ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 5100

В.М. Виноградов

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ В ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1970

I. Вводные замечания

В предыдущей работе[1] на основе трехмерной формулировки квантовой теории поля (КТП)[x], в которой все частицы находятся на массовой поверхности[4], получена система уравнений[xx] для амплитуды рассеяния трех частиц[xxx]

$$T(3 \to 3) = \sum_{r=1}^{3} T_r \,,$$

$$T_i(p\,|\,q) = 2(2\pi)^3\,\delta(\vec{p}_i(-)\vec{q}_i)\,t_{j\ell}(p\,|\,q) +$$

$$+\frac{1}{4(2\pi)^3}\int t_{j\ell}(p\,|\,q)\,\delta(\vec{p}_i(-)\vec{k}_i)\prod_{r=1}^{3}\frac{d\vec{k}_r}{k_r^0}\,\frac{d\kappa}{\kappa-i\epsilon}\,\delta\Big(\sum_{r=1}^{3}k_r-\lambda\kappa-\sum_{r=1}^{3}q_r\Big)\times\big(T_j(k|q)+T_\ell(k|q)\big), \qquad (1.1)$$

---

[x] Трехмерная формулировка задачи двух тел в КТП была развита в квазипотенциальной теории А.А. Логунова и А.Н. Тавхелидзе[2] (см. также[3]). Применению этого метода к задаче трех тел посвящены работы[11,12]).

[xx] После интегрирования посредством дельта-функций из (1.1) следует релятивистский аналог уравнений Л.Д. Фаддеева[5].

[xxx] Для не суммируемых индексов в работе приняты ограничения: $i, j, \ell = 1,2,3$, $i \neq \ell \neq j$; запись $\{p\}$ означает переменные $\{p_r\}$, $r = 1,2,3$.

где $t_{j\ell}(p|q)$ определяется уравнением[x/]

$$t_{j\ell}(p|q) = V_{j\ell}(p|q) + \frac{1}{4(2\pi)^3}\int V_{j\ell}(p|k)\,\delta(\vec p_i(-)\vec k_i)\times \tag{1.2}$$
$$\times \prod_{r=1}^{3}\frac{d\vec k_r}{k_r^0}\,\frac{d\kappa}{\kappa - i\epsilon}\,\delta\Big(\sum_{r=1}^{3} k_r - \lambda\kappa - \sum_{r=1}^{3} q_r\Big)\,t_{j\ell}(k|q)$$

и

$$\delta(\vec p_i(-)\vec q_i) = p_i^0\,\delta(\vec p_i - \vec q_i), \quad p_i^0 = \sqrt{\vec p_i^{\,2} + m_i^2}$$

$$\kappa = \sqrt{s_k} - \sqrt{s_q}, \quad s_k = \Big(\sum_{r=1}^{3} k_r\Big)^2, \tag{1.3}$$
$$\lambda = \frac{\sum_{r=1}^{3} q_r}{\sqrt{s_q}}.$$

Как отмечалось в [1], при таком подходе отсутствуют трудности формализма Бете-Солпитера (БС)[6-10]: уравнения имеют трехмерный характер и удовлетворяют принципу соответствия и трехчастичной унитарности.

В связи с этим представляет интерес изучить на основе (1.1) и (1.2) трехчастичную задачу в относительных переменных и при их построении использовать следующие привлекательные особенности применяемой формулировки КТП[4,14-16]:

I) все импульсы частиц находятся на массовой поверхности $m_r^2 = \{q_i^2, \dots\}$;

II) 4-скорость системы является сохраняющимся вектором

$$\lambda_q = \lambda_k = \lambda_q; \tag{1.4}$$

III) роль функции Грина (ФГ) играет пропагатор квазичастицы, присутствием которой определяется способ схода с поверхности энергии-импульса (1.1).

Свойство (I) позволяет в соответствии с природой импульсного пространства вводить относительные переменные посредством операции сложения в пространстве Лобачевского - сложения на гиперболоиде[13]:

$$\vec k' = \Lambda_{\vec p}\, k = \vec k(-)\vec p = \vec k - \vec p\Big[\frac{k^0}{m} - \frac{\vec k\vec p}{m(m+p^0)}\Big],$$

$$k'^0 = \frac{(k,p)}{m}, \quad (k')^2 - \vec k'^2 = m^2.$$

Такой подход к релятивистской задаче двух тел в произвольной системе отсчёта на основе[4,14-16] показал, что движение системы центра масс (с.ц.м.) отделяется в терминах сохраняющегося λ-вектора и задача формулируется в относительных переменных.

Поэтому результаты и методы, развитые в серии работ, посвященных релятивистской проблеме двух тел, на основе разностного уравнения Шредингера[17-22] могут быть сформулированы ковариантным образом.

В связи с этим возникает вопрос о распространении такого подхода к релятивистской проблеме трех тел. Здесь также первоочередной задачей является обобщение нерелятивистских построений относительных переменных для релятивистского аналога уравнения Шредингера[1][x/]

$$(\sqrt{s_q} - \sqrt{s_p})\,\Psi_{\sqrt{s_q}}(p) = \frac{1}{(2\pi)^6}\int V(p|k)\,\Psi_{\sqrt{s_q}}(k)\,d\Omega_{k_j}\,d\Omega_{k_\ell}. \tag{1.5}$$

---

x/ Здесь $V_{j\ell}(p|q)$ строится с помощью теории возмущений (ТВ).

x/ Здесь $d\Omega_{k_i} = \frac{d\vec k_i}{k_i^0}$, $V(p|q)$ - квазипотенциал.

II. Релятивистский аналог импульсов Якоби в задаче трех тел

Назовем относительным 4-импульсом между i -той и системой j -и ℓ -той частиц импульс, построенный по правилу[x/]:

$$(\mathrm{I})\quad \vec{K}_i = \vec{k}_i(-)\vec{\lambda}_i, \qquad K_i^0 = (\lambda, k_i), \quad \lambda_i = m_i\lambda, \tag{2.1}$$

$$\sum_{r=1}^{3} \vec{K}_r = 0, \tag{2.2}$$

$$\sqrt{s}_k = \sum_{r=1}^{3} K_r. \tag{2.3}$$

Смысл введенных 4-векторов дается (2.2) (по существу 3-векторов, т.к. K_i^0 -инвариант) и, кроме того, в нерелятивистском пределе

$$\vec{K}_i \to \vec{k}_{i(j\ell)} = \vec{k}_i - m_i \frac{\sum_{r=1}^{3}\vec{k}_r}{\sum_{r=1}^{3} m_r} = \frac{(m_j+m_\ell)\vec{k}_i - m_i(\vec{k}_j+\vec{k}_\ell)}{\sum_{r=1}^{3} m_r},$$

$$\sqrt{s}_k \to \sum_{r=1}^{3} m_r + \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2m_i}\vec{k}^2_{i(j\ell)}. \tag{2.4}$$

Следовательно, релятивистский гамильтониан из (1.5) имеет представление в виде суммы трех относительных энергий и это представление

[x/] В дальнейшем построения (2.1), (2.9), (2.11) будем называть соответственно I-ым, II-ым, III-им этапом построений относительных импульсов.

лоренц-инвариантно. В пределе больших масс получаем нерелятивистский гамильтониан, в котором исключено движение с.ц.м.

Отсюда имеем такую особенность релятивистской задачи: в своей формулировке она содержит только относительное движение частиц.

Обычно удобно формулировать трехчастичную задачу в терминах двух независимых импульсов:

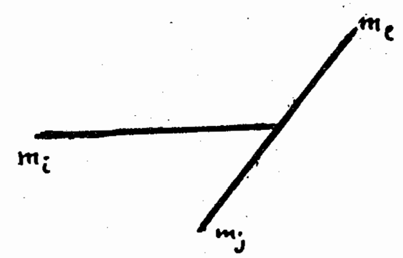

Рис. 1

Инвариантный гамильтониан в этом отношении также удовлетворяет принципу соответствия – в нерелятивистском пределе он может быть представлен в одном из трех видов:

$$\sqrt{s}_k\Big|_{m_r\to\infty} \to \sum_{r=1}^{3} m_r + \frac{1}{2\mu_{j\ell}}\vec{k}^2_{j\ell} + \frac{1}{2\mu_i}\vec{k}^2_{i(j\ell)}. \tag{2.5}$$

Здесь $\vec{k}_{i(j\ell)}$ определен в (2.4), а $\vec{k}_{j\ell}$ и $\mu_{j\ell}$, μ_i есть соответственно относительный импульс и приведенные массы:

$$\vec{k}_{j\ell} = \frac{m_\ell\vec{k}_j - m_j\vec{k}_\ell}{m_\ell+m_j}, \quad \mu_{j\ell} = \frac{m_j m_\ell}{m_j+m_\ell}, \quad \mu_i = \frac{m_i(m_j+m_\ell)}{\sum_{r=1}^{3} m_r}. \tag{2.6}$$

Покажем теперь, что аналогичное представление гамильтониана $\sqrt{s_k}$ имеет место и в релятивистских переменных. Для этого посредством вектора 4-скорости

$$\lambda_{j\ell} = \frac{K_j + K_\ell}{\sqrt{s_{j\ell}}}, \quad s_{j\ell} = (K_j + K_\ell)^2 = (k_j + k_\ell)^2 \tag{2.7}$$

член, соответствующий сумме $K_j^0 + K_\ell^0$ в $\sqrt{s_k}$, представим в виде

$$K_j^0 + K_\ell^0 = \lambda_{j\ell}^0 \sqrt{s_{j\ell}} = \sqrt{s_{j\ell} + \vec{K}_i^{\,2}}\,. \tag{2.8}$$

В соответствии с формулировкой двухчастичной задачи в произвольной системе отсчёта ее относительный импульс строится в два этапа:

$$\text{(II)}\quad \begin{aligned} &\vec{K}_{j\ell} = \vec{K}_j \,(-)\, m_j \vec{\lambda}_{j\ell}, \quad K_{j\ell}^0 = (\lambda_{j\ell}, K_j) = \sqrt{m_j + \vec{K}^2_{j\ell}}, \\ &\vec{K}_{\ell j} = \vec{K}_\ell (-)\, m_\ell \vec{\lambda}_{j\ell}, \quad K_{\ell j}^0 = (\lambda_{j\ell}, K_\ell) = \sqrt{m_\ell + \vec{K}_{\ell j}^2}, \\ &\vec{K}_{j\ell} + \vec{K}_{\ell j} = 0. \end{aligned} \tag{2.9$_1$}$$

Второй этап состоит в растяжении[x/] импульса $\vec{K}_{j\ell} \to \vec{K}_{(j\ell)}$ по правилу

$$\text{(III)}_1\quad \begin{aligned} &\sqrt{s_{j\ell}} = K_{j\ell}^0 + K_{\ell j}^0 = \frac{m_j + m_\ell}{\sqrt{m_j m_\ell}} \sqrt{m_j m_\ell + \vec{K}^2_{(j\ell)}}\,, \\ &\frac{\vec{K}_{(j\ell)}}{|\vec{K}_{(j\ell)}|} = \frac{\vec{K}_{j\ell}}{|\vec{K}_{j\ell}|}. \end{aligned} \tag{2.9$_2$}$$

Поскольку в нерелятивистском пределе

$$\begin{aligned} &\vec{K}_{j\ell} \to \frac{m_\ell \vec{K}_j - m_j \vec{K}_\ell}{m_\ell + m_j} \to \frac{m_\ell \vec{k}_j - m_j \vec{k}_\ell}{m_\ell + m_j} = \vec{k}_{j\ell}, \\ &\sqrt{s_{j\ell}} \to m_j + m_\ell + \frac{1}{2\mu_{j\ell}} \vec{k}^2_{j\ell}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

то

$$\vec{K}_{(j\ell)}\Big|_{m_r \to \infty} \to \frac{m_\ell \vec{k}_j - m_j \vec{k}_\ell}{m_\ell + m_j}$$

и, следовательно, $\vec{K}_{(j\ell)}$ может быть назван релятивистским относительным импульсом j -той и ℓ -той частиц.

На основании (2.8) и (2.9)$_2$ имеем

$$\sum_{r=1}^{3} K_r^0 = \frac{m_j + m_\ell}{\sqrt{m_j m_\ell}} \sqrt{m_j m_\ell + \vec{K}^2_{(j\ell)} + \frac{\mu_{j\ell}}{m_j + m_\ell} \vec{K}_i^2} + \sqrt{m_i^2 + \vec{K}_i^2}\,.$$

Сделаем последний шаг построений: введем импульс $\vec{K}_{(i)}$, коллинеарный $\vec{K}_i$, согласно равенству

---

x/ На языке гиперболических переменных эта операция сводится к сложению длин коллинеарных векторов в пространстве скоростей [18]: если $|\vec{K}_{j\ell}| = m_j \operatorname{sh} \chi_{j\ell} = m_\ell \operatorname{sh} \chi_{\ell j}$,

$$\text{то}\quad |\vec{K}_{(j\ell)}| = 2\mu_{j\ell} \operatorname{sh} \frac{\chi_{j\ell} + \chi_{\ell j}}{2}\,. \tag{2.9'}$$

$$\sqrt{s}_k = \sum_{r=1}^{3} K_r^0 \equiv \frac{m_j + m_\ell}{\sqrt{m_j m_\ell}} \sqrt{m_j m_\ell + \vec{K}^2_{(j\ell)}} + \frac{m_i}{\sqrt{m_i \mu_i}} \sqrt{m_i \mu_i + \vec{K}^2_{(i)}},$$

$(III)_2$

$$\frac{\vec{K}_{(i)}}{|\vec{K}_{(i)}|} = \frac{\vec{K}_i}{|\vec{K}_i|}. \qquad (2.11)$$

Из (2.5) и (2.10) следует, что в нерелятивистском пределе

$$\vec{K}_{(i)} \to \frac{(m_\ell + m_j)\, \vec{k}_i - m_i\, (\vec{k}_\ell + \vec{k}_j)}{\sum_{r=1}^{3} m_r},$$

и поэтому построенный импульс имеет смысл относительного между одной частицей и системой двух других.

Завершая построения, отметим, что квадраты построенных 3- векторов являются лоренц-инвариантными величинами: для $\vec{K}_{(j\ell)}$ это следует из $(2.9)_2$, для $\vec{K}_{(i)}$ - из $(2.9)_2$ и (2.11). Таким образом, гамильтониан трехчастичной задачи в релятивистском случае имеет инвариантное представление в виде суммы инвариантной энергии двух частиц и энергии третьей относительно выделенных двух (ср. (2.11) и $(2.9)_2$).

Соотношению (2.11) удобно придать вид линейной суммы четвертых компонент векторов $K_{(j\ell)}, K_{(i)}$, определенных на гиперболоидах с релятивистскими приведенными массами $\sqrt{m_j m_\ell}$ и $\sqrt{m_i \mu_i}$ x/:

$$\sqrt{s}_k \equiv \frac{m_j + m_\ell}{\sqrt{m_j m_\ell}} K^0_{(j\ell)} + \frac{m_i}{\sqrt{m_i \mu_i}} K^0_{(i)} \equiv K^0_{\{j\ell\}} + K^0_{\{i\}}. \qquad (2.12)$$

x/ В дальнейшем $K_{(j\ell)}$ и $K_{(i)}$ будем называть относительными импульсами, а K_r в силу их зависимости - вспомогательными.

Рассмотрим формулировку задачи в сферических переменных, реализованных на гиперболоидах с массами $\sqrt{m_j m_\ell}$, $\sqrt{m_i \mu_i}$. Вводя гиперболические углы обычным способом x/:

$$|\vec{K}_i| = m_i \operatorname{sh}\chi_i, \qquad K_i^0 = m_i \operatorname{ch}\chi_i,$$

$$|\vec{K}_{(12)}| = \sqrt{m_1 m_2}\, \operatorname{sh}\chi_{(12)}, \quad K^0_{(12)} = \sqrt{m_1 m_2}\, \operatorname{ch}\chi_{(12)}, \qquad (2.13)$$

$$|\vec{K}_{(3)}| = \sqrt{m_3 \mu_3}\, \operatorname{sh}\chi_{(3)}, \quad K^0_{(3)} = \sqrt{m_3 \mu_3}\, \operatorname{ch}\chi_{(3)},$$

получим

$$\sqrt{s}_k = m_1 \operatorname{ch}\chi_1 + m_2 \operatorname{ch}\chi_3 + m_3 \operatorname{ch}\chi_3 =$$

$$= (m_1 + m_2) \operatorname{ch}\chi_{(12)} + m_3 \operatorname{ch}\chi_{(3)}. \qquad (2.14)$$

Необходимо получить соотношения, выражающие $\chi_{(12)}$ и $\chi_{(3)}$ через χ_i. Это нетрудно сделать, если свести задачу к двухчастичной. Выделим в пространстве вспомогательных импульсов $\vec{K}_i$ сложную частицу с 4-импульсом $\{K_1^0 + K_2^0,\ \vec{K}_1 + \vec{K}_2\}$ и введем для нее гиперболические переменные:

$$|\vec{K}_1 + \vec{K}_2| = m_{12} \operatorname{sh}\chi_{12}, \quad K_1^0 + K_2^0 = m_{12} \operatorname{ch}\chi_{12}, \quad m_{12}^2 = s_{12}.$$

x/ Для упрощения записей при обсуждении гиперболических переменных мы на время конкретизируем значение индексов i, j, ℓ.

По построению

$$m_{12}\,\mathrm{sh}\,\chi_{12} = m_3\,\mathrm{sh}\,\chi_3\,,$$
$$m_{12}\,\mathrm{ch}\,\chi_{12} = m_1\,\mathrm{ch}\,\chi_1 + m_2\,\mathrm{ch}\,\chi_2\,. \tag{2.15}$$

Полная масса системы может быть выражена через массы подсистем и относительное расстояние в пространстве скоростей по формуле

$$\sqrt{s} = \sqrt{m_{12}^2 + m_3^2 + 2m_{12}\,m_3\,\mathrm{ch}(\chi_{12}+\chi_3)}\,. \tag{2.16}$$

Замечая, что

$$m_{12} = (m_1 + m_2)\,\mathrm{ch}\,\chi_{(12)}\,, \tag{2.17}$$

из (2.14)-(2.16) получим для $\chi_{(3)}$ следующее представление:

$$\mathrm{ch}\,\chi_{(3)} = \frac{\mathrm{ch}\,\frac{\chi+\chi_3}{2}}{\mathrm{ch}\,\frac{\chi_{12}}{2}}\,,\quad \mathrm{sh}\,\chi_{(3)} = \frac{\sqrt{\mathrm{sh}\,\chi\;\mathrm{sh}\,\chi_3}}{\mathrm{ch}\,\frac{\chi_{12}}{2}}\,,\quad \chi = \chi_{12}+\chi_3\,. \tag{2.18}$$

Вспомогательный угол χ_{12} и инвариантная масса m_{12} выражаются через χ_i очевидными соотношениями:

$$\mathrm{th}\,\chi_{12} = \frac{m_3\,\mathrm{sh}\,\chi_3}{m_1\,\mathrm{ch}\,\chi_1 + m_2\,\mathrm{ch}\,\chi_2}\,,$$

$$m_{12} = \sqrt{(m_1\,\mathrm{ch}\,\chi_1 + m_2\,\mathrm{ch}\,\chi_2)^2 - m_3^2\,\mathrm{sh}^2\,\chi_3}\,. \tag{2.19}$$

Формулы (2.17)-(2.19) дают решение поставленной задачи. Вместе с теоремой косинусов для треугольника $\Delta_{m_1 m_2 m_3}$ (2.2)

$$-1 \le \cos\theta_{12} = \frac{m_1^2\,\mathrm{sh}^2\chi_1 + m_2^2\,\mathrm{sh}^2\chi_2 - m_3^2\,\mathrm{sh}^2\chi_3}{2\,m_1 m_2\,\mathrm{sh}\,\chi_1\,\mathrm{sh}\,\chi_2} \le 1$$

они показывают, что при изменении $\vec{K}_r$ значения относительных импульсов $K_{(j\ell)}$ и $K_{(i)}$ заполняют весь гиперболоид соответственно с массами $\sqrt{m_j m_\ell}$ и $\sqrt{m_i \mu_i}$.

Другое следствие относится к импульсам $\vec{K}_{(r)}$. Введенные коллинеарно $\vec{K}_r$, они в отличие от своих нерелятивистских пределов $\vec{k}_{i(j\ell)}$ уже не образуют треугольника:

$$\sum_{r=1}^{3} \vec{K}_{(r)} \neq 0,$$

что следует из иррационального представления $|\vec{K}_{(r)}|$ через $|\vec{K}_i|$ и является проявлением неевклидовости релятивистского пространства импульсов.

Здесь уместно проследить, как далеко простирается аналогия с нерелятивизмом. Нерелятивистский гамильтониан, записанный в переменных Якоби, имеет вид

$$H_0 = \frac{\vec{k}_{j\ell}^{\,2}}{2\mu_{j\ell}} + \frac{\vec{k}_{i(j\ell)}^{\,2}}{2\mu_i} + \frac{\vec{K}^2}{2M} = H_0^{\text{инв.}} + \frac{\vec{K}^2}{2M}\,,$$
$$\vec{K} = \sum_{r=1}^{3}\vec{k}_r\,,\quad M = \sum_{r=1}^{3} m_r\,. \tag{2.20}$$

Напомним, что импульсы Якоби вводятся посредством преобразований Галилея в пространстве скоростей.

Если

$$\vec v_i = \frac{\vec k_i}{m_i}, \quad \vec V_{j\ell} = \frac{\vec k_j + \vec k_\ell}{m_j + m_\ell}, \quad \vec V = \frac{\vec K}{M},$$

то

$$\vec v_i' = \vec v_i - \vec V = \frac{1}{m_i} \vec k_{i(j\ell)}, \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned} \vec v_{j\ell}' &= \vec v_j' - \vec V_{j\ell}' = \\ &= \vec v_j - \vec V_{j\ell} = \frac{1}{m_j} \vec k_{j\ell}, \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\vec V_{j\ell}' = \vec V_{j\ell} - \vec V = \frac{m_j \vec v_j' + m_\ell \vec v_\ell'}{m_j + m_\ell}. \tag{2.23}$$

Понятно, что (2.21), (2.23) соответствуют I этапу релятивистских построений и формально, на языке преобразования Галилея, это есть переход в с.ц.м.[x/], II этапу – преобразования (2.22), соответствующие переходу в с.ц.м. выделенной двухчастичной подсистемы. В результате гамильтониан принимает вид (2.20).

Следовательно, в релятивистском случае нужна еще одна операция в пространстве скоростей (этап III), которая выделяет релятивистские приведенные массы. Для двухчастичной подсистемы $(\mathrm{III})_1$ сводится к сложению длин коллинеарных векторов в пространстве скоростей $(2.9)_2$. Для трех частиц согласно (2.17) такое сложение дополняется "непростой" операцией в пространстве импульсов.

[x/] На самом деле переходу в с.ц.м. соответствует $\vec V = 0$. В релятивистском случае это означает $\vec\lambda = 0$.

Смысл этой операции можно выяснить, обратившись к (2.20) – второй член здесь можно представить в виде

$$\epsilon_{i(j\ell)} \equiv \frac{\vec k^2_{i(j\ell)}}{2\mu_i} = \frac{(\vec k_{j(i\ell)} + \vec k_{\ell(ij)})^2}{2(m_j + m_\ell)} + \frac{\vec k^2_{i(j\ell)}}{2m_i} \equiv \epsilon_{j\ell} + \epsilon_i .$$

Релятивистский аналог такого представления следует из (2.18) и (2.15):

$$K^0_{\{3\}} = |\vec K_3| \,\mathrm{th}\, \frac{\chi_{12}}{2} + K^0_3, \quad \chi_{12} = \mathrm{Arsh}\left(\frac{|\vec K_3|}{K^0_{\{12\}}}\right), \tag{2.24}$$

причем в пределе больших масс

$$\chi_{12} \to \frac{|\vec K_3|}{m_1 + m_2} \to \frac{|\vec k_{3(12)}|}{m_1 + m_2}.$$

Таким образом, релятивистский аналог $\epsilon_{j\ell}$ пропорционален 3-импульсу системы $(j\,\ell)$ и "обратно пропорционален" $K^0_{\{j\ell\}} = \sqrt{\overline{(k_j + k_\ell)^2}}$, т.е. роль $m_j + m_\ell$ в релятивистском случае играет инвариантная масса.

В случае свободного движения частицы m_3 относительно связанного состояния системы (12) с массой m_{12} и энергией связи $-|W_{12}|$

$$\sqrt{s}_{12}' = m_{12} = m_1 + m_2 - |W_{12}|$$

аналог собственного значения для оператора $H_0^{\text{инв.}} - V_{12}$

$$E = -|W_{12}| + \frac{\vec k'^2_{3(12)}}{2\mu_3}$$

будет иметь вид

$$\sqrt{s} = m_{12} + |\vec K_3'| \,\mathrm{th}\, \frac{\chi_{12}'}{2} + K_3'^0, \quad \chi_{12}' = \mathrm{Arsh}\left(\frac{|\vec K_3'|}{m_{12}}\right). \tag{2.25}$$

В дальнейшем, для импульсного представления в качестве независимых относительных переменных мы будем использовать $\{K_{(j\ell)}, K_{(i)}\}$ и в записи (2.12) под $K^0_{\{i\}}$ понимать представление (2.24)[x/].

Обсудим теперь переход к относительным переменным в инвариантных амплитудах. Их аргументы как функция скалярных произведений могут быть выражены через $K_i, \ldots$ [xx/] по правилу (I) очевидным образом[xxx/]. Тогда для перехода к относительным импульсам достаточно выразить $K_r, \ldots,$ через $K_{(i)}, K_{(j\ell)}, \ldots$, т.е. необходимо произвести построения (II), (III) в обратном порядке.

Для $(III)_2$ обратные соотношения удобно получить с помощью (2.14), (2.15), (2.18):

$$(III)'_2 \qquad ch\chi_i = \frac{m_i}{2\sqrt{s}}\left[ch^2\chi_{(i)} + 2\frac{m_j+m_\ell}{m_i}\, ch\chi_{(i)}\, ch\chi_{(j\ell)} + 1\right], \tag{2.26}$$

$$\frac{\vec K_i}{|\vec K_i|} = \frac{\vec K_{(i)}}{|\vec K_{(i)}|},$$

---

x/ Переменные $\{K_{(j\ell)}, K_{(i)}\}$ удобны при введении конфигурационного представления, поскольку при фурье-преобразовании по $K_{(j\ell)}, K_{(i)}$ в интервале значений $0 \le \vec K_{(j\ell)}, \vec K_{(i)}, \ldots < \infty$ их можно рассматривать как независимые.

xx/ Здесь многоточие означает относительные импульсы для всех переменных p_j, q_ℓ и т.д., построение которых производится так же, как и соответствующие построения для k_i, $i, j, \ell = 1,2,3$.

xxx/ В этом пункте построений существенно используется сохранение λ -вектора. Благодаря этому, например:

$$(p_j, k_r) = (P_j, K_r).$$

тогда соответствующие построения для $\vec K_j, \vec K_\ell, \ldots$ следуют из (II) и $(III)_1$.

$$\vec K_j = \vec K_{j\ell} (+)\, m_j \vec\lambda_{j\ell}, \quad \vec K_\ell = \vec K_{\ell j} (+)\, m_\ell \vec\lambda_{\ell j}, \quad \vec K_{j\ell} = -\vec K_{\ell j}; \tag{2.27}$$

$$(II)' \quad \vec\lambda_{j\ell} = \frac{-\vec K_i}{\sqrt{s_{j\ell}}}, \quad \lambda^0 = \sqrt{1+\vec\lambda^2_{j\ell}}, \quad \frac{\vec K_{j\ell}}{|\vec K_{j\ell}|} = \frac{\vec K_{(j\ell)}}{|\vec K_{(j\ell)}|};$$

$$(III)'_1 \quad \vec K^2_{j\ell} = \frac{1}{4s_{j\ell}}\left[s_{j\ell} - (m_j+m_\ell)^2\right]\left[s_{j\ell} - (m_j - m_\ell)^2\right],$$

где выражение $\sqrt{s_{j\ell}}, \sqrt{s}$ через $\vec K_{(j\ell)}, \vec K_{(i)}, \ldots$ дано в $(2.9)_2$, (2.11).

Таким образом, после перехода к относительным импульсам инвариантные амплитуды не зависят от λ -вектора. Это по существу означает отделение движения с.ц.м. в динамической формулировке задачи (см. следующий пункт) и является следствием сохранения этого вектора.

Описанная выше последовательность построений $\vec K_i, \ldots$ через относительные импульсы есть схема перехода от одного типа связи к другому (рис. 2), где $\vec K_{(i')}, \ldots, \vec K_{(j\ell')}, \ldots$ строятся

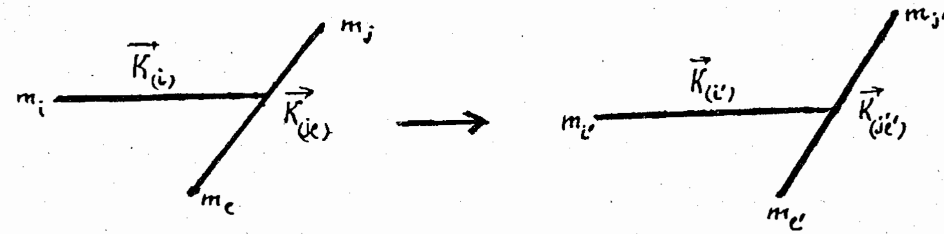

Рис. 2

после восстановления $\vec{K}_i, \dots$ по формулам типа (II) и (III). В нерелятивистском пределе этот переход дается соотношениями

$$\vec{k}_{i(j\ell)} = -\frac{m_i}{m_i+m_\ell}\vec{k}_{\ell(ij)} + \vec{k}_{j\ell},$$

$$\vec{k}_{j\ell} = -\frac{m_j M}{(m_\ell+m_j)(m_i+m_j)}\vec{k}_{\ell(ij)} - \frac{m_\ell}{m_\ell+m_j}\vec{k}_{j\ell}.$$

Изложенное резюмируем так: релятивистская задача трех тел формулируется в терминах относительных переменных. Построение относительных импульсов производится посредством 4-скоростей как преобразования Лоренца и является обобщением нерелятивистских построений на основе преобразований Галилея[x/]. При этом в релятивистском случае возникает необходимость в дополнительной операции, связанной с выделением приведенной массы. Эта операция может быть сформулирована на языке гиперболических переменных. Роль релятивистских приведенных масс играют выражения вида $\sqrt{m_j m_\ell}$, $\sqrt{m_i \mu_i}$.

Построенная формулировка в терминах релятивистских относительных импульсов полностью удовлетворяет принципу соответствия.

III. Релятивистские уравнения Фаддеева в относительных переменных

Напомним результат п. II: в силу закона сохранения (1.4) инвариантные амплитуды не зависят от λ -вектора и являются функциями

[x/] В отличие от нерелятивистских импульсов Якоби, являющихся абсолютными инвариантами преобразований Галилея, релятивистские относительные импульсы при преобразованиях Лоренца испытывают трехмерные вращения.

только относительных переменных. Нужно показать, что отделение движения с.ц.м. происходит и при переходе в (1.1), (1.2) к относительным переменным.

Для этого в соответствии с построениями (I)–(III) произведем замену переменных интегрирования в три этапа. Первый будет соответствовать переходу от одной тройки независимых переменных к другой:

$$\{\vec{k}_r\} \to \{\vec{\lambda}, \vec{K}_j, \vec{K}_\ell\},$$

(I)
$$\prod_{r=1}^{3} d\Omega_{\vec{k}_r} = \frac{(\sqrt{s_k})^3}{K^0_i} d\Omega_{\vec{\lambda}}\, d\Omega_{\vec{K}_j}\, d\Omega_{\vec{K}_\ell}.$$

С помощью дельта-функции сохранения 4-импульса выполним интегрирования по κ' и $\vec{\lambda}$ и тем самым полностью исключим λ из уравнений. Оставшееся интегрирование посредством трехмерной дельта-функции удобно осуществить, выделяя относительные переменные двухчастичной подсистемы:

$$\{\vec{K}_j, \vec{K}_\ell\} \to \{\vec{\lambda}_{j\ell}, \vec{K}_{j\ell}\},$$

(II)
$$d\Omega_{\vec{K}_j}\, d\Omega_{\vec{K}_\ell} = \frac{(\sqrt{s_{j\ell}})^3}{K^0_{\ell j}} d\Omega_{\vec{\lambda}_{j\ell}}\, d\Omega_{\vec{K}_{j\ell}}.$$

Наконец, выделяя приведенную массу двухчастичной подсистемы

$$\{\vec{K}_{j\ell}\} \to \{\vec{K}_{(j\ell)}\},$$

(III)$_1$
$$\frac{d\Omega_{\vec{K}_{j\ell}}}{K^0_{\ell j}} = J_1^{(j\ell)}(K)\, d\Omega_{\vec{K}_{(j\ell)}}, \quad J_1^{(j\ell)}(K) = \frac{K_{j\ell}}{K_{(j\ell)} K^0_{(j\ell)}} = \lambda^0_{j\ell}\, J^{\,\prime (j\ell)}_{(K)}$$

придем к системе интегральных уравнений

$$T_i(P|Q)=2(2\pi)^3\,\delta(\vec{P}_i(-)\vec{Q}_i)\,t_{j\ell}(P|Q)+ \qquad (3.1)$$

$$+\frac{1}{4(2\pi)^3}\int t_{j\ell}(P|K)\frac{J^{(j\ell)}(K)\,d\Omega_{\vec{K}_{(j\ell)}}}{K^0_{\{j\ell\}}+K^0_{\{i\}}-\sqrt{s_q}-i\epsilon}[T_j(K|Q)+T_\ell(K|Q)],$$

причем $t_{j\ell}(P|Q)$ определяется уравнением

$$t_{j\ell}(P|Q)=V_{j\ell}(P|Q)+\frac{1}{4(2\pi)^3}\int V_{j\ell}(P|K)\frac{J^{(j\ell)}(K)\,d\Omega_{\vec{K}_{(j\ell)}}}{K^0_{\{j\ell\}}+K^0_{\{i\}}-\sqrt{s_q}-i\epsilon}\,t_{j\ell}(K|Q). \qquad (3.2)$$

Таким образом, используемый трехмерный формализм КТП позволяет получить релятивистский аналог уравнений Фаддеева в относительных переменных: интегрирование ведется по относительному импульсу двухчастичной подсистемы в пространстве Лобачевского, реализованного на верхней поле гиперболоида $K^2_{(j\ell)}=m_j\,m_\ell$.

Нередко используется другая запись уравнений Фаддеева, симметричная по переменным трех частиц. Соответствующее релятивистское обобщение в используемом формализме легко получить, если ограничиться (I) этапом замены переменных в (1.1) и затем выполнить интегрирование по $\kappa, \vec{\lambda}, \vec{K}_i$. В результате получим[x/]:

$$T_i(P|Q)=2(2\pi)^3\,\delta(\vec{P}_i(-)\vec{Q}_i)\,t_{j\ell}(P|Q)+ \qquad (3.3)$$

$$+\frac{1}{4(2\pi)^3}\int t_{j\ell}(P|K)\frac{d\Omega_{\vec{K}_j}}{K^0_\ell\left(\sum\limits_{r=1}^{3}K^0_r-\sqrt{s_q}-i\epsilon\right)}[T_j(K|Q)+T_\ell(K|Q)]$$

[x/] Нетрудно проверить, что (3.1) и (3.2) могут быть получены из (3.3) и (3.4).

и соответственно уравнения для $t_{j\ell}$:

$$t_{j\ell}(P|Q)=V_{j\ell}(P|Q)+\frac{1}{4(2\pi)^3}\int V_{j\ell}(P|K)\frac{d\Omega_{\vec{K}_j}}{K^0_\ell\left(\sum\limits_{r=1}^{3}K^0_r-\sqrt{s_q}-i\epsilon\right)}\,t_{j\ell}(K|Q). \qquad (3.4)$$

В таком виде соответствующая нерелятивистская запись уравнений Фаддеева была использована Онесом /25/ для отделения сохраняющегося углового момента системы. Поскольку относительные переменные двухчастичной подсистемы согласно п. 2 могут быть выражены через $\vec{K}_i, \dots$, причем $\sum\limits_{r=1}^{3}\vec{K}_r=0, \dots$, то построения /25/ нетрудно применить к (3.3), (3.4).

Получившаяся система уже будет содержать лишь двукратное интегрирование. Если теперь, следуя /24,25/, использовать аппроксимацию $t_{j\ell}$ посредством связанных состояний и резонансных полюсов и учесть факторизуемость вычетов по начальным и конечным переменным, то (3.3) может быть приведено к системе одномерных интегральных уравнений[x/].

Парциальный анализ с выделением орбитального момента двухчастичной подсистемы может быть выполнен, следуя /26/, на основе уравнений в виде (3.1). В этом случае полюсная аппроксимация может быть произведена с учётом чётности связанных состояний в двухчастичных подсистемах и уравнения также приводятся к системе одномерных интегральных уравнений [x/].

[x/] Такого рода уравнения, полученные по существу путем введения релятивистской кинематики в уравнения Фаддеева, неоднократно использовались в практических вычислениях /10/ .

На основе (3.1), (3.2) можно воспроизвести нерелятивистские построения для ФГ[x/]. Определим ФГ взаимодействующих частиц через трехчастичную амплитуду нерелятивистским соотношением:

$$G = G_0 + \sum_{i=1}^{3} G_0 T'_i G_0 = G_0 + \sum_{i=1}^{3} G_i\,, \quad T'_i = \frac{1}{2(2\pi)^3} T_i \,.$$

Для частичных ФГ G_i из (3.1) получим в операторной записи[xx/]:

$$G_i = G_0 t_{j\ell} G_0 + G_0 t_{j\ell} G_j + G_0 t_{j\ell} G_\ell \,. \tag{3.5}$$

Первый член в (3.5) с учётом (3.2) выражается через ФГ двух взаимодействующих частиц, движущихся свободно относительно третьей, в следующем виде:

$$G_{j\ell} - G_0 = G_0 t_{j\ell} G_0 \,, \quad G_{j\ell} = \frac{1}{[G_0]^{-1} - V_{j\ell}} \,.$$

В результате приходим к системе интегральных уравнений для ФГ в релятивистском случае:

$$G_i = G_{j\ell} - G_0 + G_0 t_{j\ell} G_j + G_0 t_{j\ell} G_\ell \,,$$

или, выписывая интегрирование явно, получим:

$$\begin{aligned} G_i (P|Q) &= G_{j\ell}(P|Q) - G_0 (P|Q) + \\ &+ G_0 (P|Q) \int t_{j\ell} (P|K)\, d\Omega_{\vec{K}_{(j\ell)}}\, J^{(j\ell)} (K) \{ G_\ell (K,Q) + G_j (K|Q) \}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

---

x/ После введения конфигурационного пространства эти построения позволяют получить релятивистский аналог уравнений Фаддеева для волновых функций.

xx/ В дальнейшем операторное умножение есть операция интегрирования по соответствующему относительному импульсу двухчастичной подсистемы с весом $J^{(j\ell)}(K)$.

где

$$G_0 (P|Q) = \frac{1}{4(2\pi)^3} \frac{1}{P^0_{\{j\ell\}} + P^0_{\{i\}} - \sqrt{s_q} - i\epsilon} \,,$$

$$G_{j\ell} (P|Q) = \frac{1}{4(2\pi)^3} \frac{\delta(\vec{P}_i (-) \vec{Q}_i)}{P^0_{\{j\ell\}} + P^0_{\{i\}} - \sqrt{s_q} - \frac{1}{4(2\pi)^3} V_{j\ell} (P|Q)} \,.$$

С помощью (3.1) и (3.2) нетрудно убедиться, что в рамках ТВ построенная ФГ удовлетворяет уравнению

$$G = G_0 + G_0 V G \,,$$

$$V(P|Q) = \sum_{i=1}^{3} \delta(\vec{P}_i (-) \vec{Q}_i)\, V_{j\ell} (P|Q).$$

IV. Заключение

На основании изложенного заключаем, что используемая трехмерная формулировка КТП позволяет естественным образом провести построение релятивистской теории трех тел, являющейся непосредственным обобщением нерелятивистской. В отличие от аналогичных попыток на основе формализма БС при этом не приходится переделывать исходных уравнений.

Сходство рассматриваемой формулировки с нерелятивистской становится – с поправкой на релятивизм – полным после введения относительных импульсов. По аналогии с нерелятивистской теорией они строятся посредством 4-скоростей, однако евклидово сложение 3-векторов должно быть заменено операцией сложения 4-векторов в пространстве Лобачевского. В силу лоренц-ковариантности формулировки уравнения, будучи записанными в относительных переменных, уже не зависят от вектора 4-скорости системы.

Таким образом, отделение движения с.ц.м. производится в терминах сохраняющейся релятивистской 4-скорости системы.

В приближении двухчастичного взаимодействия уравнения для амплитуды рассеяния трех частиц записываются через двухчастичные амплитуды, причем для построения последних может быть сформулирована двухчастичная задача на основе уравнения (3.2).

Благодаря трехмерному характеру уравнений при их исследовании, а также решении, можно применить методы, развитые в нерелятивистской теории.

В частности, при достаточно общих предположениях относительно $V_{j\ell}$ (например, если $V_{j\ell}$ есть суперпозиция юкавских потенциалов), можно воспроизвести построения Фаддеева и Лавли /5,24,10,7/ и показать, что к системе (3.1) применимы методы теории Фредгольма и что она имеет единственное решение, за исключением дискретного множества реальных значений $\sqrt{s_q}$.

Принцип соответствия позволяет сформулировать в импульсном представлении релятивистское уравнение Шредингера для системы трех частиц, причем в качестве гамильтониана теория дает оператор инвариантной энергии. Представление этого оператора в виде суммы относительной инвариантной энергии двухчастичной подсистемы и энергии относительного движения этой подсистемы и третьей частицы является лоренц-инвариантным и дает возможность естественно, следуя /17/, ввести конфигурационное пространство для системы трех релятивистских частиц.

Построенная формулировка удовлетворяет условию унитарности и принципу соответствия.

Автор выражает глубокую благодарность В.Г. Кадышевскому и Р.М. Мир-Касимову за стимулирующие плодотворные обсуждения при выполнении работы.

Мне хочется искренне поблагодарить профессора Д.И. Блохинцева за обсуждение и критические замечания.

Литература

1. В.М. Виноградов. Препринт ОИЯИ, Р2-5099, Дубна, 1970.
2. A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze. Nuovo Cim., 29, 380 (1963).
3. В.Г. Кадышевский, А.Н. Тавхелидзе. Труды международного симпозиума по теории элементарных частиц, Варна, 1968.
4. В.Г. Кадышевский. ЖЭТФ, 46, 654 (1964); В.Г. Кадышевский. ЖЭТФ, 46, 872 (1964). В.Г. Кадышевский. ДАН СССР, 160, 573 (1965).
5. Л.Д. Фаддеев. ЖЭТФ, 39, 1459 (1960);
Л.Д. Фаддеев. Труды математического института им. В.А. Стеклова, Изд. АН СССР, М.-Л., 1963 .
6. D.Tz. Stoyanov, A.N. Tavkhelidze. Phys. Lett., 13, 76 (1964); V.P. Shelest, D.Tz. Stoyanov. Phys. Lett., 13, 253 (1964).
7. V.A. Alessandrini, R.L. Omnes. Phys. Rev., 139, B197 (1965).
8. R. Blankenbekler, R. Sugar. Phys. Rev. 142, 1051 (1966).
9. D.Z. Freedman, C. Lovelace, I.M. Namyslowski. Nuovo Cim., 43, A253 (1966).
10. Обзор работ по теории тел можно найти в
 a) I. Duck. Adv. in Nucl. Phys. Plenum Press, New York, (1968), v. 1.
 б) K.N. Watson, J. Nuttal. Topics in several Particle Dinamics, Holden and Day, San Francisco, Calif. (1967).
11. В.А. Матвеев, Р.М. Мурадян, А.Н. Тавхелидзе. Препринт ОИЯИ, Р2-3900, Дубна, 1969 .
12. А.Н. Квинихидзе, Д.Ц. Стоянов. Препринт ОИЯИ, Р4-4814, Дубна, 1969.
13. В.Г. Кадышевский. ДАН СССР, 147, 588 (1962).
14. V.G. Kadyshevsky. Preprint N. 7, ITF, Kiev (1967).
15. V.G. Kadyshevsky. Nucl. Phys. B6, 125 (1968).
16. V.G. Kadyshevsky, M.D. Matveev. Nuovo Cim., 55A, 275 (1968).
17. V.G. Kadyshevsky, R. Mir-Kasimov, N.B. Skachkov. Nuovo Cim., 55A, 223 (1968).

18. V.G. Kadyshevsky, M.D. Matveev, R.M. Mir-Kasimov, Preprint, E2-4030, Dubna, 1968.
19. M. Freeman, M.D. Matveev, R.M. Mir-Kasimov, Nucl. Phys., B12, N1, 197 (1969).
20. В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Скачков. Ядерная физика, 9, №1, 212 (1969).
21. В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Скачков. Ядерная физика, 9, №2, 462 (1969).
22. В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, М. Фриман, Ядерная физика, 9, №3, 646 (1969).
23. Е.П. Жидков, В.Г. Кадышевский, Ю.В. Катышев. Препринт ОИЯИ Р2-4767, Дубна, 1969.
24. C. Lovelace, Phys. Rev., 135, B1225 (1964).
25. R. Omnes. Phys. Rev., 134, B1358 (1964).
26. B.L. Basdevant. Phys. Rev., 138, B892 (1964).

Рукопись поступила в издательский отдел
5 мая 1970 года.