ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 5230

В.И. Огиевецкий

МАССОВЫЕ ФОРМУЛЫ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИИ SU_3 -СИММЕТРИИ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1970

P2 - 5230

В.И. Огиевецкий

МАССОВЫЕ ФОРМУЛЫ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИИ SU_3 -СИММЕТРИИ

Направлено в ЯФ

Введение

Унитарная симметрия была предложена Гелл-Манном и Нейманом как обобщение изотопической инвариантности и сохранения странности. Унитарная группа SU_3 содержит изотопическую подгруппу, подгруппу гиперзаряда и меняющие странность преобразования. В предположении, что эти преобразования реализуются линейно и однородно по полям, т.е. что SU_3 есть алгебраическая симметрия по терминологии Вайнберга [1], возникает SU_3 - классификация частиц. Однако в таком алгебраическом аспекте унитарная симметрия с самого начала сильно нарушена, разности масс в унитарных супермультиплетах велики. Блестящий успех унитарной симметрии связан с догадкой о том, что нарушение имеет определенные трансформационные свойства, что массовый оператор есть смесь унитарного синглета и 8 компоненты октета. Догадка парадоксальна, так как нарушение велико.

В этой связи в свете успехов по нелинейным реализациям киральной группы $SU_2 \times SU_2$ представляется соблазнительным предложить, что группа SU_3 реализуется <u>нелинейно,</u> и линеаризация происходит только на ее хорошей подгруппе изоспина и гиперзаряда $SU_2 \times Y$. Предположим, что унитарная симметрия "нарушается" именно поэтому, причем гипотетические скалярные κ -мезоны являются голдстоновскими мезонами согласно общей теории [2] нелинейных реализаций. Тогда только

хорошая подгруппа $SU_2 \times Y$ будет соответствовать алгебраической симметрии: изотопической инвариантности и сохранению странности[x/]. Все остальные следствия SU_3 – чисто динамические (по терминологии Вайнберга). Производные любого поля ψ должны появляться в лагранжиане только в виде "ковариантных производных" $\nabla_\mu \psi$, а поле каппаонов должно входить только через $\nabla_\mu \psi$ и свою собственную ковариантную производную. Будем описывать каппаоны четырьмя вещественными компонентами κ_a, $a = 4,5,6,7$ (изоспинор $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \kappa_4 - i\kappa_5 \\ \kappa_6 - i\kappa_7 \end{pmatrix}$).
Тогда ковариантная производная каппаонов запишется:

$$\nabla_\mu \kappa_a = \partial_\mu \kappa_a + O(\kappa^3), \qquad (1)$$

и ковариантная производная для произвольного поля ψ определится его изоспином T и гиперзарядом Y:

$$\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi + 2iF_\kappa^{-2} \kappa_a \partial_\mu \kappa_b (f_{abl}\, t_l + f_{ab8}\, t_8)\psi + O(\kappa^4),$$

где F_κ – распадная константа (аналог F_π); t_i $(i = 1,2,3)$ – матрицы изоспина для поля ψ; f_{abl} и f_{ab8} – структурные константы группы SU_3. В (1) и (2) $O(\kappa^3)$, $O(\kappa^4)$ означают величины 3 и 4 порядка по κ, которые нас не будут интересовать в дальнейшем.

---

x/ Нелинейная реализация SU_3 с каппаонами рассматривалась недавно несколькими авторами/3/. В связи с несохранением меняющих странность векторных токов каппаоны обсуждаются с 1963 года/4/ и особенно интенсивно в последние годы (см., например,/5/). Сейчас имеются не очень убедительные доказательства в пользу их существования. Отметим, что массовый член каппаонов нарушает определенным образом динамическую SU_3 -симметрию.

При меняющих странность преобразованиях любой изомультиплет (скажем, нуклоны) переходит сам в себя плюс каппаоны, обеспечивающие необходимое изменение странности. Любой лагранжиан, построенный из различных изомультиплетов, их ковариантных производных и ковариантных производных каппаонов будет SU_3 – инвариантным, если сохраняется изоспин и странность. При этом не возникает никаких связей между значениями масс частиц с разным изоспином или гиперзарядом и нет никаких ограничений на константы связи. С первого взгляда такой подход кажется ненужным, так как при нелинейной реализации полностью пропадает SU_3 – классификация частиц и все алгебраические следствия SU_3, кроме связанных с ее подгруппой изоспина и гиперзаряда $SU_2 \times Y$, на которой она линеаризуется. Однако, как показал Вайнберг/1/, для киральной $SU_2 \times SU_2$ группы алгебраические аспекты динамической симметрии восстанавливаются, если наложить дополнительное требование:

Амплитуды рассеяния вперед должны иметь разумное асимптотическое поведение при высоких энергиях. Лагранжиан нелинеен и содержит с необходимостью взаимодействия с производными. Каждый отдельный график Фейнмана дает недопустимо растущий с энергией вклад в амплитуду, по крайней мере в низшем порядке, когда используются графики-деревья (графики без замкнутых петель). Потребуем/1/, чтобы сумма всех возможных графиков-деревьев давала амплитуды, которые ведут себя при больших энергиях не хуже, чем ожидается, например, в теории Редже. Иными словами, требуется, чтобы быстро растущие вклады от графиков-деревьев уничтожались взаимно, а не с вкладами от графиков с петлями.

Трудно обосновать законность требования Вайнберга/1/, оно носит постулативный характер. В этой работе мы осуществим программу Вайнберга для динамической SU_3 -симметрии и покажем, что, как и в случае киральной симметрии $SU_2 \times SU_2$ [1], получаются интересные и разумные результаты. Восстанавливаются алгебраические аспекты SU_3 -симметрии и классификация частиц по унитарным супермультиплетам, при этом оператор квадрата массы должен быть смесью синглета и 8 компоненты октета (формула Гелл-Манна-Окубо как динамическое ограничение, а не как правило слабого "нарушения" симметрии). В системе двух каппаонов имеется больше состояний, чем в системе двух пионов, и поэтому удается получить еще одну формулу, четвертой степени по массам. Полученные формулы очень хорошо согласуются с экспериментальными значениями масс для всех хорошо установленных семейств частиц и резонансов $(1^-, 2^+)$ и позволяют сделать ряд разумных предсказаний. В частности, если в октете $T=1$, $Y=0$ и $T=0$, $Y=0$-состояния не вырождены по массе, то с необходимостью должно быть девятое $T=0$, $Y=0$ - состояния с определенной массой. Мы находим, что должен быть 9 барион $1/2^+$ с массой ≈ 1310 Мэв (имеются экспериментальные указания в пользу его существования [6]. В семействе 0^- девятым мезоном должен быть E(1420), а не X(958)-мезон. Обсуждается возможный нонет 2^-, куда можно отнести X(958), π_A (1640), K_A (1775), тогда девятым будет η_A (1830). Девятый член нонета 1^+, содержащего A_1 -мезон, должен быть очень тяжелым, с массой $\approx$ 2400 Мэв.

Асимптотика графиков типа дерева

При вычислениях мы будем следовать Вайнбергу [1] и постараемся по возможности сохранить его обозначения. В нашем случае рассматривается упругое и неупругое рассеяние вперед каппаонов $\kappa + a \to \kappa + \beta$, где a и β - любые частицы или резонансы. Обозначим через p_μ, λ и p'_μ, λ' их 4-импульсы и спиральности, а через a, q_μ и b, q'_μ - "странные" индексы и 4-импульсы начального и конечного каппаонов, соответственно. Мы рассматриваем процесс при $t = 0$ в пренебрежении массой каппаонов. Удобно выбрать коллинеарную координатную систему, в которой

$$q_\mu = n_\mu \omega, \quad q'_\mu = n_\mu \omega', \quad \vec{p} = -\vec{n}\, p, \quad \vec{p}\,' = -\vec{n}\, p'; \quad |\vec{n}| = n_0 = 1. \tag{3}$$

В этой системе из сохранения энергии и импульса следует, что

$$p + \sqrt{p^2 + m_a^2} = p' + \sqrt{p'^2 + m_\beta^2} \equiv E, \tag{4}$$

$$\omega' = \omega + \frac{m_a^2 - m_\beta^2}{2E}.$$

Инвариантные переменные записываются

$$s = -(p+q)^2 = m_a^2 + 2\omega E, \quad u = -(p-q')^2 = m_a^2 - 2\omega' E. \tag{5}$$

Спиральность сохраняется, $\lambda = \lambda'$ нас будет интересовать асимптотическое поведение инвариантной амплитуды $M_{\beta b, a a}(\omega, \lambda)$ как функции энергии каппаона ω при фиксированных p и p'. Разобьем M на симметричную и антисимметричную части относительно замены индексов каппаонов a и b.

$$M^{(+)}_{\beta b, a a}(\omega, \lambda) = \frac{1}{2}\left(M_{\beta b, a a}(\omega, \lambda) + M_{\beta a, a b}(\omega, \lambda)\right) \tag{6}$$

$$M^{(-)}_{\beta b, a a}(\omega, \lambda) = \frac{1}{\omega + \omega'}\left(M_{\beta b, a a}(\omega, \lambda) - M_{\beta a, a b}(\omega, \lambda)\right). \tag{7}$$

В древесном приближении с использованием общего SU_3 -инвариантного лагранжиана с достаточно большим числом частиц амплитуда имеет вид

$$M_{\beta b, a a}(\omega,\lambda) = P_{\beta b, a a}(\omega,\lambda) + \sum_\gamma \left[(s-m_\gamma^2)^{-1}\Omega^\gamma_{\beta b, a a}(\omega,\lambda) + (u-m_\gamma^2)^{-1}\Omega^\gamma_{\beta a, a b}(-\omega',\lambda)\right]. \qquad (8)$$

Полином P возникает из контактных графиков и графиков с обменом виртуальным мезоном в t -канале (рис. 1). Остальной части амплитуды соответствуют графики рис. 2 с обменом различными виртуальными частицами γ в s- и u -каналах; полином Ω возникает из числителей пропагаторов γ-частиц и из производных во взаимодействии каппаона с мишенью. Динамическая SU_3 -инвариантность налагает следующие ограничения. Из вида ковариантной производной любого поля $\nabla_\mu \psi$ (2) следует, что лагранжиан с необходимостью содержит минимальное контактное взаимодействие

$$2F_\kappa^{-2}\kappa_a \partial_\mu \kappa_b (f_{ab1} V^1_\mu + f_{ab8} V^8_\mu), \qquad (9)$$

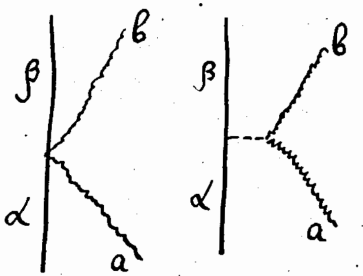

Рис. 1

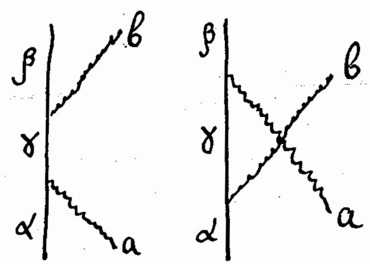

Рис. 2

где V^i_μ и V^8_μ – сохраняющиеся изотопический и гиперзарядный токи $\int V^i_0(x)d^3x = T^i$ $(i=1,2,3)$, $\int V^8_0(x)d^3x = T^8 = \frac{\sqrt{3}}{2}Y$ x/. Взаимодействия в вершинах рис. 2 имеют вид:

$$F_\kappa^{-1} V^a_\mu \nabla_\mu \kappa_a , \qquad (10)$$

где $V^a_\mu(x)$ – феноменологический меняющий странность ток. За счёт производной каппаона эта связь дает $q_\mu V^a_\mu = \omega n^\mu V'^a_\mu$. В нашей кинематике можно параметризовать $n^\mu V^a_\mu$ в виде

$$\langle p',\lambda',\beta | n^\mu V^a_\mu(0) | p,\lambda,a \rangle = (2\pi)^{-3}(4p_0 p_0')^{-1/2}\, 4E\,\delta_{\lambda\lambda'} (X^a(\lambda))_{\beta a}, \qquad (11)$$

где $X^a(\lambda)$ – безразмерная эрмитова матрица, которая будет очень важна для нас. Этот анализ аналогичен анализу Вайнберга для киральной группы $SU_2 \times SU_2$, причем связи с пионами (3.2) и (3.5) в [1] заменены на связи с каппаонами (9), (10), а параметризация (1.5)[1] на (11). Поэтому мы опустим детали последующих вычислений, сославшись на работу[1]. Разложим амплитуды $M^{(\pm)}$ в ряд Лорана по $1/\omega$ при больших ω :

$$M^{(\pm)}_{\beta b, a a}(\omega,\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{N} \omega^n M^{(\pm)}_{\beta b, a a; n}(\lambda).$$

Коэффициенты при положительных степенях ω зависят от неминимальных взаимодействий. Однако коэффициенты при нулевой и отрицательных степенях ω определяются однозначно. Именно, если ввести диагональную массовую матрицу

x/ Возможны также неминимальные контактные связи с двумя и выше ковариантными производными каппаонов. Они будут давать в полином P более высокие степени ω, чем минимальная связь (9).

$$m^2_{\gamma a} = m^2_{a}\,\delta_{\gamma a}\,, \tag{13}$$

то из (6–11) следует (ср. /1/), что

$$M^{(+)}_{\beta b,\,\alpha a;\,0}(\lambda) = 4F_{\kappa}^{-2}\{[X^{b}(\lambda),[m^2,X^{a}(\lambda)]]+[X^{a}(\lambda),[m^2,X^{b}(\lambda)]]\}_{\beta\alpha} \tag{14}$$

$$M^{(-)}_{\beta b,\,\alpha a;\,0}(\lambda) = 8EF_{\kappa}^{-2}\{if_{abi}T^{i}+if_{ab8}T^{8}-[X^{a}(\lambda),X^{b}(\lambda)]\}_{\beta\alpha} \tag{15}$$

$$M^{(-)}_{\beta b,\,\alpha a;\,-2}(\lambda) = 2E^{-1}F_{\kappa}^{-2}[[X^{a}(\lambda),m^2],[X^{b}(\lambda),m^2]]_{\beta\alpha} \tag{16}$$

$(M^{(\pm)}_{\beta b,\,\alpha a;\,-1}(\lambda)=0)$ . . . .

Алгебраические следствия динамической SU_3-инвариантности

Теперь потребуем, в соответствии с намеченной программой, чтобы асимптотическое поведение амплитуды в древесном приближении не портило предсказаний теории полюсов Редже. С учётом множителя $(\omega+\omega')^{-1}$ в определении (7) антисимметричная амплитуда должна вести себя как

$$M^{-} \approx \omega^{\alpha_{T,Y}(0)-1}\,, \tag{17}$$

где $\alpha_{T,Y}(0)$ – интерсепт ведущей траектории с изоспином T и гиперзарядом Y. В t – канале система двух каппаонов κ_a и κ_b, антисимметричная по странным индексам a и b, может иметь следующие изоспин и гиперзаряд:

$T=1, Y=0$ ρ – траектория, $\alpha^{\rho}_{10}(0) \approx 0{,}57$

$T=0, Y=0$: ω – траектория, $\alpha^{\omega}_{00}(0) \approx 0{,}45$

$T=0, Y=\pm 2$: – экзотические обмены $\alpha_{0,\pm 2}(0) < 0$.

Следовательно, M^{-} должна убывать, и поэтому константный член $M^{(-)}_{\beta b,\,\alpha a;\,0}(\lambda)$ должен быть равен нулю, т.е. получаем

$$[X^{a}(\lambda),X^{b}(\lambda)] = if_{abi}T^{i}+if_{ab8}T^{8}. \tag{18}$$

Из изотопической инвариантности и сохранения гиперзаряда следует, что

$$[T^{i},X^{a}(\lambda)] = if_{iab}X^{b}(\lambda);\quad [T^{8},X^{a}(\lambda)] = if_{8ab}X^{b}(\lambda) \tag{19}$$

$$[T^{i},T^{j}] = i\epsilon_{ijk}T^{k},\quad [T^{8},T^{i}] = 0.$$

Таким образом доказано, что операторы T^{i}, T^{8} и X^{a} образуют алгебру SU_3 (18, 19), причем они имеют ненулевые элементы $X^{a}_{\gamma\alpha}$ в обкладках между одночастичными состояниями. Отсюда следует, что участвующие в игре частицы α, β, γ ... с любой данной спиральностью должны заполнять неприводимые или приводимые представления унитарной группы SU_3. Иными словами, восстанавливается классификация частиц по унитарным супермультиплетам.

Рассмотрим теперь симметричную амплитуду. При $t = 0$ она имеет при $\omega \to \infty$ асимптотическое поведение

$$M^{(+)} \approx \omega^{\alpha_{T,Y}(0)}. \tag{20}$$

Симметричная по странным индексам система двух каппаонов κ_a и κ_b может иметь в t-канале следующие квантовые числа:

$T=0, Y=0$; полюс Померанчука, $\alpha^{P}_{0,0}(0)\approx 1$

$T=0, Y=0$; A_2 траектория, $\alpha^{A}_{1,0}(0)\approx 0{,}35$

$T=1, Y=\pm 2$; экзотические обмены, $\alpha_{1,\pm 2}(0)<0$.

Поэтому потребуем, чтобы константная часть амплитуды $M^{(+)}_{\beta b,\alpha a;0}$ не имела $Y=\pm 2$ в t-канале, или

$$(Y^2 M^{(+)})_{\beta b,\alpha a;0} = 2M^{(+)}_{\beta b,\alpha a;0}(\lambda) - \frac{8}{3} f_{a8c} f_{b8d} M^{(+)}_{\beta c,\alpha d;0}(\lambda) = 0, \qquad (21)$$

где Y^2 – оператор квадрата гиперзаряда для величины с двумя странными индексами. Условие (21) означает, что часть $M^{(+)}_{\dots,0}$ с гиперзарядом ± 2 равна нулю, тогда как на часть $M^{(+)}_{\dots,0}$ с гиперзарядом 0 нет ограничений $(Y^2=0)$, так как $\alpha^{P}_{00}(0)$ и $\alpha^{A}_{10}(0)$ положительны. С учётом (18), тождества Якоби и коммутативности m^2 с T^i и T^8 можно упростить (14) и записать

$$M^{(+)}_{\beta b,\alpha a;0}(\lambda) = -8F_\kappa^{-2}[X^a(\lambda), [X^b(\lambda), m^2]]. \qquad (14')$$

Тогда условие (21) примет вид

$$[X^a, [X^b, m^2]] = \frac{4}{3} f_{a8c} f_{b8d} [X^c [X^d, m^2]]. \qquad (21')$$

Что означает это условие? Чтобы выяснить это, определим

$$m^2_a = \frac{4}{3}\, i f_{a8b} [X^b, m^2] \quad (a) \qquad [X^a, m^2] = i f_{a8b}\, m^2_b \quad (a')$$
$$m^2_i = \frac{2}{\sqrt{3}} d_{abi} [X^a, [X^b, m^2]] \quad (b) \qquad (22)$$
$$m^2_8 = \frac{1}{3} [X^a, [X^a, m^2]] \quad (c)$$

$(a, b = 4,5,6,7;\ i = 1,2,3)$.

Тогда из условия (21') следует с использованием тождества Якоби и тождеств для структурных констант SU_3 группы $f_{\alpha\beta\gamma}$ и $d_{\alpha\beta\gamma}$ (см. Приложение):

$$[X^a, m^2_b] = i f_{abi}\, m^2_i + i f_{ab8}\, m^2_8 ; \quad (a)$$
$$[X^a, m^2_i] = i f_{aib}\, m^2_b \quad (b); \qquad [X^a, m^2_8] = i f_{a8b}\, m^2_b ; \quad (c). \qquad (23)$$

Из определений (22) очевидно, что

$$[T^i, m^2_8] = [T^8, m^2_8] = [T^8, m^2_i] = 0;$$
$$[T^i, m^2_j] = i f_{ijk}\, m^2_k ; \qquad (24)$$
$$[T^i, m^2_a] = i f_{iab}\, m^2_b, \quad [T^8, m^2_a] = i f_{8ab}\, m^2_b .$$

Соотношения (23) и (24) говорят нам, что m^2_a, m^2_i и m^2_8 образуют октет. Сравнивая (22a') и (23c), находим $[X^a, m^2 - m^2_8] = 0$, т.е.

$$m^2 = m^2_{inv} + m^2_8 . \qquad (25)$$

Таким образом доказано, что массовый оператор есть сумма унитарного инварианта m^2_{inv} и восьмой компоненты октета m^2_8. Мы пришли к виду "нарушения" SU_3, предложенному Гелл-Манном и Окубо. Подчеркнем, что нигде не предполагалась малость m^2_8 по сравнению с m^2_{inv}. В алгебраической реализации условие (25) получается как точное следствие динамического предположения об асимптотике древесных амплитуд.

Отметим важную роль A_2-траектории. Если бы ее не было (как в случае киральной $SU_2 \times SU_2$ [1], где два пиона не могут обладать квантовыми числами A_2) или если бы интерсепт $\alpha^{A_2}_{1,0}(0)$ был отрицателен, то мы получили бы вместо (21) условие $[X^a,[X^b,m^2]] = \frac{1}{4}\delta_{ab}[X^c,[X^c,m^2]]$. Это условие дало бы $m^2 = m^2_{inv}$, т.е. восстановление точной SU_3-симметрии для масс.

Далее, представляется разумным предположить, что для экзотических обменов с гиперзарядом ± 2 $\alpha_{T,Y=+2}(0) < -1$, что не противоречит анализу экспериментальных данных Моррисона [8] (условие $\alpha_{T,Y=\pm 2}(0) < -2$ уже могло бы противоречить). В этом предложении часть $M^{(-)}_{\beta b, \alpha a; -2}(\lambda)$ (16) должна обращаться в нуль, и, полагая $Y^2 M^{(-)}_{\beta b, \alpha a; -2} = 0$, мы находим еще одно соотношение для масс:

$$[[X^a, m^2],[X^b, m^2]] = \frac{4}{3} f_{a8c} f_{b8d} [[X^c, m^2][X^d, m^2]], \tag{26}$$

которое, как увидим ниже, приводит к разумным ограничениям на массы.

Результаты

Для извлечения следствий удобно ввести операторы [9]

$$X^{1/2}_1 = -\frac{X^4 + iX^5}{\sqrt{2}}, \qquad X^{-1/2}_{-1} = -(X^{1/2}_1)^+,$$
$$X^{-1/2}_1 = -\frac{X^6 + iX^7}{\sqrt{2}}, \qquad X^{1/2}_{-1} = (X^{-1/2}_1)^+. \tag{27}$$

Тогда групповые соотношения (18) сводятся к

$$[X^{1/2}_1, X^{-1/2}_1] = 0; \quad [X^{1/2}_1, X^{-1/2}_{-1}] = -\frac{1}{2}(Q + Y), \tag{18'}$$

где Q – электрический заряд, а соотношения для масс (21) и (26) эквивалентны следующим:

$$[X^{1/2}_1, [X^{-1/2}_1, m^2]] = 0 \tag{21'}$$

$$[[X^{1/2}_1, m^2], [X^{-1/2}_1, m^2]] = 0. \tag{26'}$$

Определим матричные элементы этих операторов $X_{\beta\alpha}$ согласно теореме Вигнера-Эккарта с явным выделением зависимости от гиперзарядов Y_α, Y_β и проекций изоспина t_α, t_β

$$\langle \beta\, t_\beta Y_\beta | X^t_1 | \alpha\, t_\alpha Y_\alpha \rangle = \delta_{Y_\alpha+1, Y_\beta} C_{T_\alpha \frac{1}{2}}(T_\beta t_\beta; t_\alpha, t) X_{\beta\alpha},$$
$$\langle \beta\, t_\beta Y_\beta | X^t_{-1} | \alpha\, t_\alpha Y_\alpha \rangle = (-1)^{\frac{1}{2}-t} \langle \alpha\, t_\alpha Y_\alpha | X^{-t}_1 | \beta\, t_\beta Y_\beta \rangle, \tag{28}$$

где T_α, T_β – значения полного изоспина, C – коэффициенты Клебша-Гордана. Насыщая групповые соотношения (18) квазиодночастичными состояниями, мы получаем уравнения для приведенных матриц $X_{\beta\alpha}$, которые непротиворечивы, если состояния $\alpha, \beta \ldots$ заполняют приводимое или неприводимое представление SU_3. Подставляя решения этих уравнений в (21') и (26'), получаем соответствующие массовые формулы. Рассмотрим простые модели.

Для состояний $\Delta, \Sigma, \Xi, \Omega$, образующих декуплет, находим из (18') (с точностью до несущественных фазовых множителей)

$$X_{\Delta\Sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad X_{\Sigma\Xi} = \sqrt{2}, \quad X_{\Xi\Omega} = \sqrt{\frac{3}{2}}. \tag{29}$$

Тогда (21') дает формулу Гелл-Манна-Окубо для квадратов масс (символы частиц обозначают их массы)

$$\Omega^2 - \Xi^2 = \Xi^2 - \Sigma^2 = \Sigma^2 - \Delta^2, \tag{30}$$

которая хорошо выполняется. Интересно, что соотношение (21) для декуплета выполняется тождественно и не дает никаких ограничений на массы.

Рассмотрим теперь семейство, состоящее из октета и синглета с некоторой данной спин-чётностью J^P. Пусть члены этого семейства будут N, Λ_1, Λ_2, Σ, Ξ. Тогда из (18') с точностью до несущественных фазовых множителей следует

$$X_{N\Sigma} = \sqrt{\frac{3}{4}}, \quad X_{N\Lambda_1} = \sqrt{\frac{3}{4}}\cos\theta, \quad X_{N\Lambda_2} = \sqrt{\frac{3}{4}}\sin\theta,$$

$$X_{\Sigma\Xi} = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad X_{\Lambda_1\Xi} = \sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta, \quad X_{\Lambda_2\Xi} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta, \tag{31}$$

где θ - угол смешивания. Беря в обкладки между N, Ξ двойной коммутатор (21'), приходим к соотношению

$$2N^2 + 2\Xi^2 = \Sigma^2 + 3\Lambda_1^2\cos^2\theta + 3\Lambda_1^2\sin^2\theta, \tag{32}$$

которое при $\theta = 0$ совпадает с формулой Гелл-Манна-Окубо, а при $\theta \neq 0$ связывает угол смешивания с массами частиц в нонете. Соотношение (26') дает новую массовую формулу

$$(\Xi^2 - \Sigma^2)(\Sigma^2 - N^2) = $$
$$= (\Xi^2 - \Lambda_1^2)(\Lambda_1^2 - N^2)\cos^2\theta + (\Xi^2 - \Lambda_2^2)(\Lambda_2^2 - N^2)\sin^2\theta . \tag{33}$$

Для бозонов состояния с $T = \frac{1}{2}$, $Y = \pm 1$ имеют равную массу и следует просто заменить Ξ^2 и N^2 на K^2, Σ^2 на π^2, Λ^2 на η^2. Например, формула (33) для бозонов запишется

$$(K^2 - \pi^2)^2 = (\eta_1^2 - K^2)^2\cos^2\theta + (\eta_2^2 - K^2)^2\sin^2\theta \tag{33}$$

(напомним, что символы частиц обозначают их массу).

Необходимость нонетов. Предположим, что угол смешивания θ равен нулю, и мы имеем дело с чистым октетом. Исключая из (32) и (33) $\Xi^2 + N^2$ (или K^2 для бозонов), находим $(\Lambda^2 - \Sigma^2)^2 = 0$ для фермионов, $(\eta^2 - \pi^2)^2 = 0$ (для бозонов). Таким образом, чистый октет возможен тогда и только тогда, когда состояния $T = 0, Y = 0$ и $T = 1, Y = 0$, Σ Λ или η и π, имеют равную массу. В этом случае $\Xi^2 + N^2 = 2\Lambda^2 = 2\Sigma^2$ (для фермионов), $K^2 = \eta^2 = \pi^2$ (для бозонов). Мы приходим к выводу, что если нет $\Sigma - \Lambda$ (или $K - \pi - \eta$) вырожденности, то нонетная структура обязательна.

В случае нонетов можно исключить угол смешивания из (32) и (33) и найти формулу, непосредственно связывающую массы частиц из нонета. Она имеет вид для бозонов

$$4K^2(\eta_1^2 + \eta_2^2 + 2\pi^2) = 8K^4 + 3\eta_1^2\eta_2^2 + \pi^2(\eta_1^2 + \eta_2^2 + 3\pi^2). \tag{34}$$

Можно выразить отсюда массу любого члена нонета через массы остальных членов. Так,

$$\eta_2^2 = 2K^2 - \frac{3}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{3}{2}\,\frac{(\eta_1^2-\pi^2)^2}{4K^2-3\eta_1^2-\pi^2}\,. \tag{35}$$

Для фермионов следует подставить в (35) и (34) Ξ^2+N^2 вместо $2K^2$, Σ^2 вместо π^2 и Λ^2 вместо η^2. Например, (35) запишется:

$$\Lambda_2^2 = \Xi^2+N^2-\frac{3}{2}\Sigma^2+\frac{1}{2}\Lambda_1^2+\frac{3}{2}\,\frac{(\Lambda_1^2-\Sigma^2)^2}{2(\Xi^2+N^2)-3\Lambda_1^2-\Sigma^2}\,. \tag{35'}$$

В формуле (35) в качестве η_1^2 (или Λ_1^2) желательно брать "более синглетное" состояние, для которого величина $4K^2-\pi^2-3\eta_1^2$ не очень мала, в противном случае результаты будут чувствительны к небольшим изменениям масс. Формулы (35) и (34) с высокой точностью выполняются для хорошо установленных нонетов. Для нонета 1^- ($K^*(892)$, $\phi(1019)$, $\omega(783)$, $\rho(765)$) формула (35) дает для массы ϕ-мезона 1010 Мэв (точность 1%). Для нонета 2^+ ($K_A(1420)$, $f(1260)$, $f'(1514)$, $A_2(1320)$) из (35) для массы f' находим 1500 Мэв (снова точность $\approx$ 1%). Обсудим на этом основании другие возможные нонеты.

Нонет 0^-. Массы K, π и η-мезонов сильно отличаются, следовательно, должен быть девятый мезон 0^-. Имеются две возможности, $E(1420)$ и $X(958)$-резонансы. Если выбрать $E(1420)$, то (35) для массы η даст 544 Мэв вместо 549 Мэв. (точность $\approx$ 1%). Если же взять $X(958)$, то получим из (35) массу η-мезона, равную 495 Мэв, что плохо. Таким образом, алгебраическая реализация SU_3 предпочитает $E(1420)$ в качестве 9 члена нонета 0^-. (Отметим, что нарушенная симметрия говорит о том же[10]).

Возможный нонет 2^-. Спин-чётность $X(958)$ пока еще экспериментально не установлена, значения 0^- и 2^- равновероятны[7,10,11]. Предположим, что $X(958)$ имеет спин-чётность 2^-. Имеется еще два резонанса, $\pi_A(1640)$ и $K_A(1775)$, для которых спин-чётность 2^- кажется сейчас предпочтительной[7]. Тогда, согласно (35), масса девятого члена обсуждаемого нонета 2^- должна быть равна 1835 Мэв. Резонанс с близкой массой, $\eta_A(1830)$, имеется[7]. Алгебраическая реализация SU_3 предсказывает, что его спин-чётность есть 2^-.

Нонет 1^+. Далее, девятый член мультиплета 1^+, содержащего $K_A(1240)$, $D(1285)$ и $A_2(1070)$ - резонансы, должен быть очень тяжелым, (35) дает 2400 Мэв. Отметим, что имеются указания на существование резонанса $\bar{N}N_{I=0}(2380)$ [7].

Перейдем теперь к фермионам.

Нонет $1/2^+$. Массы Σ- и Λ - частиц различны, и поэтому предсказывается девятый барион $1/2^+$. Если взять средние квадраты масс в изомультиплетах N, Σ, Ξ, то из (35) находим, что масса обсуждаемой Λ' частицы будет равна 1310 Мэв. Это значение, однако, чувствительно к малым изменениям масс внутри изомультиплетов Σ, Ξ, т.к. в правой стороне формулы (35) приходится брать "более октетное" состояние, и, соответственно, мал знаменатель. Можно говорить только, что масса Λ' должна лежать в интервале 1280-1340 Мэв, тогда (35) хорошо соблюдается. В настоящее время имеются указания на существование частицы с такой массой, $Y^*(1327)\to\Lambda+\gamma$ [6].

Нонет $1/2^-$. Это семейство содержит $N(1535)$, $\Lambda'(1405)$, $\Lambda(1670)$, $\Sigma(1750)$. Соотношение (34) есть квадратное уравнение для массы Ξ и мы имеем два решения: 1) либо $\Xi \approx 1800$ Мэв, $|\theta| \approx 18^\circ$; 2) либо $\Xi = 1710$ Мэв, $|\theta| \approx 35^\circ$. Соответствующие Ξ резонансы пока не наблюдались. Однако, анализируя распады $\Lambda'(1405)$ и $\Lambda(1670)$, Трипп указывает угол смешивания $\theta = -18\pm3^\circ$ [7] (первое решение), а

Леви-Сетти[12] – $\theta = -36{,}5 \pm 4^{\circ}$ (второе решение).

<u>Нонет $3/2^-$.</u> Установлены резонансы $N(1520)$, $\Lambda(1690)$, $\Sigma(1670)$, $\Lambda'(1520)$. Для массы Ξ резонанса $3/2^-$ снова находим два решения: либо Ξ = 1830 Мэв, либо Ξ = 1650 Мэв. Леви-Сетти[7,12] считает, что в нонет $3/2^-$ входит $\Xi(1820)$, что согласуется с первым решением.

Другие возможные нонеты мы не будем обсуждать здесь, так как в них нет достаточного числа хорошо установленных членов.

В заключение нам приятно выразить благодарность Б. Валуеву, Б. Зупнику, А. Филиппову и М. Элиашвили за полезные обсуждения.

Приложение

<u>Полезные тождества для структурных констант группы SU_3</u>

Пусть a, b, c, d = 4,5,6,7 – индексы меняющих странность генераторов ("странные индексы"), i, j, k = 1,2,3 – индексы изотопических генераторов, и пусть индексы α, β, γ принимают все восемь значений 1,2,3,4,... 8. Тогда:

1. Структурные константы SU_3 группы $f_{\alpha\beta\gamma}$ и $d_{\alpha\beta\gamma}$ равны нулю, если они содержат нечётное число странных индексов ("сохранение странности")

$$f_{abc} = d_{abc} = f_{aij} = d_{aij} = f_{ai8} = d_{ai8} = 0.$$

2. При фиксации "странности" индексов для структурных констант имеют место следующие полезные тождества, дополняющие общие тождества из[13] и использованные в тексте работы.

$$\sum_\alpha f_{ab\alpha} f_{\alpha cd} \equiv \frac{1}{4}(\delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc}) + \frac{2}{3} f_{ab8} f_{cd8} + \frac{1}{3}(f_{ac8} f_{bd8} - f_{ad8} f_{bc8}), \qquad (\Pi.1)$$

$$\sum_\alpha d_{ab\alpha} d_{\alpha cd} \equiv -\frac{1}{6}\delta_{ab}\delta_{cd} + \frac{1}{4}(\delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}) + \frac{1}{3}(f_{ac8} f_{bd8} + f_{ad8} f_{bc8}) \qquad (\Pi.2)$$

$$\sum_\alpha d_{ab\alpha} f_{\alpha cd} \equiv \frac{1}{2\sqrt{3}}(\delta_{ac} f_{bd8} + \delta_{bc} f_{ad8} - 2\delta_{ab} f_{cd8} - \delta_{ad} f_{bc8} - \delta_{bd} f_{ac8}), \qquad (\Pi.3)$$

$$\sum_\alpha f_{ai\alpha} f_{\alpha ib} \equiv -\frac{1}{4}\delta_{ij}\delta_{ab} - \frac{1}{2}\sum_k \epsilon_{ijk} f_{kab}, \qquad (\Pi.4)$$

$$\sum_\alpha d_{ai\alpha} d_{\alpha jb} \equiv \frac{1}{4}\delta_{ij}\delta_{ab} + \frac{1}{2}\sum_k \epsilon_{ijk} f_{kab}, \qquad (\Pi.5)$$

$$\sum_\alpha d_{ai\alpha} f_{\alpha jb} \equiv -\frac{1}{2\sqrt{3}}\delta_{ij} f_{ab8} + \frac{1}{2}\sum_k \epsilon_{ijk} d_{kab}, \qquad (\Pi.6)$$

$$\sum_\alpha f_{a8\alpha} f_{\alpha 8b} \equiv -\frac{3}{4}\delta_{ab}, \qquad (\Pi.7)$$

$$\sum_\alpha f_{8a\alpha} f_{\alpha bi} \equiv -\frac{\sqrt{3}}{2} d_{abi}, \qquad (\Pi.8)$$

$$\sum_\alpha f_{8a\alpha} d_{\alpha bi} \equiv \frac{\sqrt{3}}{2} f_{abi}. \qquad (\Pi.9)$$

Структурные константы $d_{\alpha\beta 8}$ не включены в эти тождества, так как при фиксации странности они выражаются через символы Кронекера:

$$d_{ab8} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\delta_{ab}, \quad d_{ij8} = \frac{1}{\sqrt{3}}\delta_{ij}, \quad d_{888} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3. Из этих тождеств следует, в частности, интересное тождество для произведения любых трех "странных" матриц $A_n = \sum_{a=4}^{7} A_n^a \lambda_a$

$$A_1 A_2 A_3 \equiv \frac{1}{4}(1+R)A_1 \, Sp(A_2 A_3 (1-R)) + \frac{1}{4}(1-R)A_3 Sp(A_1 A_2 (1-R)), \qquad (П.10)$$

где $R = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix} = \frac{1}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \lambda_8$

матрица, антикоммутирующая с любой странной матрицей,

$$\{A_n, R\} = 0 \qquad (П.9)$$

и коммутирующая с любой нестранной матрицей $B = \sum_{i=1}^{3} B_i \lambda_i + B_8 \lambda_8$

$$[B, R] = 0. \qquad (П.10)$$

Отметим также тождества для любых странных матриц

$$(1-R)[A_1, A_2] \equiv -(1-R) Sp(A_1 A_2 R) \qquad (П.13)$$

$$(1-R)\{A_1 A_2\} \equiv (1-R) Sp(A_1 A_2).$$

Отсюда следует

$$Sp(R\{A_1, A_2\}) \equiv 0 \qquad (П.14)$$

Литература

1. S. Weinberg, Phys. Rev., 177, 2604 (1969).
2. S. Coleman, J. Wess, B. Zumino. Phys. Rev., 177, 2239, 1969.
   C.J. Jsham, Nuovo Cim., 59A, 356 (1969).
3. A. Salam, J. Strathdee. Phys. Rev., 184, 1750, 1969.
   В.И. Огиевецкий, в Proc. IX Cracow School of Theor. Physics, vol. 1, 29, 1969.
   А. Болохов, Ю. Новожилов, ЯФ, 10, 397, 1969.

4. Y. Nambu, J.J. Sakurai. Phys. Rev., Lett., 11, 42, 1963.
5. B. Renner, Rapporteur's Talk, Lund Conference of Elementary Particles. Preprint DAMTP 69/27.
6. N.P. Bogachev, Y.A. Budagov et al., Preprint JINR E1-4252,
7. Particle Date Group, Rev.Mod.Phys., 42, 87, 1969.
8. D.R.O. Morrison, Review of Inelastic Two Body Reactions, Conference on High Energy Two Body Reactions, Stony Brook, 1966, CERN preprints, 66-20.
9. J.J. de Swart Rev. Mod. Phys., 35, 916 (1963).
10. А.Н. Заславский, В.И. Огиевецкий, В. Тыбор. Письма ЖЭТФ, 6, 604, 1967.
11. А.Н. Заславский, В.И. Огиевецкий, В. Тыбор. ЯФ, 9, 852, 1969.
12. R. Levi-Setti, Rapporteur's Talk, Lund Intern. Conf. on Elementary Particles Preprint EF1-69-78.
13. В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов, ЯФ, 4, 853 (1966);
    A.J. Macfarlane, A. Sudbery, P.H. Weisz, Commun. Math. Phys. 11, 77 (1968).
    A. Pais, Phys. Rev., 173, 1587 (1968).

Рукопись поступила в издательский отдел
3 июля 1970 года.