ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 5147

Р.А. Асанов

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

О ПОЛНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ЗАРЯДЕ И МАССЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО МИРА

1970

P2 - 5147

Р.А. Асанов

О ПОЛНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ЗАРЯДЕ И МАССЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО МИРА

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая физика"

Summary

It is well known, that the total electrical charge, momentum and mass of the spherical closed world of the constant positive curvature are equal to zero/1/. It is due to the absence of any closed surface, which surrounds the whole space. Otherwords, in the spherical 3-space any closed 2-surface devides the whole space into two regions and surrounds both the first and the second. Therefore integrating, say, the Maxwell equation $\partial_k(\sqrt{-g}F^{4k}) = 4\pi\rho$ over each space region and transforming the volume integrals to surface ones, we can conclude that these must have the same absolute value but opposite signs (in virtue of opposite directions of normals). Summing up we arrive at conclusion that the total charge is zero.

In the case of elliptic space/2/ the situation is not so obvious because of the existence of some closed one-sided surfaces, the so-called elliptic or projective planes, which do not devide the space and do not surround any region. Therefore the opinion, that the total charge and mass of the elliptic world are not to be equal to zero, can be met sometimes.

We shall proof, that they are equal to zero. First of all, the elliptic 3-space is an orientable one/3/, and integration of a divergence over the whole space has unambiguous sense. Secondly, some closed two-sided surfaces certainly exist, which devide the space into two regions, and no surface exists, which would surround the whole space. Now, nothing hinders the integration over each region and the application of the Gauss theorem. So we deduce, that the total charge, momentum and mass of elliptic world are equal to zero. (For the latest two we may use, e.g. the Landau formulae/1/). For visualizing, we consider an example of charge distribution in elliptic space, when a point charge, say + e, is present. Then it occurs, that " the equatorial plane" must have the charge equal to -e.

Как известно /1/, в замкнутом сферическом (трехмерном) пространстве постоянной положительной кривизны полный электрический заряд должен быть равен нулю. Аналогично для этого пространства обращаются в нуль полный импульс и масса, если пользоваться формулами Ландау /1/. Дело в том, что всякая замкнутая поверхность в сферическом пространстве с обеих своих сторон охватывает конечные области пространства, в каждой из которых она может быть непрерывно стянута в точку. Поэтому интегралы по всему 3-объему от плотности электрического заряда или 4-импульса, выражающиеся в силу уравнений через соответствующие поверхностные интегралы, обращаются в нуль. (Короче можно сказать, что причиной обращения в нуль поверхностного интеграла является отсутствие поверхности, охватывающей все сферическое пространство). Нужно заметить, что зависимость кривизны от времени (как это имеет место, например, в решениях Фридмана) не изменит дела, поскольку электрический заряд сохраняется и монопольное электромагнитное (равно как и гравитационное) излучение не существует.

В случае другого возможного сферически-симметричного замкнутого пространства постоянной положительной кривизны, а именно эллиптического пространства /2/, ситуация не столь прозрачна. В эллиптическом пространстве имеются замкнутые поверхности, так называемые эллиптические или проективные плоскости, которые лежат в пространстве односторонне /3/, т.е. не делят его на две области, и не охватывают никакой области, ни тем более всего пространства. Проективные плоскости не могут быть стянуты в точку без самопересечений.

В силу этих причин можно встретить высказывания о том, что электрический заряд и масса эллиптического мира могут быть не равны нулю. Мы покажем, что полный заряд, импульс и масса эллиптического мира равны нулю.

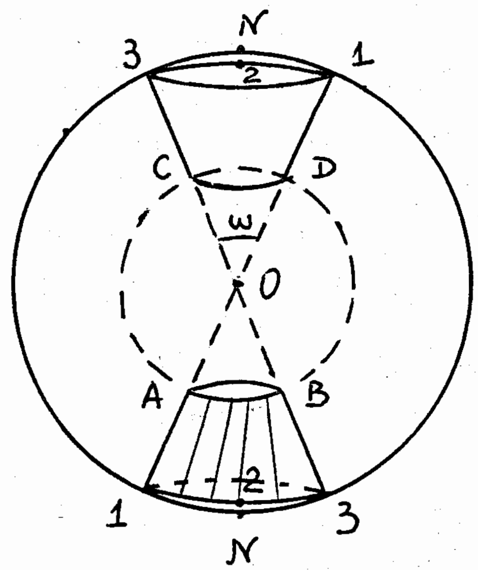
Прежде всего заметим, что трехмерное эллиптическое пространство является ориентируемым /3/ и, следовательно, интеграл по всему объему от величины типа дивергенции имеет смысл. Далее ясно, что для применения теоремы Гаусса-Остроградского о переходе от объемного интеграла к поверхностному нет никаких препятствий. Так как в эллиптическом пространстве, также как и в сферическом, отсутствует поверхность, охватывающая весь объем, интересующие нас поверхностные интегралы, выражающие полный заряд, 3-импульс и массу, обращаются в нуль. Более подробно можно сказать, что в эллиптическом пространстве несомненно существуют двусторонние замкнутые поверхности (топологически эквивалентные сфере), которые делят его на две области. Несмотря на то, что эти поверхности могут быть стянуты в точку только в одной из двух областей, на которые они делят пространство, они все же не препятствуют вычислению объемных интегралов в каждой из областей и применению затем теоремы Гаусса. Двусторонность приведет к равенству поверхностных интегралов с обратным знаком (ввиду различия направления внешней нормали к поверхности) и, следовательно, к обращению в нуль их суммы.

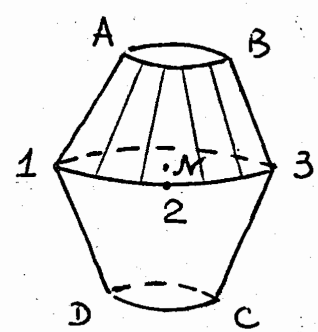
Чтобы сделать рассуждения более наглядными, проведем некоторое конкретное рассмотрение для электрического заряда. Метрика эллиптического мира в сферических координатах имеет вид:

$$ds^2 = -a^2(r)\,[\,d\chi^2 + \sin^2\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\,] + dr^2,$$

$$(x^1, x^2, x^3, x^4 = \chi, \theta, \phi, r),$$

причем весь мир исчерпывается при $0 \leq \chi \leq \frac{\pi}{2}$, а диаметрально противоположные точки при $\chi = \frac{\pi}{2}$ следует считать совпадающими ("отождествленными"). Воспользуемся топологическим (т.е. непрерывным и взаимно-однозначным) отображением эллиптического пространства на обычный шар с отождествленными диаметрально-противоположными точками его поверхности. Такое отображение не сохраняет длин, но сохраняет углы. В центре шара 0 поместим электрический заряд величины $+e$, а остальную часть пространства, по крайней мере до максимально удаленной "экваториальной плоскости", отображаемой на поверхность шара, будем считать свободной от заряда. Опишем в пространстве замкну-





тую двустороннюю поверхность, охватывающую объем, отображаемый на некоторый шар ABCD с центром 0. Из оставшейся части пространства конусом с телесным углом ω "вырежем" замкнутый объем, отображаемый на фигуру NAB123CD . (Дальше будем считать образы пространства и их отображения обозначенными одинаковым способом). Для внутренности области 0ABCD уравнения Максвелла дают:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\,F^{4k}\right)=4\pi\rho=4\pi e\,\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3) \qquad (2)$$

(точнее, в силу симметрии задачи, отлична от нуля только компонента F^{41}).

Применяя трехмерную теорему Гаусса к области 0ABCD , мы получим полный поток через поверхность ABCD

$$\oiint_{ABCD}\sqrt{-g}\;F^{41}dS=\iiint\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\sqrt{-g}\,F^{41}\right)dV=4\pi\iiint\rho\, dV=4\pi e\,, \qquad (3)$$

где по определению $dV=dx^1\,dx^2\,dx^3$ и т.п. Соответственно суммарный поток через куски AB и CD поверхности равен $\frac{2\omega}{4\pi}\cdot 4\pi e=+2\omega e$.

Теперь, применяя теорему Гаусса к замкнутому объему NAB123CD , получим, что интеграл от плотности заряда, умноженной на 4π , должен быть равен вычисленному выше значению части потока $(+2\omega e)$ с обратным знаком (ввиду противоположного направления внешней нормали к поверхностям AB , CD). Отсюда ясно, что часть 123N экваториальной плоскости заряжена (поверхностным) зарядом[x/] $\left(-\frac{2\omega e}{4\pi}\right)$, а вся экваториальная плоскость - зарядом $-e$. Таким образом, в целом рассмотренный мир электрически нейтрален.

[x/] Действительно, решение уравнение Максвелла (2) для эллиптического пространства, на которое нам указал Р.Г. Зайков, дает $F_{41}=\frac{C}{a}\sin^{-2}\chi$, т.е. электрическое поле вблизи экваториальной плоскости $(\chi=\pi/2)$ отлично от нуля и имеет скачок величиной $2\frac{C}{a}$, что, как известно, соответствует наличию поверхностного заряда.

Аналогичное рассмотрение для массы эллиптического мира (1) отличалось бы несущественным образом лишь тем, что гравитационное поле непрерывно всюду, в том числе при $\chi=\frac{\pi}{2}$, поскольку метрический коэффициент $a^2\sin^2\chi$ непрерывен всюду (вместе со своей производной).

Благодарю профессора М.А. Маркова за постановку задачи и внимание, профессора Р.Г. Зайкова, М.Е. Герценштейна, Б.Н. Валуева, В.К. Мельникова, И.В. Полубаринова за обсуждения.

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля, "Наука", 1967.
   L. Landau, E. Lifschitz. The Classical Theory of Fields, Addison-Wesley Press, Cambridge, 1951.
2. Р. Клейн. Неевклидова геометрия. ОНТИ, М.-Л., 1936.
   F. Klein. Vorlesungen über nicht - euclidische Geometrie, Springer, Berl, 1928.
3. Г. Зейферт, В. Трельфалль. Топология. ГОНТИ, М.-Л., 1938.
   H. Seifert, W. Threlfall. Lehrbuch der Topologie, Leipzig, 1934.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 мая 1970 года.