ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 5101

В.М. Виноградов

# РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ В КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1970

P2 - 5101

В.М. Виноградов

# РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ В КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая физика"

Настоящая работа посвящена распространению методов работ [1-10] при формулировке релятивистской задачи двух тел в конфигурационном пространстве на случай системы из трех взаимодействующих частиц. В основе [1-10] лежит трехмерная формулировка квантовой теории поля (КТП) [1], в которой все частицы находятся на массовой поверхности. Для системы двух взаимодействующих частиц такая формулировка дает трехмерные уравнения для амплитуды рассеяния [1] квазипотенциального типа [12]. В случае трех частиц этот подход позволяет получить для амплитуды упругого рассеяния систему уравнений [11-13], являющуюся релятивистским обобщением уравнений Фаддеева.

## 1. Релятивистские аналоги уравнений Шредингера в терминах относительных импульсов

Согласно [13], в рамках используемой трехмерной формулировки КТП принцип соответствия позволяет обосновать релятивистский аналог уравнения Шредингера (УШ)[x]

$$(\sqrt{s_q}-\sqrt{s_k})\Phi_{\sqrt{s_q}}(k)=\frac{1}{(2\pi)^6}\int V(k,p)\,\phi_{\sqrt{s_q}}(p)\,d\Omega_{p_j}\,d\Omega_{p_\ell} \qquad (1)$$

$$\sqrt{s_k}=\sqrt{(k_1+k_2+k_3)^2}, \quad \sqrt{s_q}=\sqrt{(q_1+q_2+q_3)^2},$$

---

[x] Здесь использованы обозначения: $k=\{k_i\}$, $p=\{p_i\}$, $i,j,\ell=1,2$, $j\neq\ell$ и $d\Omega_{p_i}=\frac{d\vec{p}_i}{p_i^0}$, $p_i^0=\sqrt{m_i^2+\vec{p}_i^{\,2}}$. В дальнейшем для несуммируемых индексов будут справедливы ограничения: $i,j,\ell=1,2,3$; $i\neq j\neq\ell$; $r=1,2,3$.

где $V(k\,|\,p)$ строится с помощью теории возмущений.

Было показано, что после введения относительных переменных движение системы центра масс (с.ц.м.) отделяется в терминах сохраняющегося вектора 4 - скорости системы

$$\lambda=\frac{\sum_{i=1}^{3} k_i}{\sqrt{s_k}}=\frac{\sum_{i=1}^{3} q_i}{\sqrt{s_q}}=\frac{\sum_{i=1}^{3} p_i}{\sqrt{s_p}}. \qquad (2)$$

Поэтому фигурирующая в (1) волновая функция (ВФ) относительного движения определяет полную ВФ соотношением:

$$\Psi_{\sqrt{s_q}}(\lambda,k)=\delta(\vec\lambda_k(-)\vec\lambda_q)\,\phi_{\sqrt{s_q}}(k),$$

$$\delta(\vec\lambda_k(-)\vec\lambda_q)=\lambda_k^0\,\delta(\vec\lambda_k-\vec\lambda_q). \qquad (3)$$

Переход к относительным переменным осуществляется посредством вспомогательных импульсов $\vec K_i,\vec P_i,\vec Q_i$ x/:

$$\vec K_i=\vec k_i(-)m_i\vec\lambda\,,\quad K_i^0=(k_i,\lambda),\quad \sum_{r=1}^{3}\vec K_r=0 \qquad (4)$$

$$\sqrt{s_k}=\sum_{r=1}^{3}K_r^0 \qquad (5)$$

и использует два обстоятельства: 1) Лоренц-ковариантность формулировки и 2) существование сохраняющегося $\lambda$ -вектора вида (2).

Как и в (4), при построении релятивистских относительных импульсов Якоби $K_{(j\ell)},K_{(i)}$; ..... используется операция сложения в пространстве Лобачевского. В этих переменных (1) примет вид:

x/ Здесь и ниже построение однотипных по написанию импульсов $\{\vec K_i,\vec P_i,\vec Q_i;\ldots\}$ производится по одному правилу.



$$(\sqrt{s_q}-K^0_{\{j\ell\}}-K^0_{\{i\}})\Psi_{\sqrt{s_q}}(\lambda,K_{(j\ell)},K_{(i)})=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^6}\int\tilde V(\vec K_{(j\ell)},\vec K_{(i)};\vec P_{(j\ell)},\vec P_{(i)})\,\Psi_{\sqrt{s_q}}(\vec P_{(j\ell)},\vec P_{(i)})\,d\Omega_{P_{(j\ell)}}\,d\Omega_{P_{(i)}} \qquad (6)$$

где роль релятивистских приведённых масс играют средние геометрические вида $\sqrt{m_j m_\ell}$, $\sqrt{m_i\mu_i}$ $\left(\mu_i=\frac{m_i(m_j+m_\ell)}{\sum_{r=1}^{3}m_r}\right)$,

$$K^0_{\{j\ell\}}=\frac{m_j+m_\ell}{\sqrt{m_j m_\ell}}K^0_{(j\ell)}=\frac{m_j+m_\ell}{\sqrt{m_j m_\ell}}\sqrt{m_j m_\ell+\vec K^2_{(j\ell)}}\,, \qquad (7)$$

$$K^0_{\{i\}}=\frac{m_i}{\sqrt{m_i\mu_i}}K^0_{(i)}=\frac{m_i}{\sqrt{m_i\mu_i}}\sqrt{m_i\mu_i+\vec K^2_{(i)}}\,,$$

а соотношение (5) заменяется равенством

$$\sqrt{s_k}=K^0_{\{j\ell\}}+K^0_{\{i\}}\,, \qquad (8)$$

причём по построению x/

$$K^0_{\{j\ell\}}=\sqrt{(k_j+k_\ell)^2}. \qquad (7')$$

В пределе больших масс

$$\vec K_{(j\ell)}\to\vec k_{j\ell}=\frac{m_\ell\vec k_j-m_j\vec k_\ell}{m_\ell+m_j}\,,$$

$$\vec K_{(i)}\to\vec K_i\to\vec k_{i(j\ell)}=\frac{(m_j+m_\ell)\vec k_i-m_i(\vec k_j+\vec k_\ell)}{\sum_{r=1}^{3}m_r} \qquad (9)$$

и (6) переходит в нерелятивистское уравнение Шредингера, в котором исключено движение с.ц.м.

x/ Согласно /13/, при изменении $\vec K_i$, 4 -векторы $K_{(j\ell)}$ и $K_{(i)}$ пробегают весь гиперболоид с массами $\sqrt{m_j m_\ell}$ и $\sqrt{m_i\mu_i}$ соответственно. Поскольку $|\vec K_{(j\ell)}|$ и $|\vec K_{(i)}|$ достигают при этом предельных значений 0, $\infty$ независимо, при Фурье-преобразовании в (6) (п.2) можно использовать полноту и ортогональность основных функций.

В симметричной форме (6) можно записать с помощью (5)

$$\left(\sqrt{s_q} - \sum_{r=1}^{3} K_r^0\right)\Psi_{\sqrt{s_q}}(\lambda, K) = \frac{1}{(2\pi)^6}\int V(K|P)\,\Psi_{\sqrt{s_q}}(\lambda, P)\, d\Omega_{p_j}\, d\Omega_{p_\ell}\,, \tag{10}$$

причем, согласно /13/, существуют аналитические представления

$$\vec K_r = \vec K_r\,(\vec K_{(j\ell)}; \vec K_{(i)}) \tag{11}$$

и

$$\vec K_{(i)} = \vec K_{(i)}(\vec K_{(j'\ell')}; \vec K_{(i')}); \quad \vec K_{(j\ell)} = \vec K_{(j\ell)}(\vec K_{(j'\ell')}; \vec K_{(i')}),$$

которые соответствуют нерелятивистским соотношениям перехода между различными схемами связи (рис. 1) $(i, j, \ell \neq i', j', \ell')$

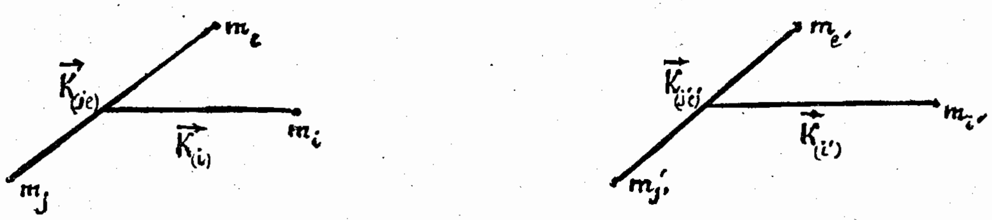

Рис. 1

В случае равных масс $m_i = m$ тождественность частиц учтем следующим образом. Симметризуем потенциал по относительным импульсам для различных схем связи и введем, учитывая независимость $\vec K_{(j\ell)}, \vec K_i$ ;... при изменении $\vec K_r$ ,..., 6 – мерное импульсное пространство по правилу:



$$\sqrt{s_k} = 3\sqrt{m^2 + \vec K_6^2} = 3K_6^0\,,$$

$$\vec n_6 = \frac{\vec K_6}{|\vec K_6|} = \{\vec n_{12}, \vec n_3\}\,; \quad \vec n_{12} = \frac{\vec K_{(j\ell)}}{|\vec K_{(j\ell)}|}; \quad \vec n_3 = \frac{\vec K_{(i)}}{|\vec K_{(i)}|}\,.$$

Согласно (8), перестановкам частиц будут соответствовать вращения $\vec K_6$ , и при изменении $\vec K_{(j\ell)}; \vec K_i$ этот вектор будет пробегать весь гиперболоид в 7-мерном пространстве

$$K_6^{0\,2} - \vec K_6^2 = m^2. \tag{12}$$

В такой параметризации уравнение (6) примет вид:

$$\left(\sqrt{s_q} - 3K_6^0\right)\Phi_{\sqrt{s_q}}(\lambda, \vec K_6) = \frac{1}{(2\pi)^6}\int \tilde{\tilde V}(\vec K_6, \vec R_6)\,\Phi_{\sqrt{s_q}}(\lambda, \vec P_6)\, d\Omega_{p_6}\,. \tag{13}$$

Наконец, аналогом свободной функции Грина (ФГ) для (6) будет, очевидно, функция

$$G^0_{\sqrt{s_q}}(K) = \frac{1}{(2\pi)^6}\,\frac{1}{K^0_{\{j\ell\}} + K^0_{\{i\}} - \sqrt{s_q} - i\epsilon}\,. \tag{14}$$

## 2. Релятивистское конечно-разностное уравнение Шредингера для системы трех частиц

В настоящем пункте, следуя /4/, введем на основе (6) конфигурационное пространство для релятивистской задачи трех тел.

Напомним, что основная идея /4/ состоит в том, что переход в конфигурационное пространство осуществляется как Фурье-преобразование посредством функций, реализующих представление группы движений импульсного пространства, в котором формулируется задача, т.е. группы движений пространства Лобачевского.

Согласно (6), релятивистская задача трех тел формулируется в терминах относительных 4-импульсов двух эффективных частиц с релятивистскими приведенными массами $\sqrt{m_j m_\ell}$, $\sqrt{m_i \mu_i}$. Поэтому Фурье-переход будем осуществлять посредством полного набора функций[x/]:

$$e^{i\sqrt{s_q}(\lambda, x)} \xi(\vec{K}_{(j\ell)}; \vec{r}_{j\ell}) \xi(\vec{K}_{(i)}; \vec{r}_i). \qquad (15)$$

Здесь $\xi(\vec{K}, \vec{r})$ – ядро преобразования Шапиро[/14/]

$$\xi(\vec{K}, \vec{r}) = \left(\frac{K^0 - \vec{K}\vec{n}}{m}\right)^{-1+irm}, \quad r = r\vec{n},\ \vec{n}^2 = 1;\ K^{0\,2} - \vec{K}^2 = m^2;$$

причем параметры $r_{j\ell} = |\vec{r}_{j\ell}|$, $r_i = |\vec{r}_i|$ вводятся посредством операторов Казимира для группы движений соответственно на гиперболоидах

$$m_j m_\ell = K^{0\,2}_{(j\ell)} - \vec{K}^2_{(j\ell)}, \quad m_i \mu_i = K^{0\,2}_{(i)} - \vec{K}^2_{(i)}$$

и фиксирование области их значений в интервале $\{0, \infty\}$ выделяет главную серию унитарных представлений группы Лоренца. Плоская экспонента в (15) описывает движение системы как целого посредством

x/ Соотношения оротогональности и полноты $\xi$ -функций имеют вид

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \xi(\vec{k}, \vec{r}) \xi^*(\vec{k}, \vec{r}\,') d\Omega = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')/m,$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \xi(\vec{k}, \vec{r}) \xi^*(\vec{k}\,', \vec{r}) d\vec{r} = \delta(\vec{k} - \vec{k}\,')/m .$$



4 -вектора $\{X_0, \vec{X}\}$, сопряженного 4 -импульсу $\lambda\sqrt{s_q}$, где $\sqrt{s_q}$ – собственное значение (6).

Определим ВФ относительного движения и потенциал взаимодействия в конфигурационном пространстве соотношениями:

$$\phi_{\sqrt{s_q}}(\vec{r}_{j\ell}, \vec{r}_i) = \frac{1}{(2\pi)^6} \int \xi(\vec{K}_{(j\ell)}, \vec{r}_{j\ell}) \xi(\vec{K}_{(i)}, \vec{r}_i) \phi_{\sqrt{s_q}}(\vec{K}_{(j\ell)}, \vec{K}_{(i)}) d\Omega_{K_{(j\ell)}} d\Omega_{K_{(i)}}$$

$$V(\vec{K}_{(j\ell)}, \vec{K}_{(i)}; \vec{P}_{(j\ell)}, \vec{P}_i) = \int \xi^*(\vec{K}_{(j\ell)}, \vec{r}_{j\ell}) \xi^*(\vec{K}_{(i)}, \vec{r}_i) \times$$

$$\times V(\vec{r}_{j\ell}, \vec{r}_i; \vec{r}\,'_{j\ell}, \vec{r}\,'_i) \xi(\vec{P}_{(j\ell)}, \vec{r}_i) \xi(\vec{P}_{(i)}, \vec{r}_i) d\vec{r}_{j\ell}\, d\vec{r}_i\, d\vec{r}\,'_{j\ell}\, d\vec{r}\,'_i .$$

Производя в (6) посредством функций (15) Фурье-преобразование по переменным $\vec{K}_{(j\ell)}, \vec{K}_{(i)}, \vec{\lambda}$, придем к релятивистскому конечноразностному уравнению:

$$(\sqrt{s_q} - H^0_{\{j\ell\}} - H^0_{\{i\}}) \Psi_{\sqrt{s_q}}(X, \vec{r}_{j\ell}, \vec{r}_i) = \int V(\vec{r}_{j\ell}, \vec{r}_i; \vec{r}\,'_{j\ell}, \vec{r}\,'_i) \Psi_{\sqrt{s_q}}(X, \vec{r}\,'_{j\ell}, \vec{r}\,'_i) d\vec{r}\,'_{j\ell}\, d\vec{r}\,'_i ,$$

где $\Psi_{\sqrt{s_q}}(X, \vec{r}_{j\ell}, \vec{r}_i)$ – есть полная ВФ

$$\Psi_{\sqrt{s_q}}(X, \vec{r}_{j\ell}, \vec{r}_i) = e^{i\sqrt{s_q}(\lambda, x)} \phi(\vec{r}_{j\ell}, \vec{r}_i)$$

и

$$H^0_{\{\sigma\}} = \begin{cases} \dfrac{m_j+m_\ell}{2\sqrt{m_j m_\ell}}\, H^0_{\sqrt{m_j m_\ell}}(\vec r_{j\ell}), & \{\sigma\}=\{j\ell\} \\[2ex] \dfrac{m_i}{\sqrt{m_i\,\mu_i}}\, H^0_{\sqrt{m_i\mu_i}}(\vec r_i), & \{\sigma\}=\{i\} \end{cases} \qquad (16')$$

$$H^0_m(\vec r) = 2m\,\mathrm{ch}\Big(i\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial r}\Big) + \frac{2i}{r}\,\mathrm{sh}\Big(i\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial r}\Big) - \frac{\Delta_{\theta,\phi}}{mr^2}\exp\Big(i\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial r}\Big)$$

$\Delta_{\theta,\phi}$ – угловая часть оператора Лапласа.

Уравнение (16) есть релятивистский аналог уравнения Шредингера для трех частиц: 1) движение с.ц.м. отделяется в терминах сохраняющей-ся 4 -скорости системы; 2) в качестве собственного значения фигу-рирует инвариантная масса; 3) квадраты относительных радиусов вво-дятся посредством операторов Казимира группы Лоренца.

Отметим, что имеющая место в нерелятивистской теории линейная связь между относительными радиусами

$$\vec\rho_j = \frac{m_\ell M}{(m_j+m_\ell)(m_\ell+m_i)}\vec r_{j\ell} - \frac{m_i}{m_\ell+m_i}\vec\rho_i,$$

$$\vec r_{\ell i} = -\frac{m_j}{m_j+m_\ell}\vec r_{j\ell} - \vec\rho_i\ ; \quad M = \sum_{r=1}^{3} m_r \qquad (17)$$

дается теперь разложениями, основанными на зависимости (11) относи-тельных импульсов:

$$\xi(\vec K_{(j\ell)}, \vec r_{j\ell})\,\xi(\vec K_{(i)}, \vec r_i) = \int B(\vec r_{j\ell}, \vec r_i\ ; \vec r_{j'\ell'}, \vec r_{i'})\,\xi(\vec K_{(j'\ell')}, \vec r_{j'\ell'})\times \qquad (18)$$
$$\times\,\xi(\vec K_{(i')}, \vec r_{i'})\,d\vec r_{j'\ell'}\,d\vec r_{i'}\ ,$$



где $B(\vec r_{j\ell}, \vec r_i, \vec r_{j'\ell'}, \vec r_{i'}) =$

$$= \int \xi(\vec K_{(j\ell)}, \vec r_{j\ell})\,\xi(\vec K_{(i)}, \vec r_i)\,\xi^*(\vec K_{(j'\ell')}, \vec r_{j'\ell'})\,\xi^*(\vec K_{(i')}, \vec r_{i'})\,d\Omega_{K_{(j\ell)}}\,d\Omega_{K_{(i)}}$$

В пределах больших масс, в силу (9), это разложение переходит

$$\exp(i\vec k_{j\ell}\,\vec r_{j\ell})\exp(i\vec k_{i(j\ell)}\,\vec r_i) = \exp(i\vec k_{i'(j'\ell')}\,\vec r_{j'\ell'})\exp(i\vec k_{i'}\,\vec r_{i'}),$$

а связь между $\vec r_{j\ell}, \vec r_i$ и $\vec r_{j'\ell'}, \vec r_{i'}$ дается соотношениями типа (17).

При построении решений (16) достаточно ограничиться изучением решений однородного уравнения

$$(\sqrt{s_q} - H^0_{\{j\ell\}} - H^0_{\{i\}})\,\Psi^0_{\sqrt{s_q}}(X, \vec r_{j\ell}, \vec r_i) = 0 \qquad (19)$$

и уравнения для ФГ

$$(\sqrt{s_q} - H^0_{\{j\ell\}} - H^0_{\{i\}})\,G^0_{\sqrt{s_q}}(\vec r_{j\ell}, \vec r_i, \vec r\,'_{j\ell}, \vec r\,'_i) = -\frac{1}{M_{ij\ell}}\,\delta(\vec r_{j\ell} - \vec r\,'_{j\ell})\,\delta(\vec r_i - \vec r\,'_i)$$

$$G^0_{\sqrt{s_q}}(\vec r_{j\ell}, \vec r_i\ ; \vec r\,'_{j\ell}, \vec r\,'_i) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^6}\int \xi(\vec K_{j\ell}, \vec r_{j\ell})\,\xi(\vec K_i, \vec r_i)\,\frac{d\Omega_{K_{(j\ell)}}\,d\Omega_{K_{(i)}}}{K^0_{\{j\ell\}} + K^0_{\{i\}} - \sqrt{s_q} - i\epsilon}\,\xi^*(\vec K_{(j\ell)}, \vec r\,'_{j\ell})\,\xi^*(\vec K_{(i)}, \vec r\,'_i)$$

$$M_{ij\ell} = \sqrt{\frac{m_i m_j m_\ell}{\mu_i}}\,.$$

Это нетрудно сделать, если использовать парциальные разложения экспонент Шапиро в решении однородного уравнения (19)

$$\Psi^{0}_{\sqrt{s_q}}(X,\vec r_{j\ell},\vec r_i)=e^{i\sqrt{s_q}(\lambda,X)}\,\xi(\vec Q^{0}_{(j\ell)},\vec r_{j\ell})\,\xi(\vec Q^{0}_{(i)},\vec r_i)$$

$$\sqrt{s_q}=Q^{0}_{\{j\ell\}}+Q^{0}_{\{i\}}\,. \qquad (20)$$

Тогда построения сведутся к несложной переформулировке[4,7].

В нерелятивистском пределе

$$\Psi^{0}_{\sqrt{s_q}}(X,\vec r_{j\ell},\vec r_i)\to e^{-i(Y_0E-\vec Y\vec Q)-i(Y_0\epsilon_{j\ell}-\vec r_{j\ell}\vec q_{j\ell})}\,e^{-i(Y_0\epsilon-\vec r_i\vec q_{i(j\ell)})},$$

где

$$\vec Q=\sum_{r=1}^{3}\vec q_r$$

$$E=\frac{\vec Q^2}{2M};\quad \epsilon_{j\ell}=\frac{\vec q^{\,2}_{j\ell}}{2\mu_{j\ell}};\quad \epsilon_{i(j\ell)}=\frac{\vec q^{\,2}_{i(j\ell)}}{2\mu_i};\quad \mu_{j\ell}=\frac{m_j m_\ell}{m_j+m_\ell}; \qquad (21)$$

$$\{Y_0,\vec Y\}=\{-X_0,-\vec X\}.$$

### 3. Случай равных масс

Учёт тождественности частиц приводит к формулировке задачи в виде уравнения (13), котрое может рассматриваться как уравнение для одной частицы, переменные которой реализованы на гиперболоиде (12). Функции, осуществляющие представления группы движения такого пространства, имеют вид[15]:



$$\xi(\vec K_6,\vec\rho)=\left(\frac{K^{0}_6-\vec K_6\vec n}{m}\right)^{-5/2+i\rho m}\qquad \vec\rho=\rho\vec n,\quad \vec n^{\,2}=1$$

и, по аналогии с прежними построениями, конфигурационное пространство введем посредством таких функций.

Для вывода уравнения рассмотрим парциальное разложение

$$\xi(\vec K_6,\vec\rho)=\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+4)i^{\ell}\,p_\ell(\mathrm{ch}\chi,\rho)\,C^{2}_{\ell}\left(\frac{\vec K\vec n}{K}\right)$$

$$p_\ell(\mathrm{ch}\chi,\rho)=(-i)^{\ell}\frac{2}{\mathrm{sh}\chi}\,\frac{\Gamma(irm+\ell+5/2)}{\Gamma(irm+5/2)}\,P^{-2-\ell}_{-\frac12+i\rho m}(\mathrm{ch}\chi) \qquad (21)$$

$$|\vec K_6|=m\,\mathrm{sh}\chi.$$

В нерелятивистском пределе (21) переходит в разложение для плоской экспоненты в 6-мерном пространстве и для $p_\ell(\mathrm{ch}\chi,\rho)$ имеем

$$p_\ell(\mathrm{ch}\chi,\rho)\to\frac{J_{\ell+2}(K_6\rho)}{(K_6\rho)^2}.$$

Осуществляя посредством полного набора функций

$$e^{i\sqrt{s_q}(\lambda,X)}\,\xi(\vec K_6,\vec\rho)$$

Фурье-преобразование в (13) и учитывая реккурентные соотношения для $P^{-2-\ell}_{-1/2+i\rho m}(\mathrm{ch}\,\chi,\rho)$, придем к уравнению:

$$(\sqrt{s_q}-H_0)\,\Phi_{\sqrt{s_q}}(X,\vec\rho\,) = \int \tilde{\tilde V}(\vec\rho,\vec\rho\,')\,\Phi_{\sqrt{s_q}}(X,\vec\rho\,')\,d^6\vec\rho\,'$$

$$H_0 = \frac{3}{2}\Big[2\,\mathrm{ch}\Big(\frac{i}{m}\frac{\partial}{\partial\rho}\Big) + i\frac{5}{\rho}\,\mathrm{sh}\Big(\frac{i}{m}\frac{\partial}{\partial\rho}\Big) - \frac{\Delta_\omega}{m\rho(\rho-i\,3/2m)}\exp\Big(\frac{i}{m}\frac{\partial}{\partial\rho}\Big)\Big], \qquad (22)$$

где $\Delta_\omega$ – угловая часть оператора Лапласа в 6-мерном пространстве, а ВФ

$$\Phi_{\sqrt{s_q}}(X,\vec\rho\,) = e^{i\sqrt{s_q}(\lambda,X)}\,\phi_{\sqrt{s_q}}(\vec\rho\,)$$

и "потенциал" $\tilde{\tilde V}(\vec\rho,\vec\rho\,')$ определяются соотношениями:

$$\phi_{\sqrt{s_q}}(\vec\rho\,) = \frac{1}{(2\pi)^6}\int \phi_{\sqrt{s_q}}(\vec K_6)\,\xi(\vec K_6,\vec\rho\,)\,d\Omega_{K_6},$$

$$\tilde{\tilde V}(\vec\rho,\vec\rho\,') = \frac{1}{(2\pi)^{12}}\int \xi(\vec K_6,\vec\rho\,)\,\tilde{\tilde V}(\vec K_6,\vec P_6)\,\xi^*(\vec P_6,\vec\rho\,')\,d\Omega_{K_6}\,d\Omega_{P_6}.$$

Уравнение (22) является релятивистским аналогом уравнения Шредингера для трех одинаковых частиц. В нерелятивистском пределе:

$$(\sqrt{s_q}-H_0)\to E + \frac{1}{\rho'^5}\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho'^5\frac{\partial}{\partial\rho}\Big) + \frac{1}{\rho'^2}\Delta_\omega,$$

$$E = \epsilon_{j\ell} + \epsilon_{i(j\ell)},$$



где $\epsilon_{j\ell}$, $\epsilon_{i(j\ell)}$ определено в (21) и $\vec\rho\,' = \lim\limits_{m\to\infty}\Big(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\vec\rho\,\Big)$.

В рассматриваемом формализме, однако, проблематичным является представление относительных радиусов через $\vec\rho$, которое дается здесь интегральным соотношением типа (18).

## 4. Асимптотические волновые функции в релятивистской задаче трех тел

Как иллюстрацию рассмотрим частный случай задачи (16), когда в системе трех частиц могут взаимодействовать лишь две:

$$(\sqrt{s_q}-H^0_{\{j\ell\}}-H^0_{\{i\}})\,\Psi^{(j\ell)}_{\sqrt{s_q}}(X,\vec r_{j\ell},\vec r_i) = \int V_{j\ell}(\vec r_{j\ell},\vec r\,'_{j\ell})\,\Psi^{(j\ell)}_{\sqrt{s_q}}(X,\vec r\,'_{j\ell},\vec r_i)\,d\vec r\,'_{j\ell}. \qquad (23)$$

К такому уравнению приводит задача об определении асимптотических ВФ[16].

Частный случай (23) при $V_{j\ell}=0$ соответствует свободному движению трех частиц (20) и характеризуется:

а) 4-импульсом системы – $\lambda\sqrt{s_q}$;

в) относительным импульсом $\vec Q_{(j\ell)}$ в двухчастичной подсистеме, инвариантная масса которой определяется соотношением (7);

с) импульсом $\vec Q_{(i)}$, описывающим взаимное движение подсистемы ( $j\ell$ ) и третьей частицы, причём их относительный импульс $\vec Q_i$ определяется из соотношений[x/]:

---

x/ Соотношения (20) и (24) являются аналогом записи нерелятивистского инвариантного гамильтониана в импульсах Якоби: первый член в (24) соответствует относительному движению подсистемы ( $j\ell$ ) как целого, где роль $m_j + m_\ell$ играет инвариант $Q^0_{\{j\ell\}} = \sqrt{(q_j+q_\ell)^2} = \sqrt{s_{j\ell}}$.

$$Q^0_{\{i\}} = |\vec{Q}_i| \operatorname{th}\frac{\chi_{j\ell}}{2} + Q^0_i, \quad \chi_{j\ell} = \operatorname{Arsh}\left(\frac{|\vec{Q}_i|}{Q^0_{\{j\ell\}}}\right),$$

$$\frac{\vec{Q}_i}{|\vec{Q}_i|} = \frac{\vec{Q}_{(i)}}{|\vec{Q}_{(i)}|}. \tag{24}$$

Переход к импульсам частиц $\vec{q}_r$ осуществляется путем обращения формул, посредством которых строились релятивистские импульсы Якоби $\lambda\sqrt{s_q}$, $\vec{Q}_{(j\ell)}$, $\vec{Q}_{(i)}$ в [13].

Пусть теперь в трехчастичной системе с 4-импульсом $\lambda\sqrt{s_q}$ две частицы взаимодействуют посредством короткодействующего потенциала, а третья частица движется свободно с относительным импульсом $\vec{Q}_i$.

Определив $|\vec{Q}_{(j\ell)}|$ из (20) и (24), ВФ будем искать в виде

$$\Psi^{(j\ell)}_{\sqrt{s_q}}(X, \vec{r}_{j\ell}, \vec{r}_i) = e^{i\sqrt{s_q}(\lambda, X)}\, \xi(\vec{Q}_{(i)}, \vec{r}_i)\, \phi_{\sqrt{s_{j\ell}}}(\vec{r}_{i\ell}). \tag{25}$$

Для $\phi_{\sqrt{s_{j\ell}}}(\vec{r}_{j\ell})$ получим уравнение

$$(\sqrt{s_{j\ell}} - H^0_{\{j\ell\}})\, \phi_{\sqrt{s_{j\ell}}}(\vec{r}_{j\ell}) = \int V_{j\ell}(\vec{r}_{j\ell}, \vec{r}\,'_{j\ell})\, \phi_{\sqrt{s_{j\ell}}}(\vec{r}\,'_{j\ell})\, d\vec{r}\,'_{j\ell}. \tag{26}$$

Решения (26) могут быть найдены методами, которые развиты для релятивистской задачи двух тел [8,6].



В непрерывном спектре $Q^0_{\{j\ell\}} \geq m_j + m_\ell$ физическим решениям соответствуют функции, имеющие при больших $\vec{r}_{j\ell}$ вид суммы плоской волны и расходящейся сферической волны.

Если потенциал обладает дискретным спектром

$$m_{j\ell} = \tilde{Q}^0_{\{j\ell\}} = m_j + m_\ell - |W^{\text{св}}_{j\ell}|, \tag{27}$$

то решения (26) для таких собственных значений существуют лишь при фиксированных $|\vec{Q}\,'_i|$, которые определяются из

$$\sqrt{s_{(j\ell)}} = m_{j\ell} + |\vec{Q}\,'_i| \operatorname{th}\frac{\chi'_{j\ell}}{2} + Q^{0\,\prime}_i$$

$$\chi'_{j\ell} = \operatorname{Arsh}\left(\frac{|\vec{Q}\,'_i|}{m_{j\ell}}\right). \tag{28}$$

Физическим решениям в этом случае соответствуют ВФ, убывающие экспоненциально при больших $\vec{r}_{j\ell}$.

Описанные решения дискретного спектра в двухчастичной подсистеме вместе с решениями (20) составляют 4 класса ВФ, возникающих при формулировке интегральных уравнений Фаддеева для ВФ.

## 5. Релятивистский аналог уравнений Фаддеева для волновых функций

В качестве приложения рассмотрим вывод интегральных уравнений для ВФ, аналогичных нерелятивистским уравнениям Фаддеева [16]. Ядра таких уравнений выражаются через двухчастичные амплитуды рассеяния, вследствие чего они представляют большой практический интерес [17].

При выводе будем использовать полученную в [13] систему для ФГ:

$$G = G_0 + \sum_{r=1}^{3} G^{(r)} ,$$

$$G^{(i)} = G^{(j\ell)} - G^{0} + G^{0} t_{j\ell} C^{(j)} + G^{0} t_{j\ell} G^{(\ell)} , \qquad (29)$$

где, например,

$$t_{j\ell}\, G^{(\ell)}_{\sqrt{s_q}} (P|\,Q\,) = \int t_{j\ell}\, (P|\,K\,)\, d\Omega_{K_{(j\ell)}}\, J_{j\ell}(K)\, G^{(\ell)}_{\sqrt{s_q}} (K\,|\,Q\,)$$

(здесь $J_{j\ell}(K)$ – якобиан перехода к относительным переменным и $t_{j\ell}$ – есть решение двухчастичной задачи вида

$$t_{j\ell} = V_{j\ell} + V_{j\ell}\, G^{0}\, t_{j\ell}$$

с квазипотенциалом $V_{j\ell}$, который строится на основе диаграммной техники), а $G^{(j\ell)}$ определяется равенством

$$G^{(j\ell)} = \frac{1}{[G^{0}]^{-1} - V_{j\ell}}$$

и соотношения для ВФ следующего типа

$$\lim_{\epsilon\to 0} \left(-\, i\epsilon\, G^{0}_{\sqrt{s}_{1(23)}}\, \Psi^{(23)}_{\sqrt{s}_{1(23)}}\right) = 0, \qquad (30)$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \left(-\, i\epsilon\, G^{(23)}_{\sqrt{s}_{2(13)}}\, \Psi^{(13)}_{\sqrt{s}_{2(13)}}\right) = 0. \qquad (31)$$



Нерелятивистские построения при доказательстве соотношений (30), (31) особенно просто воспроизводятся для (30) с помощью формулировки в конфигурационном пространстве. Действительно, используя (25), имеем:

$$G^{0}_{z}\Psi^{(23)}_{\sqrt{s}_{1(23)}} (K\,|\,Q\,) =$$

$$= e^{i\sqrt{s}_{1(23)}(\lambda,x)} \int \xi(\vec{K}_{(23)}, \vec{r}_{23})\, \xi(\vec{K}_{(1)}, \vec{r}_{1}) \frac{d\Omega_{K_{(23)}}\, d\Omega_{K_{(1)}}}{K^{0}_{\{23\}} + K^{0}_{\{1\}} - z - i\epsilon}\, \xi^{*}(\vec{K}_{(23)}, \vec{r}\,'_{23}) \times$$

$$\times\, \xi^{*}(\vec{K}_{(1)}, \vec{r}\,'_{1}) * d\vec{r}\,'_{1}\, d\vec{r}\,'_{23}\, \xi(\vec{Q}_{(1)}, \vec{r}\,'_{1})\, \phi_{m_{23}}(\vec{r}\,'_{23}).$$

После интегрирования по $\vec{r}\,'_1, \vec{K}_{(1)}$ для $z = \sqrt{s}_{1(23)}$ с учётом (20) и (28) получим выражение, не содержащее особенностей, откуда и следует требуемое утверждение.

ВФ взаимодействующих частиц в случае несвязного движения определим с помощью полной ФГ соотношением

$$\Psi_{\sqrt{s_q}} = \lim_{\epsilon\to 0} (-i\epsilon\, G_{\sqrt{s_q}}\, \Psi^{0}) = \Psi^{0} + \sum_{r=1}^{3} \Psi^{(r)},\ \Psi^{(i)} = \lim_{\epsilon\to 0} (-i\,\epsilon\, G^{(i)}_{\sqrt{s_q}}\, \Psi^{0}).$$

Здесь $\Psi^0$ определяется в (20), а умножение есть интегрирование по относительным переменным.

Тогда из (29) получим систему уравнений

$$\Psi^{(i)} = \Psi^{(j\ell)} - \Psi^{0} + G^{0}\, t_{j\ell}\, \Psi^{(j)} + G^{0}\, t_{j\ell}\, \Psi^{(\ell)},$$

где

$$\Psi^{(j\ell)} = \lim_{\epsilon\to 0}(-i\epsilon\, G^{(j\ell)}_{\sqrt{s}_q}\Psi^0)\,, \quad [G^{(j\ell)}_{\sqrt{s}_q}]^{-1}\Psi^{(j\ell)} = 0$$

есть решение двухчастичной задачи, которая описана в пункте 4. Нетрудно убедиться, что разность $\Psi^{(j\ell)} - \Psi^0$ представляет собой расходящуюся волну на больших расстояниях по относительной координате $\vec{r}_{j\ell}$ .

В случае рассеяния одной частицы на двух других, находящихся в связанном состоянии, для ВФ

$$\Psi_{23} = \lim_{\epsilon\to 0}(-i\epsilon\, G_{\sqrt{s}_{1(23)}}\Psi^0) = \Psi^{(1)}_{23} + \Psi^{(2)}_{23} + \Psi^{(3)}_{23}\,,$$

учитывая (30), (31), получим систему уравнений :

$$\Psi^{(1)}_{23} = \Psi^{(23)} + G^0 t_{23}\Psi^{(2)}_{23} + G^0 t_{23}\Psi^{(3)}_{23}\,,$$

$$\Psi^{(2)}_{23} = G^0 t_{13}\Psi^{(1)}_{23} + G^0 t_{13}\Psi^{(3)}_{23}\,,$$

$$\Psi^{(3)}_{23} = G^0 t_{12}\Psi^{(1)}_{23} + G^0 t_{12}\Psi^{(2)}_{23}\,.$$

Наконец, в случае связанного состояния трех частиц соответствующая система имеет вид:

$$\sqrt{s}_{123} = m_1 + m_2 + m_3 - |W^{cB}_{123}|\,,$$

$$\Psi_{123} = \sum_{r=1}^{3}\Psi^{(r)}_{123}\,,$$

$$\Psi^{(i)}_{123} = G^0 t_{j\ell}\Psi^{(j)}_{123} + G^0 t_{j\ell}\Psi^{(\ell)}_{123}\,.$$



## 6. Заключение

Рассмотренная трехмерная формулировка релятивистской задачи трех тел в конфигурационном пространстве может рассматриваться как обобщение нерелятивистской теории: движение с.ц.м. отделяется и задача формулируется в относительных переменных.

По этим переменным, как и в двухчастичной задаче [8], на основе (16) можно получить в случае вещественных локальных потенциалов условие непрерывности тока, а затем использовать его для задания граничных условий и определения спектра связанных состояний.

Поскольку относительные переменные вводятся посредством операторов Казимира, то развитая схема может быть основой для построения релятивистской теории потенциального рассеяния. На этом пути, однако, возникают осложнения в связи с интегральным характером соотношений между относительными переменными. Поэтому приведенные здесь построения могут иметь значения для процессов рассеяния без перераспределений.

Получено релятивистское обобщение интегральных уравнений Фаддеева для ВФ. Входящие в них асимптотические ВФ являются решениями разностных уравнений, которые аналогично нерелятивистской теории записываются в одночастичной форме.

Автор благодарит профессора Д.И. Блохинцева, В.Г. Кадышевского, Р.М. Мир-Касимова и Н.Б. Скачкова за интерес к работе и полезные обсуждения.

### Литература

1. V.G. Kadyshevsky. Preprint N7, JTF, Kiev, (1967).
2. V.G. Kadyshevsky. Nuclear Physics, B6, 125 (1968).

3. V.G. Kadyshevsky and M.D. Matveev. Nuovo Cim. 55A, No2, 275(1968).
4. V.G. Kadyshevsky, M.D. Mir-Kasimov and N.B. Skachkov. Nuovo Cim., 55A, No 2, 233, (1968).
5. V.G. Kadyshevsky, M.D. Matveev and R.M. Mir-Kasimov, JINR Preprint E2-030, Dubna, (1968).
6. M. Freeman, M.D. Matveev and R.M. Mir-Kasimov, Nucl. Phys., B12, No 1, 19 (1969).
7. В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Скачков. Ядерная физика, 9, №2. 212 (1969).
8. В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Скачков. Ядерная физика, 9, №2, 462 (1969).
9. В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, М. Фриман. Ядерная физика, 9, №3, 646 (1969).
10. Е.П. Жидков, В.Г. Кадышевский, Ю.В. Катышев. Препринт ОИЯИ, Р2-4767, Дубна 1970.
11. В.М. Виноградов. Препринт ОИЯИ Р2-5099, Дубна 1970.
12. A.A. Logunov and A.N. Tavkhelidze. Nuovo Cim., 29, No 2, 380(1963), A.N. Tavkhelidze. Lectures on Quasipotential Method in Field Theory, Bombay, Tata Institute of Fundamental Research, 1964.
13. В.М. Виноградов. Препринт ОИЯИ Р2-5100, Дубна 1970.
14. И.С. Шапиро. ДАН СССР, 106, 647 (1956).
15. Н.Я. Виленкин. Специальные функции и теория представлений групп. Москва, Наука, 1965.
16. Л.Д. Фаддеев, ЖЭТФ, 39, 1459 (1960).
Л.Д. Фаддеев. Труды математического института им. В.А. Стеклова, 69, Изд. АН СССР, М-Л, (1963).
17. А.Г. Ситенко, В.Ф. Харченко. Препринт ИТФ-68-11, Киев (1968).

Рукопись поступила в издательский отдел
5 мая 1970 года.