{\ell m}$ и $m^{(-)}_{\ell m}$ пропорциональны $(kR)^{\ell-1}$, в то время как $r_{\ell m} \approx (kR)^{\ell+1}$ (R – линейные размеры системы токов). Таким образом, в длинноволновом приближении в $m^{(+)}_{\ell m}$ "выживает" только зависимая от $Q_{\ell m}$ часть. Это связано с тем, что при $k \to 0$ базис вырождается:

$$\vec{F}^{(+)}_{\ell m k}(\vec{x}) \approx \vec{F}^{(-)}_{\ell m k}(\vec{x}) .$$

При этом исчезает понятие продольности и поперечности векторов, так как

$$\operatorname{div} \vec{F}^{(\pm)}_{\ell m 0}(\vec{x}) = 0 \qquad \operatorname{rot} \vec{F}^{(\pm)}_{\ell m 0}(\vec{x}) = 0 .$$

Независимый параметр $r_{\ell m}$ оказывается в этом приближении более высокого порядка малости, и им обычно пренебрегают (см., например, /6/,/8/,/9/ и наше приложение).

Возможно, именно это обстоятельство явилось причиной отсутствия до последнего времени третьего (кроме кулоновского и магнитного семейства мультипольных распределений) в разложении тока (как при классическом, так и при квантовом рассмотрении проблемы).

Однако необходимо подчеркнуть, что величины $\tau_{\ell m}$ нельзя рассматривать как те или иные поправки к $Q_{\ell m}$ в выражении (40) для $m^{(+)}_{\ell m}$, поскольку существование $\tau_{\ell m}$ не зависит от присутствия (или отсутствия) $\dot{Q}_{\ell m}$ и величина $\tau_{\ell m}$ никак не определяется значениями $\dot{Q}_{\ell m}$ (равно как и значениями $M_{\ell m}$).

Т.е. могут существовать системы, например, тороидальный ток (см. ниже), для которых как $Q_{\ell m}(-k^2,t)$, так и $M_{\ell m}(-k^2,t)$ все тождественно равны нулю. Такие системы описываются лишь параметрами $\tau_{\ell m}(k,t)$. Рассмотрение излучения таких систем в длинноволновом приближении обычным методом /6-9/ пренебрегает самим эффектом излучения x/. Иными словами, пренебрежение $\tau_{\ell m}(k,t)$, по сравнению с $Q_{\ell m}(-k^2,t)$, аналогично пренебрежению высшими мультипольными моментами данного семейства по сравнению с низшими, что, конечно, законно только в том случае, когда низшие моменты существуют.

Введем теперь по аналогии с (20) и (39) функции $T_{\ell m}(-k^2,t)$

$$T_{\ell m}(-k^2,t) = \frac{\pi(2\ell+3)!!}{(-ik)^{\ell+1}\sqrt{(2\ell+3)/2}}\,\tau_{\ell m}(k,t), \tag{42}$$

образующие новое, отличное от кулоновского и магнитного, семейство мультипольных токовых распределений – тороидных мультипольных распределений. Величины

$$T_{\ell m}(t) \equiv T_{\ell m}(0,t) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+3}}\int \sum_{m',\nu} x^{\ell+1}\, Y_{\ell+1m'}(\vec{n})\langle 1\nu\ell+1m'|\ell m\rangle \cdot J_{1\nu}(\vec{x},t)\,d^3x \tag{43}$$

---

x/ Во второй и четвёртой частях этой работы будут разобраны соответствующие примеры.

являются 2^{ℓ} -польными тороидными[x/] моментами.

Поясним данное им название. Простейшим моментом этого семейства – анаполем Зельдовича и только им характеризуется тороидальный ток (рис. 1).

Его тороидный момент

$$T_{1m}=\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\int\sum_{m',\nu} x^2\, Y_{2m'}(\vec{n})\langle 1\nu 2m'|1m\rangle J_{1\nu}(\vec{x},t)\,d^3x \qquad (43a)$$

или в ортогональном базисе

$$\vec{T}=\frac{1}{\sqrt{10}}\int\{3x^2\vec{J}-\vec{x}(\vec{x}\vec{J})\}\,d^3x \qquad (43б)$$

направлен по оси симметрии тора. Система соответствующего числа тороидальных токов будет описываться высшими тороидными моментами. Такие системы строятся так же, как и мультипольные кулоновские и магнитные моменты из соответствующих диполей.

Так же как среднеквадратичный радиус распределения заряда $\overline{r^2_{00}}$ в статическом случае он не создает поля вне системы. Внешнее статическое поле также не действует на анаполь, как и на $\overline{r^2_{00}}$. В статическом случае тороидные моменты взаимодействуют не с внешним

---

x/ В работах[3,10] они были названы магнитными моментами II рода. Дюранд и др.[11] называют связанные с ними моменты $m^{(+1)}_{\ell m}$ электрическими, а Мишели[12] и Валечка и др.[13] – поперечными электрическими. Простейший представитель этого семейства – диполь впервые был введен Зельдовичем[14] (одновременно с Глазером и Якшичем[15]) и назван им анаполем.

полем, а с внешним током, так же как 2-степенные радиусы распределения кулоновских и магнитных мультипольных моментов. Так, например, тор с током, помещенный во внешний ток $\vec{J}_{ext}$, ориентируется так, что его тороидный дипольный момент направлен вдоль $\vec{J}_{ext}$, так как энергия его взаимодействия с внешним током имеет вид

$$W = \vec{T}\vec{J}_{ext} .$$

Вопрос излучения тороидными моментами будет рассмотрен далее.

Так же как в случае кулоновских моментов (25), магнитные и тороидные распределения можно разложить в ряд по средним 2^n -степенным радиусам распределения:

$$M_{\ell m}(-k^2, t) = M_{\ell m}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-k^2)^n \overline{\rho_{\ell m}^{2n}}(t) \tag{44}$$

$$\rho_{\ell m}^{2n}(t) = \frac{i(2\ell+1)!!}{n!\,2^n(2\ell+2n+1)!!}\sqrt{\frac{4\pi}{(\ell+1)(2\ell+1)}}\int x^{2n+\ell}\left(\vec{Y}^{(0)*}_{\ell m}(\vec{n})\vec{J}(\vec{x},t)\right)d^3x, \tag{45}$$

$$T_{\ell m}(-k^2, t) = T_{\ell m}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-k^2)^n \overline{R_{\ell m}^{2n}}(t) . \tag{46}$$

Используя определение токовых распределений (37), (39), (42), мультипольные разложения плотности тока $\vec{J}(\vec{x},t)$ представим в окончательном виде:

$$\vec{J}(\vec{x},t) = -\sum_{\ell,m,k} (-ik)^{\ell-1} \frac{\sqrt{(\ell+1)(2\ell+1/2)}}{\pi(2\ell+1)!!} \cdot$$

$$\cdot \{ k\vec{F}^{(0)}_{\ell m k}(\vec{x}) M_{\ell m}(-k^2,t) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\ell}} \vec{F}^{(+)}_{\ell m k}(\vec{x}) [-\dot{Q}_{\ell m}(-k^2,t) + \frac{k^2 T_{\ell m}(-k^2,t)}{\sqrt{(\ell+1)(2\ell+3)}}] + \tag{48}$$

$$+ \frac{i}{\sqrt{\ell+1}} \vec{F}^{(-)}_{\ell m k}(\vec{x}) \dot{Q}_{\ell m}(-k^2,t) \} .$$

Формулы (15а) и (48) дают мультипольное разложение плотности 4-тока $J_\mu(\vec{x},t)$. Из выражения (48) следует, что хотя сохранение тока связывает плотность заряда только с продольной частью плотности тока (3), поперечная часть также оказывается зависящей от плотности заряда. Так, например, в случае стационарного распределения зарядов и токов не только на продольную часть тока накладываются ограничения $(J_{||}=0)$, но и на поперечную: $Q_{\ell m} = 0$. Этот кажущийся парадокс разобрали Френч и Шимамото[16]. Они заметили, что для пространственно ограниченных источников тока продольная и поперечная составляющие плотности тока не независимы, т.к. вне источника

$$\vec{J} = \vec{J}_{||} + \vec{J}_{\perp} = 0 . \tag{49}$$

Казалось бы, тут можно возразить, что при получении разложений (15а) и (48) не накладывалось никаких дополнительных условий, ограничивающих размеры источника. Однако мы сделали специальный выбор базисных функций $\vec{F}^{(\sigma)}_{\ell m k}(\vec{x})$, разложения которых (25), (44) и (46) представляют произвольный ток в виде суммы "точечных токов"[x], а для каждого из них соотношение (49) уже справедливо.

В заключение авторы выражают благодарность А.М. Балдину, И.А. Вердиеву, С.Б. Герасимову, А.Б. Говоркову, В.К. Игнатовичу и Я.А. Смородинскому за обсуждение результатов этой работы.

Приложение

Во всех известных авторам этой статьи изложениях теории мультиполей при переходе к длинноволновому приближению допускается один и тот же произвол, приводящий к потере тороидных моментов. Выявим его, разобрав для примера соответствующий вывод из монографии Роуза[6]. Перепишем соотношение, приведенное на стр. 70[6]:

$$\int f_\ell \, \vec{T}^*_{\ell m} \, \mathrm{rot}\, \vec{J} \, d^3x = -\frac{i}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \int Y^*_{\ell m} \left\{ x \frac{df_\ell}{dx} + f_\ell \right\} \cdot \tag{A}$$

$$\cdot\, ik\rho - k^2 f_\ell (\vec{x}\vec{J}) \} \, d^3x$$

---

x/ См. в связи с этим замечание к выражению (25).

Переход к длинноволновому приближению в [8] совершается так: второй член в п.ч. (А) отбрасывается, а первый берется в пределе $kx \ll 1$. Покажем, что такой переход, вообще говоря, некорректен.

Приведем соотношение (А) к нашим обозначениям. С помощью формулы

$$\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\,\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\,\operatorname{rot}\vec{b}$$

и выражения (29) можно найти, что л.ч. соотношения (А) равняется $k\,m^{(+)}_{\ell m}$. Но тогда п.ч. (А) должна определяться выражением (40). Убедимся в этом, выделив в явном виде в п.ч. (А) тороидный момент.

Преобразуем первый член п.ч. (А), используя соотношение

$$x\,\frac{df_\ell}{dx} = \ell\, f_\ell + i k x\, f_{\ell+1}\,.$$

Получаем:

$$-\frac{i}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\int Y^*_{\ell m}\{(\ell+1)f_\ell + ikx\, f_{\ell+1}\}\, ik\rho\, d^3x =$$

$$= -i\sqrt{\frac{\ell+1}{\ell}}\int f_\ell\, Y^*_{\ell m}\,\rho\, d^3x - \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\int kx\, f_{\ell+1}\, Y^*_{\ell m}\operatorname{div}\vec{J}\, d^3x \tag{B}$$

Видим, что первый член в последней строке равен: $-ik\sqrt{\frac{\ell+1}{\ell}}\ m^{(-)}_{\ell m}$.
Интегрируя затем по частям второй член и применяя соотношение

$$\frac{d}{dx}(x f_{\ell+1}) = -(\ell+1) f_{\ell+1} - ikx f_\ell ,$$

преобразуем его к виду

$$-\frac{k}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\int f_{\ell+1}(-x\vec{\nabla} Y^*_{\ell m}) \cdot \vec{J}\ d^3x + \frac{k}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\int(\ell+1) f_{\ell+1} \cdot$$

$$\cdot Y^*_{\ell m}\ (\hbar \vec{J})\, d^3x , \quad n = \frac{x}{|x|} .$$

Подставляя в оставшиеся члены выражения /17/

$$\vec{n}\, Y_{\ell m} = \sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}}\ \vec{Y}^{(+1)}_{\ell m} - \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}}\ \vec{Y}^{(-1)}_{\ell m}$$

$$-x\vec{\nabla} Y_{\ell m} = \ell\sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}}\ \vec{Y}^{(+1)}_{\ell m} + (\ell+1)\sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}}\ \vec{Y}^{(-1)}_{\ell m}$$

находим, что сумма их сводится к

$$-\sqrt{\frac{2\ell+1}{\ell}}\quad k\, \tau_{\ell m}\ .$$

Собирая л. и п. части (А), получаем окончательно соотношение

$$-k\, m^{(+)}_{\ell m} = -\,i\,k\,\sqrt{\frac{\ell+1}{\ell}}\; m^{(-)}_{\ell m} - k\,\sqrt{\frac{2\ell+1}{\ell}}\quad \tau_{\ell m}\quad ,$$

совпадающее с (40).

Итак, мы нашли, что тороидный момент был скрыт в первом члене п.ч. (А). Таким образом, переход к длинноволновому приближению так, как это делает Роуз - прямо из п.ч. (А), неправомерен. Предварительно следует разбить $m^{(+)}_{\ell m}$ на кулоновскую и тороидную части, независимые как с теоретико-групповой, так и с физической точки зрения.

Литература

1. Р.М. Морс, А.Х. Фешбах. "Методы теоретической физики", ИИЛ, 1957 г.
2. В.Б. Берестецкий. "Физика высоких энергия и теория элементарных частиц", стр. 610, Киев, 1967 г.
3. А.А. Чешков. ЖЭТФ, 50, 144, (1966).
4. В.Л. Любошиц, Я.А. Смородинский, ЖЭТФ, 42, 846 (1962).
5. A.R. Edmonds, CERN, 55-26 Geneva (1955).
6. М. Роуз. "Поля мультиполей", ИИЛ, 1957 г.
7. А.И. Ахиезер, В.Б. Берестецкий. "Квантовая электродинамика", Москва, 1959 г.
8. Д. Блатт, В. Вайскопф. "Теоретическая ядерная физика", ИИЛ, 1958 г.
9. K. Alder, A. Born, T. Huus., B. Mottelson and A. Winter. Rev. Mod. Phys., 28, 432, (1956).
10. В.М. Дубовик, А.А. Чешков. ЖЭТФ, 51, 1369 (1966).

11. L. Durand III, P.C. De-Celles, R.B. Marr., Phys. Rev., 126, 1883, (1962).

12. J. Micheli. Nuovo Cim., 45, 312, (1966).

13. T. de Forest Jr. J.D. 151ecka . Adv. Phys., 15, 1 (1967).

14. Я.Б. Зельдович. ЖЭТФ, 33, 1331 (1957).

15. V. Glaser, B. Jakšić. Nuovo Cim., 5, 1197 (1957).

16. J.B. French, Y. Shimamoto. Phys. Rev., 91 , 898 (1953).

17. В.Б. Берестецкий, А.З. Долгинов, К.А. Тер-Мартиросян. ЖЭТФ, 20, 527 (1950).

Рукопись поступила в издательский отдел
23 июля 1970 года.