СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 5131

В.Н. Стрельцов

К ВОПРОСУ ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОГО УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1970

P2 - 5131

В.Н. Стрельцов

К ВОПРОСУ ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОГО УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ *

* В порядке обсуждения

Ранее при рассмотрении вопроса о переходе от релятивистского уравнения Гамильтона-Якоби к его нерелятивистскому пределу/1/ мы опирались на предположение о том, что отношение производных по x и t от функции действия S равно по порядку величины отношению v к c (β) :

$$\frac{\partial S}{\partial x} \approx \beta \frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial x} . \tag{1}$$

Оказывается, однако, что условия подобного типа могут быть введены достаточно строго/2/.

Именно этому вопросу мы и посвятим наше последующее рассмотрение.

Возьмем для этого формулы преобразований производной $\partial S'/\partial x'$ при переходе от одной системы отсчёта к другой в нерелятивистском и Галилеевом приближениях. Тогда будем иметь:

$$\frac{\partial S'}{\partial x'} = \frac{\partial S}{\partial x} \gamma_1 + \beta \frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} , \tag{2}$$

где $\gamma_1 = 1 + \beta^2/2$,

и $$\frac{\partial S'}{\partial x'} = \frac{\partial S}{\partial x} .^{x/} \tag{3}$$

x/ Если учесть, что производная $\partial S/\partial x$ представляет собою x-овую компоненту импульса, то последняя формула может быть переписана в виде: $p_x' = p_x$, что, очевидно, отличается от известной формулы преобразования импульсов в Галилеевом приближении : $p_x' = p_x - mv$. Дальнейшее использование выражений (8) и (9) позволит нам устранить эту непоследовательность.

Далее будем рассуждать так. Коль скоро в Галилеевом приближении по сравнению с нерелятивистским дополнительно отбрасываются члены порядка β^2 по сравнению с 1, то мы вправе связывать исчезновение второго члена правой части формулы (2) при переходе к (3) с его малостью по отношению к первому члену, иными словами, – с выполнением следующего приближенного равенства:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t} \approx \beta \frac{\partial S}{\partial x} . \tag{4}$$

Здесь можно рассуждать и несколько иначе, опираясь на формулу преобразования $\partial S'/\partial t'$ в Галилеевом приближении:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial S'}{\partial t'} = \frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t} + \beta \frac{\partial S}{\partial x} . \tag{5}$$

Именно факт сохранения обоих членов (обеих производных) в данной формуле должен означать, что указанные члены по порядку величины равны друг другу. А это снова приводит нас к условию (4).

Таким образом, если при переходе от релятивистского уравнения Гамильтона–Якоби к нерелятивистскому опираться на обычные нерелятивистские и Галилеевы формулы преобразований:

$$x' = (x - \beta c t)\gamma_1 \quad , \; t' = t\gamma_1 - \frac{\beta}{c} x \tag{6}$$

и

$$x' = x - \beta c t \; , \quad t' = t \; , \tag{7}$$

то следует использовать условие (4), а не условие (1).

Как же должны преобразовываться координаты, чтобы выполнялось условие (1)?

Если вместо (6) и (7) мы будем иметь формулы преобразований вида:

$$x' = x\gamma_1 - \beta ct, \quad t' = (t - \frac{\beta}{c} x)\gamma_1 \tag{8}$$

и

$$x' = x, \quad t' = t - \frac{\beta}{c} x, \tag{9}$$

соответственно, то нетрудно показать, что на основании рассуждений, аналогичных вышеизложенным, действительно можно получить условие (1).

Но в каком случае из преобразований Лоренца будут вытекать выражения (8) и (9)?

С целью ответа на последний вопрос рассмотрим детальнее, например, процедуру получения обычных формул преобразования Галилея.

Так, после отбрасывания в формулах Лоренца членов β^2 будем иметь:

$$x' = x - vt, \quad t' = t - \frac{\beta}{c^2} x$$

или

$$x' = x(1 - \beta c\frac{t}{x}), \quad t' = t(1 - \frac{\beta}{c^2} \cdot \frac{x}{t}). \tag{10}$$

Если при этом трактовать величину x/t как некую скорость u, то ее отношение к скорости света $\beta = u/c$ в рассматриваемом приближении должно быть мало и можно положить, что $\beta_1 \approx \beta \ll 1$. Отсюда, в свою очередь, следует тогда, что в первой формуле (10) второй член в скобках будет по порядку величины равен 1, тогда как аналогичный член во второй формуле – β^2. Именно поэтому (в данном приближении) последним из указанных членов можно пренебречь и мы придем к известным формулам преобразований Галилея (7).

С другой стороны, чтобы получить формулы (9), мы должны допустить, что в (рассматриваемом приближении) второй член в первой формуле (10) $\beta c/u$ должен быть равен по порядку величины β^2. Это возможно только в том случае, если $\beta_1 = c/u$, причем всегда $u \gg c$ [x/]. Тогда упомянутым членом (при условии $\beta_1 \approx \beta$) можно пренебречь, и мы действительно придем к первой формуле (9). С другой стороны, подобный член во второй формуле (10) будет теперь по порядку величины равен 1, поэтому его следует сохранить. Таким образом мы получим вторую формулу (9) [xx/].

В заключение заметим, что полученные здесь результаты в полной мере будут относиться и к (также рассмотренному ранее/4/) вопросу о переходе от релятивистского уравнения Шредингера к его нерелятивистскому пределу.

Литература

1. *В.Н. Стрельцов. Сообщение ОИЯИ, Р2-4461, Дубна, 1969.*
2. *В.Н. Стрельцов. Сообщение ОИЯИ, Р2-5130, Дубна, 1970.*
3. *В.Н. Стрельцов. Препринт ОИЯИ, Р2-3482, Дубна, 1967.*
4. *В.Н. Стрельцов. Сообщение ОИЯИ, Р2-4462, Дубна, 1969.*

Рукопись поступила в издательский отдел

20 мая 1970 года.

[x/] Иными словами можно сказать, что u должна как бы играть роль фазовой скорости.

[xx/] Преобразования вида (9) в несколько иной связи обсуждались нами и прежде/3/.