СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2-5130

В.Н. Стрельцов

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

К НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

1970

Р2-5130

В.Н. Стрельцов

К НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ*

* В порядке обсуждения

Применим рассмотренные нами ранее [1] нерелятивистские преобразования координат:

$$x' = (x - vt)\gamma_1, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t\gamma_1 - \frac{v}{c^2}x, \tag{1}$$

где $\gamma_1 = 1 + v^2/2c^2$, к случаю электродинамики.

По аналогии с данными формулами для плотностей тока и заряда будем иметь:

$$j_x' = (j_x - v\rho)\gamma_1, \quad j_y' = j_y, \quad j_z' = j_z, \quad \rho' = \rho\gamma_1 - \frac{v}{c^2}j_x. \tag{2}$$

Что касается формул преобразования для напряженностей электромагнитного поля, то, казалось бы, исходя опять-таки из аналогии с формулами (1), нам следует воспользоваться выражениями вида

$$A_x' = (A_x - v\phi)\gamma_1, \quad A_y' = A_y, \quad A_z' = A_z, \quad \phi' = \phi\gamma_1 - \frac{v}{c^2}A_x \tag{3}$$

для потенциалов, а, опираясь на известные формулы

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\phi, \quad \vec{H} = \mathrm{rot}\,\vec{A}, \tag{4}$$

вывести затем отмеченные формулы преобразований для напряженностей.

Однако оказывается, что в этом случае напряженности электромагнитного поля должны будут подчиняться условию $E_{y,z} > H_{z,y}$. Поэтому данный случай (и обратный ему), как частные, мы рассмотрим в приложении. Пока же мы выберем следующие формулы преобразований для напряженностей:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = (E'_y + \frac{v}{c} H'_z)\gamma_1, \quad E_z = (E'_z - \frac{v}{c} H'_y)\gamma_1,$$

$$H_x = H'_x, \quad H_y = (H'_y - \frac{v}{c} E'_z)\gamma_1, \quad H_z = (H'_z + \frac{v}{c} E'_y)\gamma_1, \tag{5}$$

которые не страдают указанным ограничением, и проследим, не противоречит ли такой выбор требованию инвариантности уравнений Максвелла:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \tag{6}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{H} = 0, \tag{7}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c}\vec{j}, \tag{8}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho \tag{9}$$

(при малых скоростях) относительно нерелятивистских преобразований координат.

Для того, чтобы сделать это, нам необходимо прежде коснуться следующего вопроса.

Рассмотрим, например, формулу преобразования производной $\partial E'_x/\partial x'$ в нерелятивистском

$$\frac{\partial E'_x}{\partial x'} = \frac{\partial E_x}{\partial x}\gamma_1 + \frac{v}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} \tag{10}$$

и галилеевском

$$\frac{\partial E_x'}{\partial x'} = \frac{\partial E_x}{\partial x} \tag{11}$$

приближениях и будем рассуждать следующим образом.

Коль скоро в рамках галилеевского приближения мы пренебрегаем не только членами порядка v^2/c^2 и выше (нерелятивистское приближение), но и членами порядка v^2/c^2 по сравнению с 1, то исчезновение второго слагаемого при переходе от формулы (10) к (11) мы вправе связывать с тем, что его отношение к первому члену должно быть порядка v^2/c^2. Иными словами, должно выполняться условие

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{dt} \approx \frac{v}{c}\frac{\partial E_x}{\partial x}. \tag{12}$$

В качестве ответа на возможное возражение о том, что исчезновение производной $\partial E_x / \partial t$ в формуле (11) может быть следствием выполнения условия

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} \approx \frac{\partial E_x}{\partial x},$$

приведем следующее рассуждение.

Рассмотрим формулу преобразования $\partial E_x' / \partial t'$ в галилеевском приближении:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_x'}{\partial t'} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{v}{c}\frac{\partial E_x}{\partial x}. \tag{13}$$

Тот факт, что в формуле (13) сохраняются оба члена (обе производные), должен означать тогда, что они по порядку величины равны друг другу. Таким образом, мы опять-таки приходим к условию (12).

Подобные условия, очевидно, могут быть выведены и для других компонент напряженностей E и H.

Опираясь на полученные результаты, рассмотрим теперь в качестве примера уравнение (7). Применение формул преобразований (1) и (5) в этом случае приводит нас к выражению

$$\left(\frac{\partial H'_x}{\partial x'}+\frac{\partial H'_y}{\partial y'}+\frac{\partial H'_z}{\partial z'}\right)\gamma_1-\frac{v}{c}\left(\frac{\partial E'_z}{\partial y'}-\frac{\partial E'_y}{\partial z'}+\frac{1}{c}\frac{\partial H'_x}{\partial t'}\right)\gamma_1+\frac{v^3}{2c^4}\frac{\partial H'_x}{\partial t'}=0 .$$

Здесь первое слагаемое в скобках представляет собою исходное уравнение (7), второе – x –овую компоненту уравнения (6) в новой системе отчсёта. Кроме того, появляется дополнительный член (последний), который, однако, на основании условия типа (12) может быть отброшен как малый по отношению к самому первому члену (в скобках).

Аналогичным образом может быть проверена инвариантность и прочих уравнений Максвелла относительно нерелятивистских преобразований координат.

Следует отметить, что подобные же результаты мы получим, применив к уравнениям Максвелла преобразования Галилея и формулы (5) с $\gamma_1 = 1$.

Что касается процедуры преобразования выражения для силы Лоренца в нерелятивистском приближении, то она проводится практически так же, как и в релятивистском случае. В галилеевском же приближении в процессе доказательства инвариантности мы должны будем отбросить члены порядка v^2/c^2 по сравнению с 1. Например, после преобразования y–овой компоненты силы Лоренца

$$F'_y = e\left(E'_y+\frac{\nu'_z}{c}H'_x-\frac{\nu'_x}{c}H'_z\right)$$

будем иметь следующее выражение:

$$e\left[E_y\left(1+\frac{\nu'_x v}{c^2}\right)+\frac{\nu_z}{c}H_x-\frac{\nu'_x+v}{c}H_z\right],$$

которое, как легко видеть, после отбрасывания члена $\nu'_x v/c$ действительно переходит в выражение для y –овой компоненты силы Лоренца в новой системе отсчёта:

$$F_y = e\left(E_y+\frac{\nu_z}{c}H_x-\frac{\nu_x}{c}H_z\right).$$

Итак, если мы выберем формулы преобразований для потенциалов в виде (3), то на основании (4) будем иметь для напряженностей:

$$E_x = E'_x, \; E_y = E'_y \gamma_1 + \frac{v}{c} H'_z, \; E_z = E'_z \gamma_1 - \frac{v}{c} H'_y,$$

$$H_x = H'_x, \; H_y = (H'_y - \frac{v}{c} E'_z)\gamma_1, \; H_z = (H'_z + \frac{v}{c} E'_y)\gamma_1.$$

Или, в галилеевском приближении, –

$$A'_x = A_x - v\phi, \; A'_y = A_y, \; A'_z = A_z, \; \phi' = \phi,$$

$$E'_x = E_x, \; E'_y = E_y, \; E'_z = E_z,$$

$$H'_x = H'_x, \; H_y = H'_y - \frac{v}{c} E'_z, \; H_z = H'_z + \frac{v}{c} E'_y.$$

В этих случаях инвариантность уравнений Максвелла снова может быть доказана с привлечением условий типа (12). При этом в галилеевском приближении уравнение (6) упростится и будет иметь вид

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0.$$

Для того, чтобы прийти к случаю, в каком-то смысле обратному рассмотренному, когда $H_{y,z} > E_{z,y}$, следует выбрать формулы преобразований для потенциалов в виде

$$A'_x = A_x \gamma_1 - \frac{v}{c}\phi, \; A'_y = A_y, \; A'_z = A_z, \; \phi' = (\phi - \frac{v}{c} A_x)\gamma_1, \tag{П.1}$$

что дает для напряженностей:

$$E_x = E'_x, \; E_y = (E'_y + \frac{v}{c} H'_z)\gamma_1, \; E_z = (E'_z - \frac{v}{c} H'_y)\gamma_1,$$

$$H_x = H'_x, \; H_y = H'_y \gamma_1 - \frac{v}{c} E'_z, \; H_z = H'_z \gamma_1 + \frac{v}{c} E'_y. \tag{П.2}$$

При этом в галилеевском приближении теперь, очевидно, может быть упрощено уравнение (8):

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = 0. \tag{П.3}$$

Естественно, что, как и раньше, требование инвариантности выражения для силы Лоренца будет удовлетворено и в рассматриваемых частных случаях.

Литература

1. *В.Н. Стрельцов. Сообщение ОИЯИ, Р2-4461, Дубна, 1969.*

Рукопись поступила в издательский отдел
20 мая 1970 года.

Примечание при корректуре: Ж.-М. Леви-Леблон любезно обратил мое внимание на то, что одна из его работ (Commun. Math. Phys., 6, 286(1967)) также касается вопросов галилеевского электромагнетизма. При этом, в частности, рассматриваются уравнение (П.3) и галилеевское приближение формул (П.1) и (П.2).