ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 5272

Б.М. Головин, В.И. Никаноров

РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ПОВОРОТ СПИНА S = ½ ПРИ СОУДАРЕНИЯХ ЧАСТИЦ, ПРОИЗВОЛЬНО ДВИЖУЩИХСЯ ОТНОСИТЕЛЬНО НАБЛЮДАТЕЛЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

1970

Головин Б.М., Никаноров В.И. P2-5272

Релятивистский поворот спина $S = 1/2$ при соударениях частиц, произвольно движущихся относительно наблюдателя

На основе использования геометрии Лобачевского рассмотрен релятивистский поворот спина $S = 1/2$ частиц, участвующих в бинарной реакции при произвольном движении сталкивающихся частиц относительно наблюдателя.

Показано, что в общем случае релятивистский поворот спина необходимо учитывать не только в конечном, но и в начальном состоянии системы.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1970

Golovin B.M., Nikanorov V.I. P2-5272

Relativistic $S = 1/2$ Spin Rotation in Collisions of Particles Moving Arbitrary Relative to the Observer

A relativistic rotation of $S = 1/2$ Spin of particles, taking part in a binary reaction at an arbitrary motion of colliding particles, are considered using the Lobachevsky geometry.

It is shown that in the general case the relativistic spin rotation is necessary to be taken into account not only in a final, but also in an initial state of a system.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1970

P2 - 5272

Б.М. Головин, В.И. Никаноров

РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ПОВОРОТ СПИНА $S = 1/2$ ПРИ СОУДАРЕНИЯХ ЧАСТИЦ, ПРОИЗВОЛЬНО ДВИЖУЩИХСЯ ОТНОСИТЕЛЬНО НАБЛЮДАТЕЛЯ

Сокращенный вариант статьи направлен в ЖЭТФ

Summary

The relativistic spin rotation must be taken into account when using the nonrelativistic formalism to describe the polarization of 1/2 spin particles/1/. The relativistic spin rotation of particles participating in the $A+B\to C+D$ binary reaction has been calculated by the Lobachevsky geometry. The kinematical diagram method which describes particle kinematics in relativistic velocity space terms is applied in our calculations. It is known that the particle relativistic spin is defined by means of the vector rotation by parallel transfer of the vector along the perimeter of a triangle which has vertices at the points that characterize the velocities of the laboratory system, the center-of-mass frame and the rest frame of a particle under study. The spin relativistic rotation is qualitatively equal to the area of this triangle.

The following results have been obtained:

1) The formula of particle spin rotation which are binary reaction products in one of the initial particle rest frame in the case of unequal masses is obtained.

2) The case when both colliding particles move in the initial state is considered.

It is shown that in this case one must take into account the particle spin relativistic rotation in the initial state. The spin relativistic rotation is expressed by formula (4). Under identical conditions spin rotation in the final state can be determined by formula (12).

3) The quantitative estimates of particle spin relativistic rotation for 600 MeV proton energy and several values of the proton-target energy are made (table 1).

4) The form of a matrix element for elastic scattering is shown when spin relativistic rotation takes place in the initial state (formula (15)).

В работе Стаппа/1/ показано, что при использовании нерелятивистского формализма для описания поляризации частиц со спином 1/2 в релятивистской области необходимо учитывать дополнительный поворот спина (так называемый релятивистский, или кинематический поворот).

Наглядное описание релятивистского поворота дано в статьях Смородинского/2,3,4/, применившего представления геометрии Лобачевского/5/ и предложившего удобный метод решения задач релятивистской кинематики с помощью кинематических диаграмм. Эти диаграммы описывают кинематические состояния частиц в терминах пространства 4 - скоростей, ряд интересных свойств которого был установлен Черниковым/6/.

При использовании кинематических диаграмм 4-скорость каждой частицы описывается точкой, а кинематические характеристики относительного движения частиц или характеристики движения частиц в разных системах отсчета численно определяются с помощью различных гиперболических функций от расстояния между соответствующими точками.

Бинарная реакция $A+B\to C+D$ описывается кинематической диаграммой, изображенной на рис. 1. Точки A, B, C, D изображают 4-скорости участвующих в реакции частиц, а точка U, лежащая на пересечении линий AB и CD, соответствует 4-скорости центра

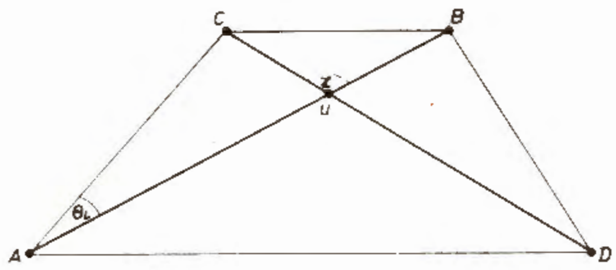

Рис. 1.

масс (ц.м.) сталкивающихся частиц. Расстояния AU , BU , CU, DU определяют (через соответствующие гиперболические функции) движение частиц в системе центра масс, или движение центра масс системы в системе покоя соответствующей частицы.

Основные формулы, необходимые для расчетов с кинематическими диаграммами, приведены в Приложении 1, а вывод некоторых кинематических соотношений в Приложении 2.

Релятивистский поворот спина частицы определяется поворотом вектора при параллельном переносе его вдоль периметра треугольника с вершинами в точках, характеризующих 4-скорости системы наблюдателя, центра масс сталкивающихся частиц и рассматриваемой частицы.

Численно угол релятивистского поворота равен площади этого треугольника (см. Приложение 1, формулы (1.6) - (1.8)).

Отметим, что в случае, когда система наблюдателя совпадает с системой покоя одной из частиц, ориентации спинов в начальном состоянии не испытывают релятивистского поворота, так как площади треугольников, определяющих такие повороты, равны нулю.

Релятивистский поворот отсутствует и при использовании встречных пучков частиц равных масс, так как в этом случае состояние наблюдателя описывается точкой U и все треугольники, определяющие релятивистские повороты, вырождаются в соответствующие отрезки.

Пусть частица B с массой m_B налетает на покоящуюся частицу A с массой m_A и в результате реакции образуются частицы C с массой m_C и D с массой m_D (см. рис. 1). В этом случае релятивистский поворот спина частицы C в системе покоя частицы A определяется площадью треугольника AUC и может быть найден ло формуле (III.4), выведенной в Приложении 3:

$$\sin^2\left(\frac{\Omega_c}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin^2\Theta_L\,[\mathrm{ch}(AU)-1]\left[\sqrt{1-\rho^2+\rho^2\cdot\mathrm{ch}^2(AU)}-1\right]\times$$

$$\times\left\{1+\frac{1}{\rho}\cos\kappa+\frac{\sqrt{1-\rho^2+\rho^2\,\mathrm{ch}^2(AU)}\cdot\left[\mathrm{ch}(AU)-\sqrt{1-\rho^2+\rho^2\,\mathrm{ch}^2(AU)}\right]}{\rho^2\,[\mathrm{ch}^2(AU)-1]}\right\}. \tag{1}$$

Здесь

$$\rho = m_A/m_C\,,$$

$$\mathrm{ch}(AU) = \frac{m_A + m_B\,\mathrm{ch}(AB)}{\sqrt{m_A^2+m_B^2+2m_A m_B\cdot\mathrm{ch}(AB)}}$$

Θ_L , κ - углы вылета частицы C соответственно в системе покоя частицы A и в системе ц.м. сталкивающихся частиц.

Для вычисления угла релятивистского поворота спина частицы D в этом выражении следует положить $\rho = \frac{m_A}{m_D}$ и принять, что Θ_L соответствует углу вылета (в системе покоя A) частицы D и изменить знак перед $\frac{1}{\rho}\cos\kappa$.

Легко видеть, что при упругом рассеянии частиц равных масс ($m_A = m_B = m_C = m_D$) формула (1) принимает вид

$$\sin\left(\frac{\Omega_c}{2}\right) = \sin\left(\frac{\kappa}{2} - \Theta_L\right) \qquad (2)$$

и совпадает с известной формулой Стаппа /1/.

Рассмотрим случай (рис. 2), когда система наблюдателя (точка L) не совпадает ни с одной из точек A, B, C, D, U кинематической диаграммы реакции и, вообще говоря, не лежит в плоскости ABCD.

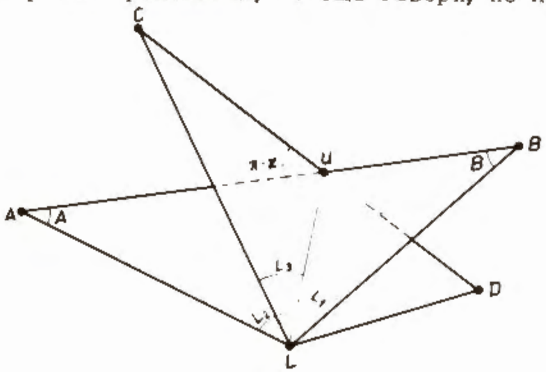

Рис. 2.

Отметим, что в этих условиях в отличие от предыдущего случая, когда система наблюдателя совпадала с системой покоя одной из частиц, необходимо учитывать также релятивистские повороты спинов частиц в начальном состоянии, определяемые площадями треугольников ΔLUA и ΔLUB.

Релятивистские повороты спинов продуктов реакции (C, D) будут определяться площадями треугольников ΔLUC и ΔLUD.

В качестве исходной формулы при вычислении релятивистского поворота спина используем (1.7).

Решая соответствующие треугольники, определим параметры кинематической диаграммы, необходимые для дальнейших расчетов:

$$ch(AB) = ch(LA)\cdot ch(LB) - sh(LA)\cdot sh(LB)\cdot \cos(L),$$

$$\cos(A) = \frac{ch(AB)\cdot ch(LA) - ch(LB)}{sh(AB)\cdot sh(LA)},$$

$$\cos(B) = \frac{ch(AB)\cdot ch(LA) - ch(LB)}{sh(AB)\cdot sh(LA)},$$

$$ch(LU) = ch(AU)\cdot ch(LA) - sh(AU)\cdot sh(LA)\cdot \cos(A) =$$

$$= ch(BU)\cdot ch(LB) - sh(BU)\cdot sh(LB)\cos(B), \qquad (3)$$

$$\cos(L1) = \frac{ch(LU)\cdot ch(LB) - ch(BU)}{sh(LU)\cdot sh(LB)},$$

$$\cos(L2) = \frac{ch(LU)\cdot ch(LA) - ch(AU)}{sh(LU)\cdot sh(LA)},$$

$$\cos(LUA) = \frac{ch(AU)\cdot ch(LU) - ch(AL)}{sh(AU)\cdot sh(LU)}.$$

Значения гиперболических синусов и косинусов от отрезков AU, BU, CU, DU найдены в Приложении 2.

Релятивистские повороты спина в начальном состоянии, как уже говорилось, определяются площадью треугольника ΔALU для частицы

A и площадью треугольника ΔBLU для частицы B. Формула (1.7) для этих случаев примет вид:

$$\sin\left(\frac{\Omega_A}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+2ch(LU)\cdot ch(AU)\cdot ch(AL)-ch^2(LU)-ch^2(AU)-ch^2(AL)}{2[ch(LU)+1][ch(AU)+1][ch(AL)+1]}}$$

$$\sin\left(\frac{\Omega_B}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+2ch(LU)ch(BU)ch(BL)-ch^2(LU)-ch^2(BU)-ch^2(BL)}{2[ch(LU)+1][ch(BU)+1][ch(BL)+1]}}. \quad (4)$$

Положив $AL=0$ (система наблюдателя совпадает с системой покоя частицы A), получим

$$\sin\left(\frac{\Omega_A}{2}\right)=0,$$

что подтверждает сказанное ранее об отсутствии релятивистских поворотов начальных спиновых состояний при этих условиях.

Анализируя конечные состояния, рассмотрим релятивистский поворот спина частицы C, что потребует решения треугольника ΔLUC. Формулы (3) задают гиперболические функции лишь двух сторон этого треугольника. Для определения недостающего параметра – $ch(LC)$ необходимо найти один из углов и затем воспользоваться теоремой косинусов (I.1).

Угол $L3$ можно определить по формуле (I.9), рассматривая его как образованный отрезками LC (со сферическими углами θ_c, ϕ_c) и LU (со сферическими углами θ_u, 0):

$$\cos(L3)=\sin(\theta_c)\sin(L1)\cos(\phi_c)+\cos(\theta_c)\cos(L1). \quad (6)$$

В том случае, если направление вылета частицы C известно лишь в системе наблюдателя, теорему косинусов (I.1) можно представить в виде

$$ch(CU)=ch(LC)\cdot ch(LU)-sh(LC)sh(LU)\cos(L3). \quad (7)$$

Выразив в этой формуле $sh(LC)$ через $ch(LC)$, придем к квадратному уравнению относительно $ch(LC)$ с решением

$$ch(LC)=\frac{ch(LU)ch(CU)}{ch^2(LU)-sh^2(LU)\cos(L3)}\left\{1\pm\sqrt{1-\frac{ch^4(LU)-sh^4(LU)\cos^4(L3)}{ch^2(LU)ch^2(CU)}}\right\}. \quad (8)$$

Два значения, которые может принимать $ch(LC)$, соответствуют двум разным углам вылета этой частицы в с.ц.м., приводящим к одному и тому же направлению ее движения относительно наблюдателя. Очевидно, каждому из этих значений $ch(LC)$ соответствует своя величина релятивистского поворота спина.

Если направление вылета частицы C известно также и в с.ц.м. ($\kappa=\angle CUB$), то, определив из (I.10), угол ϕ_κ между плоскостями LUC и LAB

$$\cos\phi_\kappa=\frac{\cos\theta-\cos(L2)\cos(L3)}{\sin(L2)\sin(L3)}, \quad (9)$$

найдем с помощью (1.10) косинус угла $\angle LUC$

$$\cos(LUC)=-\cos(LUA)\cos(\kappa)+\sin(LUA)\sin(\kappa)\cos\phi_\kappa \quad (10)$$

и однозначно определим $ch(LC)$:

$$ch(LC)=ch(LU)ch(CU)-sh(LU)sh(CU)\cos(LUC). \quad (11)$$

Формулу для расчета релятивистского поворота спина частицы C запишем в виде

$$\sin\left(\frac{\Omega_C}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+2ch(LU)ch(CU)ch(LC)-ch^2(LU)-ch^2(CU)-ch^2(LC)}{2[ch(LU)+1][ch(CU)+1][ch(LC)+1]}}. \quad (12)$$

Аналогично может быть найден и релятивистский поворот спина частицы D.

Нетрудно показать, что при совпадении точки L с точкой A (системой покоя частицы A) формула (12) приводится к полученному ранее виду (1).

Для иллюстрации в таблице 1 приведены численные значения углов релятивистского поворота спинов при упругом pp-рассеянии на угол $\varkappa=90^\circ$ в случае, когда точка L лежит в плоскости $ABCD$ и угол между начальными скоростями протонов $\angle L=90^\circ$.

Первая строка этой таблицы соответствует рассеянию протона с энергией $T_B=600$ Мэв на покоящемся протоне и, следовательно, приведенный в этой строке угол поворота спина частицы совпадает со стапповским поворотом.

Т а б л и ц а 1

T_B Мэв	T_A Мэв	Ω_A град.	Ω_B град.	Ω_C град.
600	0	0	0	7,9
600	1	0,7	0,6	7,9
600	10	1,1	1,9	7,9
600	100	6,7	5,9	6,7

Как известно, в нерелятивистском приближении матричный элемент упругого рассеяния частиц со спином $s=1/2$ имеет вид

$$M=\langle \vec{S}_C \vec{S}_B A \rho_{in} A^+ \rangle. \quad (13)$$

Здесь A – амплитуда рассеяния[7], ρ_{in} – матрица плотности начальных спиновых состояний, $\vec{S}_{C,D}$ – спиновые операторы, действующие на волновую функцию конечного состояния.

Обобщение этой записи, соответствующее рассеянию релятивистских частиц на покоящейся мишени и включающее операторы $R_{C,D}$ релятивистского поворота спинов частиц C, D, было приведено в работе[8]:

$$M=\langle R_C R_D \vec{S}_C \vec{S}_D A \rho_{in} A^+ \rangle. \quad (14)$$

В общем случае, при рассеянии релятивистской частицы на движущейся мишени, как уже говорилось, релятивистский поворот спинов необходимо учитывать и в начальном состоянии. Структура матричного элемента примет вид

$$M=\langle R_C R_D \vec{S}_S \vec{S}_D A R_A R_B \rho_{in} A^+ \rangle, \quad (15)$$

отличающийся от (14) появлением операторов R_A и R_B, действующих на матрицу плотности начального состояния.

Приложение 1

Приведем некоторые, полезные для решения рассматриваемых задач, формулы геометрии Лобачевского и гиперболической тригонометрии.

При решении гиперболического треугольника (рис. 3) используются формулы:

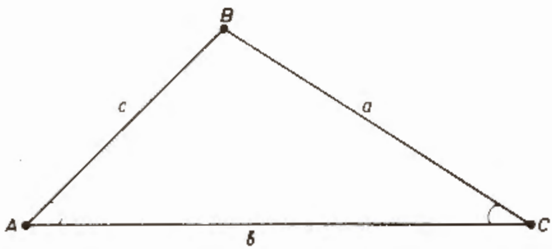

Рис. 3.

а) Теорема косинусов для сторон

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} a &= \operatorname{ch} b \cdot \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \cdot \operatorname{sh} c \cos A, \\ \operatorname{ch} b &= \operatorname{ch} c \cdot \operatorname{ch} a - \operatorname{sh} c \cdot \operatorname{sh} a \cos B, \\ \operatorname{ch} c &= \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} b \cos C. \end{aligned} \tag{I.1}$$

б) Теорема косинусов для углов

$$\begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \operatorname{ch} a, \\ \cos B &= -\cos C \cdot \cos A + \sin C \cdot \sin A \cdot \operatorname{ch} b, \\ \cos C &= -\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B \cdot \operatorname{ch} c. \end{aligned} \tag{I.2}$$

в) Теорема синусов

$$\frac{\operatorname{sh} a}{\sin A} = \frac{\operatorname{sh} b}{\sin B} = \frac{\operatorname{sh} c}{\sin C} \tag{I.3}$$

г) Если в плоскости Лобачевского через точку A (рис. 4) вне прямой $\nu\lambda$ (ν, λ – бесконечно удаленные точки) проведены лучи $A\nu$ и $A\lambda$, параллельные $\nu\lambda$, то с перпендикуляром AB к данной прямой они образуют угол $\Pi(x)$, где x – расстояние от точки A до прямой $\nu\lambda$. При этом выполняются соотношения:

$$
\begin{aligned}
&\sin \Pi(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}, \\
&\cos \Pi(x) = \mathrm{th}(x), \qquad\qquad (I.4) \\
&\mathrm{tg}\, \Pi(x) = \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}.
\end{aligned}
$$

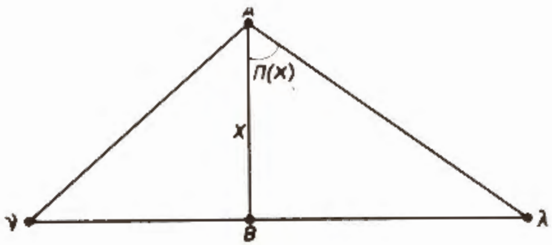

Рис. 4.

д) Площадь треугольника может быть выражена через углы параллельности для его сторон, или через гиперболические функции его сторон. Принимая в качестве единицы длины скорость света, которую мы полагаем тождественно равной единице, формулу для вычисления площади S треугольника можно записать в виде [5]

$$\sin\left(\frac{S}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{tg}\,\Pi(a)\cdot\mathrm{tg}\,\Pi(b)\cdot\mathrm{tg}\,\Pi(c)\times$$

$$\times P(a,b,c)\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{\sin\Pi(a)}-1\right)\left(\frac{1}{\sin\Pi(b)}-1\right)\left(\frac{1}{\sin\Pi(c)}-1\right)}\,. \tag{I.5}$$

где

$$P(a,b,c)=\sqrt{1+\frac{2}{\sin\Pi(a)\cdot\sin\Pi(b)\cdot\sin\Pi(c)}-\frac{1}{\sin^2\Pi(a)}-\frac{1}{\sin^2\Pi(b)}-\frac{1}{\sin^2\Pi(c)}} \tag{I.6}$$

Используя соотношения (I.4), выразим площадь треугольника через гиперболические функции его сторон:

$$\sin\left(\frac{S}{2}\right)=\frac{\sqrt{1+2\,\mathrm{ch}\,a\cdot\mathrm{ch}\,b\cdot\mathrm{ch}\,c-\mathrm{ch}^2 a-\mathrm{ch}^2 b-\mathrm{ch}^2 c}\cdot\sqrt{(\mathrm{ch}\,a-1)(\mathrm{ch}\,b-1)(\mathrm{ch}\,c-1)}}{\sqrt{2}\cdot\mathrm{sh}\,a\cdot\mathrm{sh}\,b\cdot\mathrm{sh}\,c}=$$

$$=\sqrt{\frac{1+2\,\mathrm{ch}\,a\cdot\mathrm{ch}\,b\cdot\mathrm{ch}\,c-\mathrm{ch}^2 a-\mathrm{ch}^2 b-\mathrm{ch}^2 c}{2(\mathrm{ch}\,a+1)(\mathrm{ch}\,b+1)(\mathrm{ch}\,c+1)}}\,. \tag{I.7}$$

Воспользовавшись теоремой косинусов (I.1) для того, чтобы выразить гиперболический косинус от одной из сторон треугольника через противолежащий ей угол и гиперболические функции двух других сторон треугольника, выражение (I.7) можно привести к виду

$$\sin\left(\frac{S}{2}\right) = \frac{\sin A}{\sqrt{2}\ \mathrm{sh}\, a}\sqrt{(\mathrm{ch}\, a - 1)(\mathrm{ch}\, b - 1)(\mathrm{ch}\, c - 1)} =$$

$$= \frac{\sin B}{\sqrt{2}\ \mathrm{sh}\, b}\sqrt{(\mathrm{ch}\, a - 1)(\mathrm{ch}\, b - 1)(\mathrm{ch}\, c - 1)} = \qquad (I.8)$$

$$= \frac{\sin C}{\sqrt{2}\ \mathrm{sh}\, c}\sqrt{(\mathrm{ch}\, a - 1)(\mathrm{ch}\, b - 1)(\mathrm{ch}\, c - 1)}.$$

е) Учитывая, что формулы пространственной тригонометрии Лобачевского, включающие только углы, совпадают с формулами Евклидовой геометрии, мы определим угол Ψ между отрезками, ориентация которых в пространстве задана парами сферических углов (θ_1, ϕ_1) и (θ_2, ϕ_2) с помощью обычной формулы

$$\cos \Psi = \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 \cdot \cos\phi_1 \cdot \cos\phi_2 + \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 \cdot \sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2 + \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \qquad (I.9)$$

ж) Угол $\phi\left(\frac{NLK}{MLK}\right)$ между плоскостями NLK и MLK (см. рис. 5) с углами при вершине K определяется выражением /9/

$$\cos(\angle MKN) = \cos(\angle MKL) \cdot \cos(\angle NKL) +$$

$$+ \sin(\angle MKL) \cdot \sin(\angle NKL) \cdot \cos\phi\left(\frac{NLK}{MLK}\right). \qquad (I.10)$$

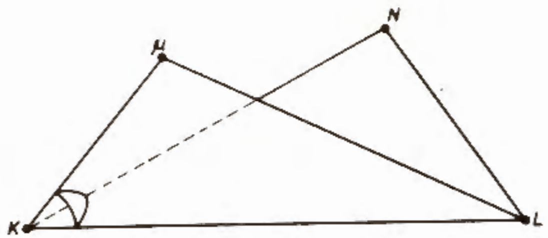

Рис. 5.

Приложение 2

Приведем выражения некоторых кинематических параметров относительного движения частиц через гиперболические функции от расстояния между соответствующими точками в пространстве 4-скоростей.

Обозначим через a гиперболическое расстояние между точками 4-скоростей частиц 1,2. Тогда основные кинематические характеристики относительно движения этих частиц можно определить следующими выражениями.

Релятивистский фактор – $\gamma = ch(a)$

Скорость – $\beta = th(a)$

3-импульс/масса $p/m = \beta\gamma = sh(a)$

Импульс частицы 1 в системе покоя частицы 2 – $m_1\beta\gamma = m\ sh(a)$

Импульс частицы 2 в системе покоя частицы 1 – $m_2\beta\gamma = m_2\ sh(a)$

Энергия частицы 1 в системе покоя частицы 2 – $m_1\beta\gamma = m_1 ch(a)$

Энергия частицы 2 в системе покоя частицы 1 – $m_2\gamma = m_2\ ch(a)$

Кинетическая энергия частицы 1 в системе покоя частицы 2 – $m_1(\gamma - 1) = 2m_1 sh^2\left(\frac{a}{2}\right)$

Кинетическая энергия частицы 2 в системе покоя частицы 1 $m_2(\gamma - 1) = 2m_1\ sh^2\left(\frac{a}{2}\right)$

Выведем некоторые соотношения, полезные для работы с кинематическими диаграммами бинарных реакций.

1. Распад частицы на две

Пусть частица с массой M, 4 – скорость которой соответствует точке U, распадается на две частицы с массами m_A, m_B и 4-скоростями A и B.

В системе покоя частицы M продукты ее распада разлетаются в противоположных направлениях ($\angle AUB = \pi$), поэтому A, U, B будут лежать на прямой.

Законы сохранения для этого случая можно записать в виде

$$M = m_A ch(AU) + m_B ch(BU), \tag{II.2}$$

$$m_A\ sh(AU) = m_B\ sh(BU). \tag{II.3}$$

Релятивистский фактор относительного движения частиц A и B выразим через характеристики движения этих частиц в системе покоя распадающейся частицы:

$$ch(AB) = ch(AU + UB) = ch(AU)\cdot ch(BU) + sh(AU)\cdot sh(BU). \tag{II.4}$$

Возведя (II.2) в квадрат, исключим зависимость от (AU) и (UB) с помощью соотношений (II.3), (II.4), использовав свойство гиперболических функций

$$ch^2(x) = sh^2(x) + 1.$$

После этого связь между массой распадающейся частицы, массами продуктов распада и релятивистским фактором их относительного движения можно записать в виде

$$M^2 = m_A^2 + m_B^2 + 2m_A m_B \cdot ch(AB). \qquad (II.5)$$

2. Основные характеристики движения в с.ц.м. соударяющихся частиц

Пусть (см. рис. 1.) частица с массой m_A и 4-скоростью A сталкиваются с частицей, имеющей массу m_B и 4-скорость B, и в результате реакции образуются частицы с массами m_C, m_D и 4-скоростями C и D. Центр масс такой системы имеет 4-скорость, описываемую точкой U.

Как известно, в с.ц.м. бинарной реакции импульсы всех частиц равны между собой. Поэтому можно записать:

$$m_A\, sh(AU) = m_B\, sh(BU) = m_C \cdot sh(CU) = m_D\, sh(DU). \qquad (II.6)$$

Релятивистский фактор относительного движения сталкивающихся частиц свяжем с характеристиками их движения в с.ц.м.

$$ch(AB) = ch(AU)\cdot ch(BU) + sh(AU)\cdot sh(BU) =$$

$$= ch(AU)\cdot\sqrt{\left(\frac{m_A}{m_B}\right)^2 sh^2(AU) + 1} + \frac{m_A}{m_B}\cdot sh^2(AU). \qquad (II.7)$$

Избавившись в этом выражении от радикала, после несложных преобразований получим

$$sh^2(AU) = ch^2(AU) - 1 = \frac{sh^2(AB)}{1 + \left(\frac{m_A}{m_B}\right)^2 + 2\left(\frac{m_A}{m_B}\right)\cdot ch(AB)}, \qquad (II.8)$$

откуда нетрудно найти формулы для определения основных характеристик движения частицы A в с.ц.м. Характеристики движения частицы B в той же системе находят аналогичным путем.

$$th(AU) = \frac{m_B \cdot sh(AB)}{m_A + m_B ch(AB)}$$

$$sh(AU) = \frac{m_B\, sh(AB)}{\sqrt{m_A^2 + m_B^2 + 2m_A m_B ch(AB)}}$$

$$ch(AU) = \frac{m_A + m_B\, ch(AB)}{\sqrt{m_A^2 + m_B^2 + 2m_A m_B ch(AB)}}$$

$$th(BU) = \frac{m_A\, sh(AB)}{m_B + m_A ch(AB)} \qquad (II.9)$$

$$sh(BU) = \frac{m_A\, sh(AB)}{\sqrt{m_A^2 + m_B^2 + 2m_A m_B\, ch(AB)}}$$

$$\mathrm{ch}\,(BU)=\frac{m_B+m_A\,\mathrm{ch}\,(AB)}{\sqrt{m_A^2+m_B^2+2m_Am_B\,\mathrm{ch}(AB)}}\,.$$

Из равенств (II.6) и (II.8) видно, что

$$m_C\,\mathrm{sh}\,(CU)=m_D\,\mathrm{sh}\,(DU)=\frac{m_A m_B\,\mathrm{sh}\,(AB)}{\sqrt{m_A^2+m_B^2+2m_Am_B\,\mathrm{ch}(AB)}}\,. \qquad (\mathrm{II}.10)$$

Используя эти соотношения, легко получить для частиц C и D все выражения, аналогичные выражениям (II.9) для частиц A и B.

Отметим, что входящие в (II.9) радикалы совпадают с массой частицы, которая в точке U распадается на частицы m_A и m_B с 4-скоростями A, B (II.5).

3. Связь углов вылета частицы в с.ц.м. и в системе покоя одной из участвующих в реакции частиц

Примем, что система наблюдателя совпадает с системой покоя частицы A. Тогда $\angle UAC=\theta_L$ – угол вылета частицы в лабораторной системе, $\angle AUC=\pi-\kappa$, где κ – угол вылета частицы C в с.ц.м.

Для установления интересующей нас связи между углами θ_L и κ рассмотрим треугольник ΔAUC. На основании теоремы синусов для этого треугольника запишем

$$\frac{\mathrm{sh}(CU)}{\sin\theta_L}=\frac{\mathrm{sh}(AC)}{\sin\kappa}$$

или

$$\sin^2\theta_L=\left(\frac{\mathrm{sh}(CU)}{\mathrm{sh}(AC)}\right)^2\sin^2\kappa\,.$$

Откуда следует

$$\frac{\mathrm{tg}^2(\theta_L)}{1+\mathrm{tg}^2(\theta_L)}=\left(\frac{\mathrm{sh}(CU)}{\mathrm{sh}(AC)}\right)^2\sin^2\kappa\,,$$

или, иначе

$$\mathrm{tg}^2(\theta_L)=\frac{\mathrm{sh}^2(CU)\cdot\sin^2\kappa}{\mathrm{ch}^2(AC)-\mathrm{sh}^2(CU)\cdot\sin^2\kappa-1}\,. \qquad (\mathrm{II}.11)$$

Воспользуемся теоремой косинусов (I.1) и исключим ch(AC) из (II.11). После несложных преобразований найдем

$$\mathrm{tg}(\theta_L)=\frac{\sin\kappa}{\mathrm{ch}(AU)\left[\left(\frac{\mathrm{th}(AU)}{\mathrm{th}(CU)}\right)+\cos\kappa\right]}\,. \qquad (\mathrm{II}.12)$$

В полученную нами формулу, как и в ряд других формул /10/, связывающих кинематические параметры участвующих в реакции частиц, входит величина th(AU)/th(CU) – отношение скорости центра масс сталкивающихся частиц в л.с.к. к скорости частицы в с.ц.м. Выразим это отношение через массы частиц, энергию и импульс налетающей частицы в л.с. (система покоя частицы A).

Из равенства импульсов частиц в с.ц.м. имеем

$$\mathrm{sh}\,(CU)=\frac{m_A}{m_C}\cdot\mathrm{sh}(AU)\,.$$

Выразив sh(CU) и sh(AU) через гиперболические тангенсы соответствующих отрезков, получим

$$\left[\frac{th(AU)}{th(CU)}\right]^2 = \frac{1+\left[\left(\frac{m_A}{m_C}\right)-1\right]\cdot th^2(AU)}{\left(\frac{m_A}{m_C}\right)^2}.$$

Воспользуемся теперь (II.9) и, выразив $th(AC)$ через параметры движения налетающей частицы в л.с., получим

$$\left[\frac{th(AU)}{th(CU)}\right]^2 = \frac{\left[\frac{m_A}{m_B}+ch(AB)\right]^2+\left[\left(\frac{m_A}{m_B}\right)^2-1\right]\cdot sh^2(AB)}{\left(\frac{m_A}{m_C}\right)^2\left[\frac{m_A}{m_B}+ch(AB)\right]^2}. \qquad (II.13)$$

Легко видеть, что при упругом рассеянии частиц равных масс

$(m_A=m_B=m_C=m_D)$ $th(AU)/th(CU)=1$ и (II.12)

переходит в хорошо известную формулу

$$tg(\theta_L)\cdot ctg\left(\frac{\kappa}{2}\right)=\frac{1}{ch(AU)}. \qquad (II.14)$$

П р и л о ж е н и е 3

Выведем формулу релятивистского поворота спина для случая, когда ориентация спина определяется в системе покоя одной из частиц.

Пусть рассматриваемая реакция $A+B\to C+D$ описывается кинематической диаграммой, изображенной на рис. 6, и нас интересует релятивистский поворот спина частицы C. Будем считать заданными:

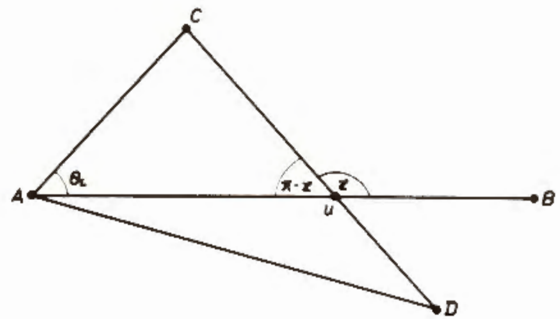

Рис. 6.

массы частиц (m_A, m_B, m_C, m_D), энергию (релятивистский фактор) движения частицы B в системе покоя A, углы вылета частицы C в системе покоя частицы $A(\theta_L)$ и в с.ц.м. (κ). Систему наблюдателя считаем совпадающей с системой покоя частицы A.

Площадь треугольника в общем случае определяется формулой (I.8), которая для нашего случая может быть записана в виде

$$\sin\left(\frac{\Omega_c}{2}\right)=\frac{\sin(\kappa)}{\sqrt{2}\,sh(AC)}\cdot\sqrt{[ch(AU)-1]\cdot[ch(CU)-1][ch(AC)-1]}. \qquad (III.1)$$

По доказанному ранее (II.9)

$$ch(AU)=\frac{m_A+m_B\,ch(AB)}{\sqrt{m_A^2+m_B^2+2m_Am_B\,ch(AB)}},$$

$$sh(AU)=\frac{1}{(m_A/m_C)}\cdot sh(CU)=\frac{1}{\rho}\,sh(CU).$$

Пользуясь последней формулой, выразим ch(CU) через ch(AU) -релятивистский фактор движения ц.м. системы относительно наблюдателя:

$$ch(CU)=\sqrt{sh^2(CU)+1}=\sqrt{1-\rho^2+\rho^2\, ch^2(AU)}\ . \qquad (III.2)$$

Входящую в (III.1) величину (AC)−1 преобразуем:

$$ch(AC)-1=ch(CU)\cdot ch(AU)+sh(CU)\cdot sh(AU)\cos(\kappa)-1=$$

$$=ch(CU)\cdot ch(AU)+sh(CU)\cdot sh(AU)\cos(\kappa)-ch^2(AU)+sh^2(AU) \qquad (III.3)$$

$$=sh^2(CU)\{1+\frac{1}{\rho}\cos(\kappa)+\frac{\sqrt{1-\rho^2+\rho^2\, ch^2(AU)}\,[ch(AU)-\sqrt{1-\rho^2+\rho^2 ch(AU)}}{\rho^2[ch(AU)-1]}\}\ .$$

Подставим (III.3) в (III.1) и воспользовавшись теоремой синусов (I.3), получим интересующее нас выражение в виде

$$\sin^2(\frac{\Omega_c}{2})=\frac{\sin^2(\theta_L)}{2}[ch(AU)-1][\sqrt{1-\rho^2+\rho^2\cdot ch^2(AU)}-1]\times$$

$$\times\{1+\frac{1}{\rho}\cos(\kappa)+\frac{\sqrt{1-\rho^2+\rho^2 ch(AU)}\,[ch(AU)-\sqrt{1-\rho^2+\rho^2 ch^2(AU)}}{\rho^2\cdot[ch^2(AU)-1]}\}\ . \qquad (III.4)$$

При упругом рассеянии частиц с равными массами ($m_A=m_B=m_C=m_D$ $\rho=1$) эта формула принимает вид:

$$\sin^2(\frac{\Omega_c}{2})=\frac{1}{2}\sin^2(\theta_L)[1+\cos(\kappa)]\cdot[ch(AU)-1]^2=$$

$$=\sin^2(\theta_L)\cdot\cos^2(\frac{\kappa}{2})\cdot[ch(AU)-1]^2\ . \qquad (III.5)$$

Воспользовавшись связью между углами рассеяния частицы в разных системах отсчета (II.14) придем к следующему выражению:

$$\sin(\frac{\Omega_c}{2})=\cos(\theta_L)\sin(\frac{\kappa}{2})-\sin(\theta_L)\cos(\frac{\kappa}{2})=\sin(\frac{\kappa}{2}-\theta_L), \qquad (III.6)$$

что, очевидно, совпадает с известной формулой Стаппа /1/.

Авторы выражают благодарность Л.И. Лапидусу за обсуждение ряда затронутых в работе вопросов и Я.А. Смородинскому, давшему ряд ценных советов и ознакомившемуся с рукописью до ее публикации.

Л и т е р а т у р а

1. H.P. Stapp. Phys. Rev., 103, 425 (1956).
2. Я.А. Смородинский. Вопросы физики элементарных частиц (школа теоретической и экспериментальной физики в Нор-Амберде), III, стр. 242, 1963 г.
3. Я.А. Смородинский. Атомная энергия, 14, 110 (1963).
4. Я.А. Смородинский. ЖЭТФ, 43, 2217 (1962).
5. Н.И. Лобачевский. "Три сочинения по геометрии". ГИТТЛ, Москва, 1956 г.
6. Н.А. Черников. Научные доклады высшей школы, 2, 158 (1958).
7. L. Wolfstein, J. Ashkin. Phys. Rev., 85, 947 (1952).
8. С.М. Биленький, Л.И. Лапидус, Р.М. Рындин. ЖЭТФ, 51, 891 (1966).
9. О.Н. Балошин и др. Препринт ИТЭФ, № 700, 1969.
10. А.М. Балдин, В.И. Гольданский, В.И. Максименко, И.П. Розенталь. "Кинематика ядерных реакций", Атомиздат, Москва, 1968.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 июля 1970 г.